

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

RENÉ LOZI

Motifs et confineurs organisés dans la réaction de Bélousov-Zhabotinskii et le « double scroll »

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1990, tome 41
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa, R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 1, p. 1-62

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MOTIFS ET CONFINEURS ORGANISES dans la réaction de Bélousov-Zhabotinskii et le " Double Scroll "

René LOZI *

Résumé : Nous introduisons des outils mathématiques nouveaux appelés **confiners organisés par des schémas**, pour analyser les **motifs** constituant un signal analogue à celui observé lors d'une expérience chimique : la réaction de Bélousov -Zhabotinskii . Ces confineurs sont également étudiés pour un circuit électronique appelé Double Scroll . L'idée principale étant d'utiliser la " forme " des solutions de systèmes d'équations différentielles dans $\mathbf{R}^3$ plutôt que la nature topologique des attracteurs de ces systèmes .

1. INTRODUCTION.

1.1. Préambule .

Nous décrivons ici plusieurs résultats, pour certains déjà publiés ou en cours de publication, que nous avons obtenus en collaboration avec MM. Ahmed AZIZ - ALAOUI (Université de Nice), Abdelmajid SAIDI (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax , Tunisie), Shigehiro USHIKI (Université de Kyoto) et Leon O. CHUA (Université de Berkeley) .

Ces résultats concernent les équations différentielles non linéaires du premier ordre dans $\mathbf{R}^3$. Il s'agit d'une approche , que nous espérons nouvelle , basée sur la forme que peuvent présenter les solutions de certaines de ces équations . Cette approche , que nous avons appelée : étude des motifs et des confineurs , a commencée en 1982 [1] grâce à une collaboration suivie avec des chimistes du Centre de Recherche Paul Pascal (C.N.R.S ,

* C.N.R.S., Unité associée 168 , Département de mathématiques , Université de Nice , Parc Valrose , 06034 Nice Cedex , France .

à l'Université de Bordeaux) groupés autour de M. Adolphe PACAULT . C'est certainement au contact de ces expérimentateurs que m'est venue l'idée de décrire mathématiquement les " motifs " que ceux-ci employaient dans leurs conversations pour décrire les résultats de leurs expériences très fines sur la réaction de Bélousov - Zhabotinskii en milieu homogène .

Par la suite , j'ai eu la chance de collaborer avec Shigehiro USHIKI , avec lequel j'ai développé , en la précisant , cette description mathématique des motifs . Plus récemment notre intérêt commun s'est tourné vers des équations modélisant le " Double Scroll " , circuit électronique inventé par Takashi MATSUMOTO et Leon O. CHUA . Il était donc tout naturel de collaborer avec d'autres expérimentateurs et en particulier avec ce dernier , électronicien , pour développer des mathématiques dont le but principal est de construire une approche " expérimentale mais formalisée " des équations différentielles en petite dimension .

Nous avons eu , durant cette approche , l'honneur et le plaisir , d'être encouragés par **Monsieur René THOM** , à qui cet exposé est dédié .

1.2. Plan de l'exposé .

Après l'introduction du **chapitre 1** , nous décrivons le cadre de notre étude sur les motifs et les confineurs . Le **chapitre 2** précisant tout d'abord les systèmes d'équations différentielles étudiés , fait place à une présentation assez précise de la réaction de Bélousov - Zhabotinskii , des expériences effectuées et des résultats obtenus dans ces expériences qui expliquent l'intérêt de la notion de motif dans un signal . Cette présentation est suivie de celle du circuit électronique appelé " Double Scroll " , avec également l'analyse des motifs constituant les signaux qui caractérisent ce circuit .

Au **chapitre 3** nous définissons de façon précise ce que nous appelons confineurs et anti-confineurs organisés par des schémas . Nous expliquons brièvement l'idée de niveau d'analyse du confineur principal et les deux types de bifurcations entre confineur que nous avons trouvés pour une famille particulière de système d'équations différentielles contraintes sur une fronce .

Dans le **chapitre 4** nous expliquons les outils qui nous permettent de démontrer l'existence d'un confineur principal pour une famille d'équations qui généralisent celles du Double Scroll . Nous donnons également des résultats pour d'autres modèles et nous concluons .

2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES AUTONOMES DANS R^3 .

2.1. Motivations et cadre de l'étude des motifs et confineurs.

L'étude des systèmes dynamiques dissipatifs chaotiques utilise le plus souvent des techniques mathématiques reliées aux propriétés topologiques des attracteurs asymptotiques. Toutefois, pour certains de ces systèmes comme ceux qui modélisent la cinétique de la réaction chimique de Belousov - Zhabotinskii [2], les variations de voltage et d'intensité du circuit électrique autonome appelé "Double Scrool" [3], la cinétique de la réaction de peroxydase - oxydase de la molécule NADH (nicotinamide adenine dinucleotide réduite) [4], l'intensité d'un laser à CO_2 à paramètres modulés (grâce à un modulateur elasto-optique à base de cristal de ZnSe) [5], ou enfin les oscillations électriques à travers une membrane de nitrobenzène entre deux couches liquides contenant des substances chimiques appartenant aux quatre catégories du goût humain [6], le signal observé (c'est -à - dire la projection des trajectoires du système dynamique dans un sous-espace de l'espace des phases) est très souvent composé de motifs caractéristiques.

En faisant varier un ou plusieurs paramètres de ces systèmes dynamiques, on peut observer des bifurcations entre ces motifs. Ces changements de formes observés expérimentalement sont souvent plus significatifs pour caractériser grossièrement le portrait de phase de ces systèmes dynamiques que les changements de la topologie des attracteurs qui relèvent d'une étude mathématique souvent trop fine pour un expérimentateur qui n'a pas, en général, un contrôle absolu sur la valeur des paramètres de son expérience [2].

Bien entendu, les exemples que nous indiquons ici, sont des systèmes dynamiques très particuliers, puisque ce sont des équations différentielles non linéaires autonomes du premier ordre en dimension 3 (sauf pour la réaction de peroxydase - oxydase, dont nous n'aborderons pas l'étude ici, où la dimension est 4; pour le laser à paramètres modulés, on a un système de deux équations différentielles non- autonomes qui peuvent donc se ramener à un système autonome en dimension 3).

Cependant l'introduction récente de la notion de variété inertielle [7] permet d'espérer d'étendre l'intérêt de l'idée de motif à des problèmes d'équations aux dérivées partielles dissipatives, problèmes qui modélisent une classe plus large de problèmes physiques. En effet, les propriétés d'une variété inertielle d'une équation aux dérivées partielles qui est une variété lipschitzienne de dimension finie, non unique en général, qui attire exponentiellement toutes les trajectoires et qui contient l'attracteur universel (quand il

existe) permettent en un certain sens de réduire l'étude de la dynamique à la dimension finie .

Il nous semble donc nécessaire de développer le plus complètement possible l'étude des motifs pour les équations différentielles non linéaires autonomes du premier ordre en dimension 3 avant de généraliser plus avant cette idée , tout en regardant évoluer la théorie de ces variétés inertielles et tous les autres travaux qui tendent à montrer que la dimension des attracteurs de systèmes dynamique en dimension infinie est en général bornée . (cf. par exemple dans le cas des équations de Navier-Stokes où l'on ne sait pas construire pour l'instant de variété inertielle car une certaine hypothèse d'écart spectral n'est pas vérifiée , on peut quand même obtenir le théorème suivant :

Théorème [8] : L'attracteur maximal associé aux équations de Navier-Stokes en dimension d'espace égale à 2 est de dimension fractale (et donc de Hausdorff) finie . Sa dimension peut-être majorée par $C_0 G$ où C_0 est une constante absolue et G est le nombre de Grashoff .)

Enfin , sans que l'on puisse le démontrer formellement, il semble aujourd'hui que les difficultés rencontrées dans l'étude des équations différentielles autonomes en dimension trois soient assez importantes pour que l'étude d'équations différentielles en dimension supérieure n'apporte pas de difficultés vraiment différentes au point de vue topologique (un des arguments renforçant cette idée est la complexité de la géométrie en dimension 3).

Tout ceci concourt à indiquer que le cadre que nous avons choisi pour l'instant pour l'étude des motifs et des **confineurs** n'est pas aussi restreint qu'on pourrait le penser au premier abord .

2.2. Equations différentielles contraintes.

Nous allons définir de façon rigoureuse les termes motifs et confineurs que nous avons introduits jusqu'ici , dans le cadre des **équations différentielles contraintes** sur une fronce , telles que les a définies F. Takens [9] . Soit donc le système noté (E_C) ou (E_0) :

$$\begin{cases} 0 = f(x,y,z) = - \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} ; \\ \dot{y} = g(x,y,z) ; \\ \dot{z} = h(x,y,z) ; \end{cases} \quad (1)$$

avec $\dot{} = \frac{d}{dt}$ et $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Les solutions de (1) peuvent être définies rigoureusement (cf. § 3.1). Sans entrer dans le détail de leur définition, on peut simplement indiquer que dans le cas où la variété définie par $f(x,y,z) = 0$ est une fronce ou un double pli, ces solutions sont composées d'arcs de trajectoires qui restent sur la partie stable de cette variété et qui sont reliés par des segments de droites dans la direction de l'axe des x , qui vont d'un **pli** au **copli** correspondant (cf. le § 3.1. pour la définition de ces termes).

On s'intéressera plus particulièrement à la famille d'équations différentielles définie dans [10] pour laquelle on étudiera un problème de Cauchy généralisé, c'est-à-dire l'étude du portrait de phase :

$$\begin{cases} 0 = y + \frac{3}{4}xz - x^3 ; \\ \dot{y} = \tau^2 Ax + \tau By + \frac{3\beta\tau}{4\alpha}xz; \\ \dot{z} = \tau Cz - \frac{4\alpha\gamma\tau}{3a}x^2 ; \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{avec :} \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0, a < 0, \tau > 0 \quad , \quad (2a)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + C - B < 0 \quad , \quad (2b)$$

$$\text{et} \quad \tau = -\frac{4}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} + C - B \right) \quad , \quad (2c)$$

L'intérêt des équations différentielles contraintes réside dans l'approximation singulière de systèmes d'équations différentielles avec un petit paramètre $\varepsilon > 0$, appelés systèmes "lents-rapides", de la forme (E_ε) :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x,y,z) ; \\ \dot{y} = g(x,y,z) ; \\ \dot{z} = h(x,y,z) ; \end{cases} \quad (3)$$

L'étude des systèmes (E_ε) est souvent très difficile , comme on peut le voir dans [11] , ou dans l'étude du " Double Scroll " [3] (qui possède lui deux petits paramètres) . Il ne possèdent pas d'éléments aussi caractéristiques que les systèmes contraints (E_0) . On peut considérer que le portrait de phase des systèmes contraints considérés comme approximation singulière des systèmes avec petits paramètres , donne une bonne approximation du portrait de phase de ces derniers , même si dans les systèmes (E_ε) il existe des solutions (les " canards ") qui n'existent pas dans les systèmes (E_0) [12] . En effet ces solutions particulières exceptionnelles sont très difficiles à isoler car elles nécessitent la connaissance de conditions initiales avec une précision très importante , ce qui les rend hors d'atteinte d'une observation expérimentale dans la plupart des cas .

Les systèmes (3) ne forment bien entendu qu'une toute petite partie des systèmes différentiels dans R^3 , ils sont néanmoins intéressants car leurs solutions peuvent être " chaotiques " ; de plus ce sont certainement les systèmes les plus simples pour lesquels les solutions peuvent être chaotiques au sens où ces solutions appartiennent à des ensembles dont la " dimension fractale " (sans préciser laquelle) est sans doute bien plus proche de 2 que de 3 .

2.3. La réaction de Bélousov - Zhabotinskii .

On utilise actuellement les noms de Bélousov et de Zhabotinskii de façon générique pour décrire un ensemble de réactions chimiques oscillantes qui dépendent de plusieurs paramètres et qui sont apparentées à celles découvertes par B.P. Bélousov en 1958 et étudiées par A.M. Zhabotinskii en 1964 [13] .

Ces réactions ont été intensivement étudiées dans le cadre des études sur la **turbulence faible** , depuis une dizaine d'années , en particulier pour découvrir de nouvelles **routes** vers la turbulence . Dans ce cas , on étudie cette réaction en rendant négligeable les phénomènes de diffusion par une agitation permanente de la solution dans un dispositif bien connu des chimistes : le réacteur agité à flux continu .

Dans ce cas , considéré comme sans diffusion , la cinétique de la réaction de Bélousov - Zhabotinskii qui inclut plus de 20 réactions chimiques élémentaires peut se ramener à un système différentiel avec un espace de phase de grande (par rapport à 3) dimension . La nature exacte de chacune des étapes réactionnelles intermédiaires et des

constantes de vitesse de réaction s'y rapportant est loin d'être connue et le débat entre chimiste pour l'établissement d'un modèle chimique simplifié mais pertinent est plus vif que jamais [14 , 15] .

L'étude qualitative d'un portrait de phase de grande dimension étant actuellement impossible à mener , R.J. Fields et R.M. Noyes [16] ont proposé en 1974 un schéma de cinq réaction chimiques pseudo-élémentaires appelé " Oregonator " , aboutissant à un système de trois équations différentielles ordinaires avec des petits paramètres . J.J. Tyson [17] s'inspirant de l'idée de chaos par réinjection de O.E. Rössler [18] a proposé un modèle modifié , permettant d'obtenir une dynamique plus riche (et en particulier des oscillations chaotiques) de cet Oregonator , dont la cinétique est modélisé par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{x} = \mu y - xy + x(1-z) - rx^2 - \frac{\varepsilon}{\tau}(x^0 - x) ; \\ \varepsilon' \dot{y} = -\mu y - xy + fz - \frac{\varepsilon'}{\tau}(y^0 - y) ; \\ \dot{z} = x(1-z) - z + \frac{1}{\tau}(z^0 - z) ; \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{où : } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' \approx 5 \cdot 10^{-6} \ll \varepsilon \approx 10^{-3} \ll 1 ; \\ \mu \approx 2 \cdot 10^{-5} \ll r ; f \approx 1 ; \\ r = r(y) = r_1 ; f = f(y) = f_1 \text{ si } y \leq \frac{1}{\Lambda} ; \\ r = r_2 < r_1 ; f = f_2 < f_1 \text{ sinon .} \end{array} \right. \quad (5)$$

et où t représente le temps , x , y , et z sont proportionnels à des concentrations liées aux concentrations de l'acide malonique , du bromate de sodium et du sulfate de cérium dissous dans l'acide sulfurique ; x^0 , y^0 , z^0 sont les valeurs de x , y , z dans le flux d'alimentation qui est caractérisé par le **paramètre de bifurcation** $\frac{1}{\tau}$, inverse du **temps**

moyen de résidence dans le réacteur . On mesure dans les expériences les plus précises un seul signal directement proportionnel à z et qui est lié à la concentration des ions Ce^{4+} dans le réacteur (il n'est pas possible jusqu'ici , de mesurer de façon fiable , un signal de dimension supérieure à un) . Ce signal , dans le dispositif expérimental décrit à la **Figure 1** (d'après F. Argoul [19]) est obtenu par mesure de la densité optique de la solution dans le réacteur à 340 nm .

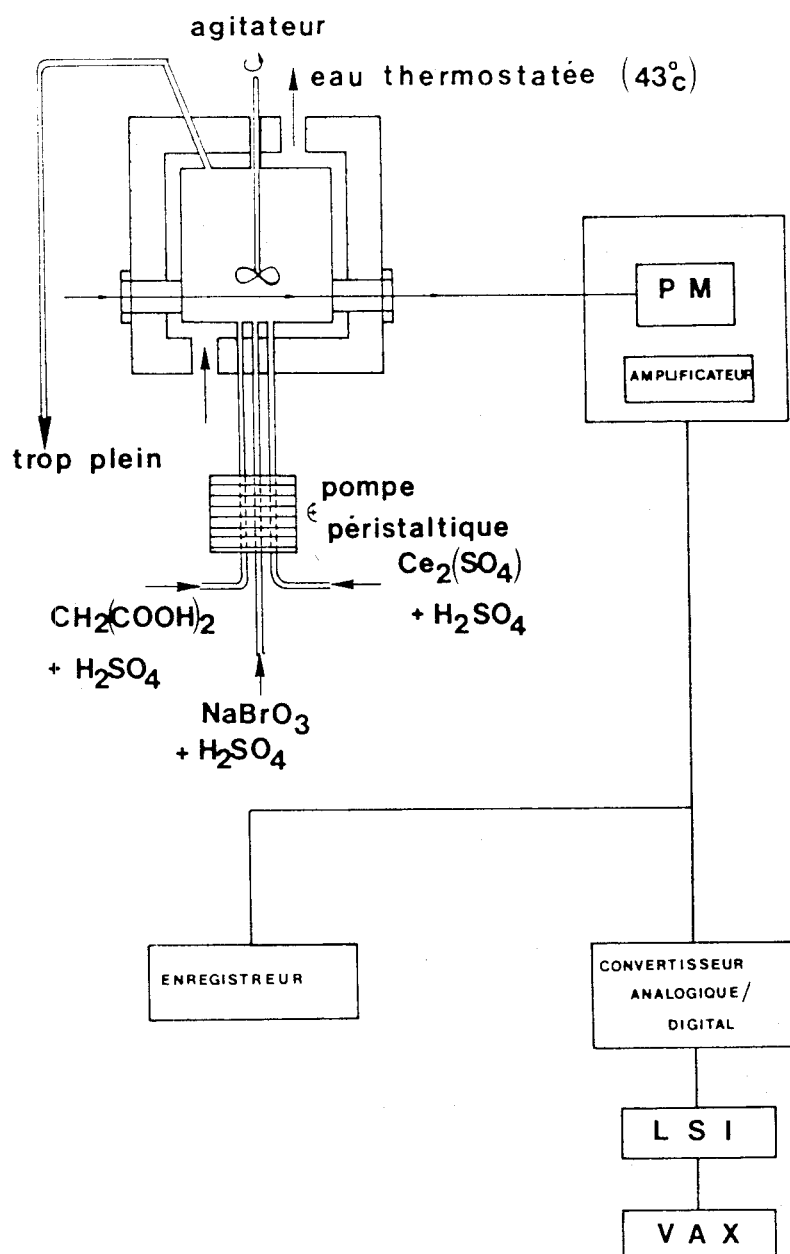


Figure 1 . Dispositif expérimental employé par le groupe de chimistes de Bordeaux (d'après [19]).

La difficulté de l'interprétation des oscillations du signal recueilli dans ce type d'expérience résulte pour partie de la méconnaissance des autres composantes des solutions du système différentiel qui modélise la réaction de Bélousov - Zhabotinskii . Généralement , les chimistes admettent que le système (4) ou tout système de ce type de dimension 3 est d'une complexité suffisante pour décrire toutes les " pathologies " de la dynamique des oscillations . Ils essayent donc à partir d'un signal à une dimension de reconstituer des trajectoires dans un espace de phase à trois dimensions , soit en traçant $(z, \dot{z}, \ddot{z})$, soit en traçant $(z(t), z(t + \tau), z(t + 2\tau))$ pour diverses valeurs de τ .

Ils ont alors des trajectoires de l'espace des phases , pour lesquelles ils peuvent appliquer tous les outils classiques de l'étude des systèmes dynamiques (d'une façon numérique bien entendu) : applications de Poincaré , dimensions fractales (Hausdorff, de capacité , d'information , etc ...) , exposants de Liapunov , etc ...

Les systèmes comme (4) peuvent permettre le même type d'étude , soit directement (calcul de variétés invariantes , de points homoclines, ...) soit à partir d'une intégration numérique des solutions .

Les résultats obtenus confortent l'existence d'un " chaos chimique " [17] , et la possibilité d'une certaine universalité des routes vers la turbulence faible , que l'expérience soit chimique comme ici , ou qu'elle soit de nature physique comme dans les problèmes de Rayleigh - Bénard et de Couette - Taylor . Nous ne pouvons pas décrire dans cet article la somme des résultats obtenus ; cependant les deux points qui restent les plus délicats dans l'application brutale de résultats mathématiques à des résultats expérimentaux sont dans le cas de Bélousov - Zhabotinskii , d'abord la difficulté de maîtriser très précisément le ou les paramètres de bifurcation , et ceci malgré tous les raffinements expérimentaux comme l'emploi de pompes peristaltiques entraînées par moteurs pas à pas pilotés par oscillateur à quartz ; ensuite le problème des régimes transitoires qui peuvent perdurer pendant une durée relativement longue (de quelques heures à un jour) et qui laissent planer un doute sur la possibilité d'atteindre un ensemble ω - limite (ω - limite étant à prendre dans un sens " expérimental " , bien sûr , c'est-à-dire une limite atteinte au bout d'un temps " suffisamment " long) .

C'est pourquoi il reste difficile d'affirmer que l'on a observé expérimentalement tel attracteur possédant telle ou telle structure topologique . **Ceci pose le problème de l'adéquation de l'étude des systèmes dynamiques telle qu'elle est effectuée actuellement , par les mathématiciens , à l'explication de résultats de ces expériences chimiques qui concernent la réaction de Bélousov - Zhabotinskii .**

Une autre façon originale de décrire les résultats de ces expériences est celle utilisée par J. Maselko et H.L. Swinney [2 , 20] qui utilisant judicieusement la forme des oscillations du signal , décrivent les états observés comme une suite de motifs qui se transforment les uns dans les autres par des bifurcations . Nous donnons à la **Figure 2** deux exemples de suites de motifs observés expérimentalement .

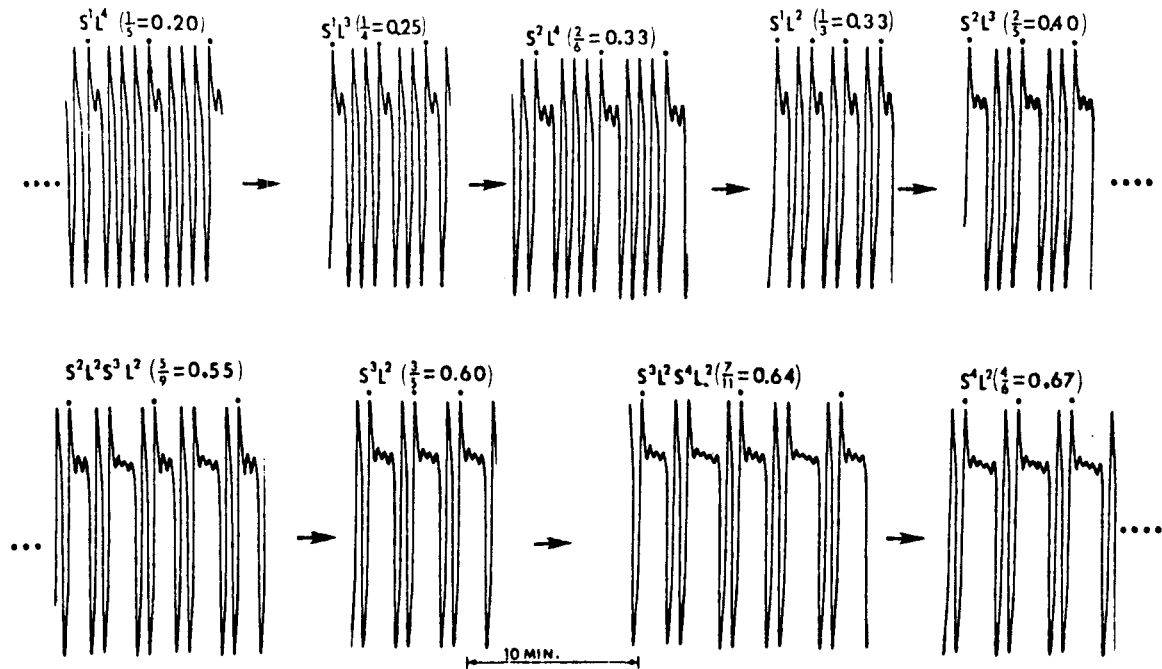


Figure 2. Deux exemples de suites d'états périodiques observés . Les points au - dessus du signal sont espacés d'une période et les quantités entre parenthèses donnent le rapport entre le nombre d'oscillations de petite amplitude et le nombre total d'oscillations constituant une période (d'après [2]).

Dans ces deux suites , S représente une petite oscillation et L une grande ; $S^n L^p$ est un motif formé de n petites oscillations immédiatement suivies de p grandes oscillations . Un signal composé d'une suite de motifs est appelé signal périodique , même si les oscillations peuvent ne pas être strictement périodiques (on peut très facilement imaginer une solution quasi - périodique donnant ce type de motifs) . Les mêmes auteurs ont rencontré des motifs de forme plus compliquées comme à la Figure 3 où les deux motifs rencontrés sont [20] :

$$L^2 S^3 L^2 S^2 L^1 S^1 L^1 S^1 L^1 S^2$$

et

$$L^2 S^3 L^2 S^3 L^2 S^2 L^1 S^1 L^1 S^2.$$

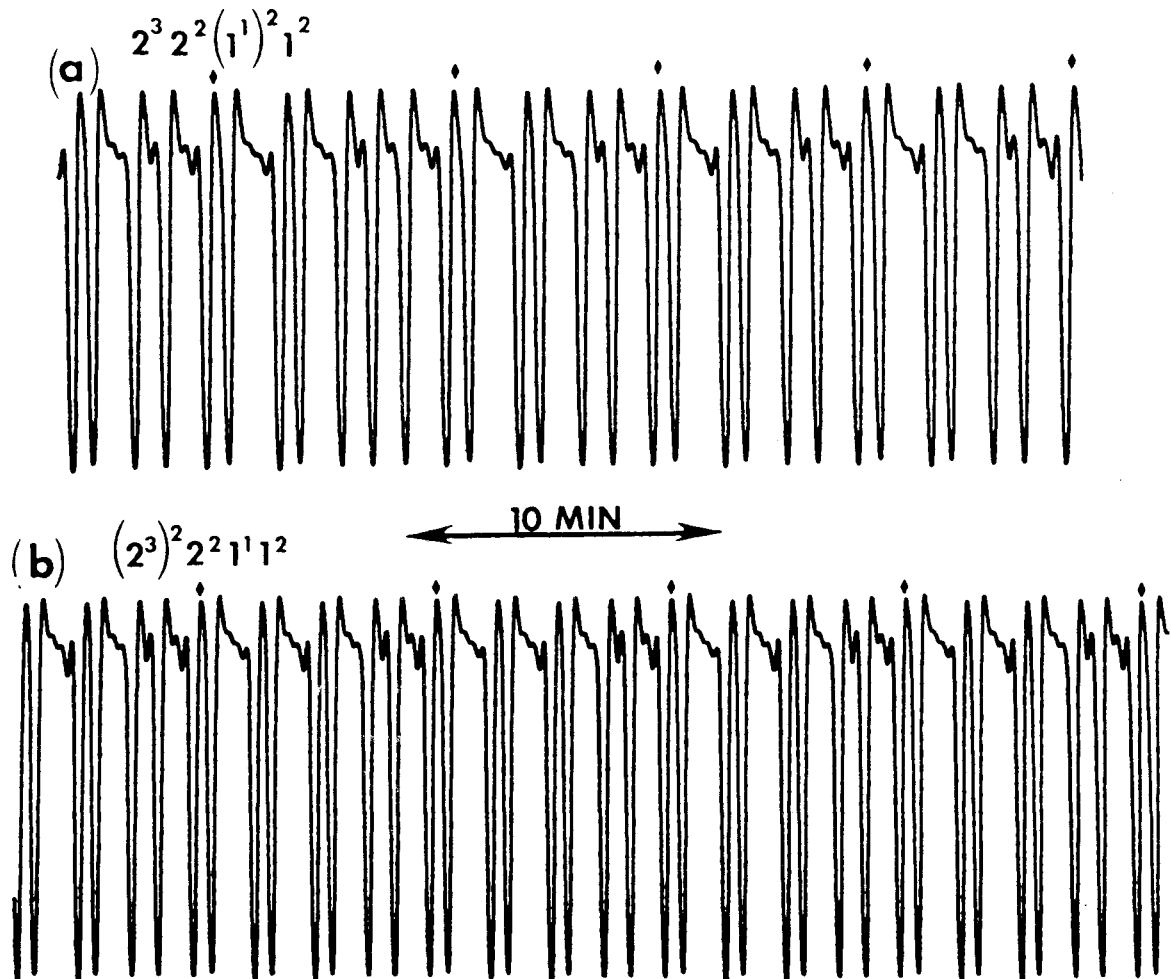


Figure 3. Deux exemples de motifs complexes composés de quatre motifs élémentaires : $L^2 S^3$, $L^2 S^2$, $L^1 S^1$ et $L^1 S^2$ (notés ici : 2^3 , 2^2 , 1^1 et 1^2) (d'après [20]).

Ils ont également trouvé des valeurs des paramètres pour lesquels le signal est constitué d'un ensemble de motifs différents qui se suivent dans un ordre indéterminé et qu'ils nomment états " chaotiques " .

La première constatation que l'on peut faire est que ces motifs décrivent bien le signal même si d'un strict point de vue topologique leur description ne permet pas de connaître la nature topologique de l'attracteur (s'il existe) qui régit la dynamique . Ils donnent plutôt une indication " géométrique " sur ce signal .

La seconde , manifeste au vu des **Figures 4 et 5** , est que la nature topologique de l'attracteur peut se complexifier au point de n'être plus déterminable par la connaissance de la transformée de Fourier du signal , alors que celui-ci est facilement descriptible à l'aide de motifs caractéristiques .

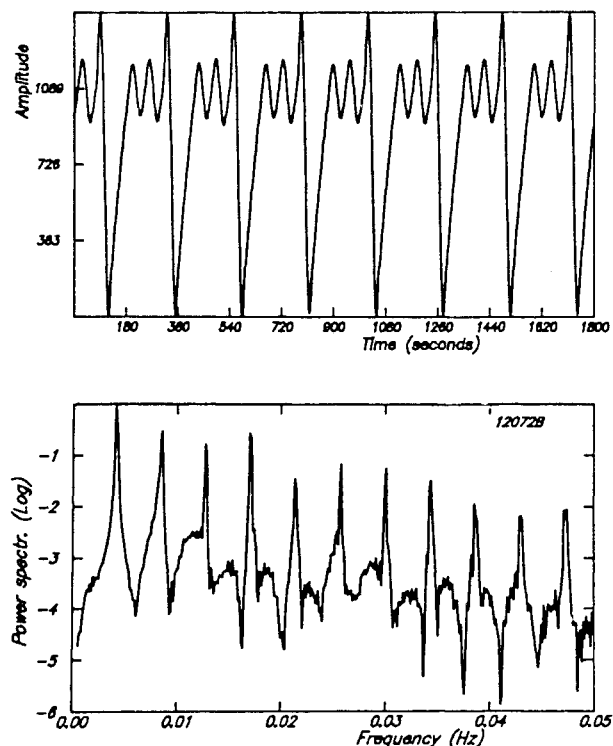


Figure 4. Dépendance en fonction du temps du potentiel de l'ion bromide et spectre de puissance correspondant dans la réaction de Belousov - Zhabotinskii , pour les données obtenues avec un temps de résidence $\tau = 1.25$ heure , le motif est : $L^1 S^2$ (d'après [21]).

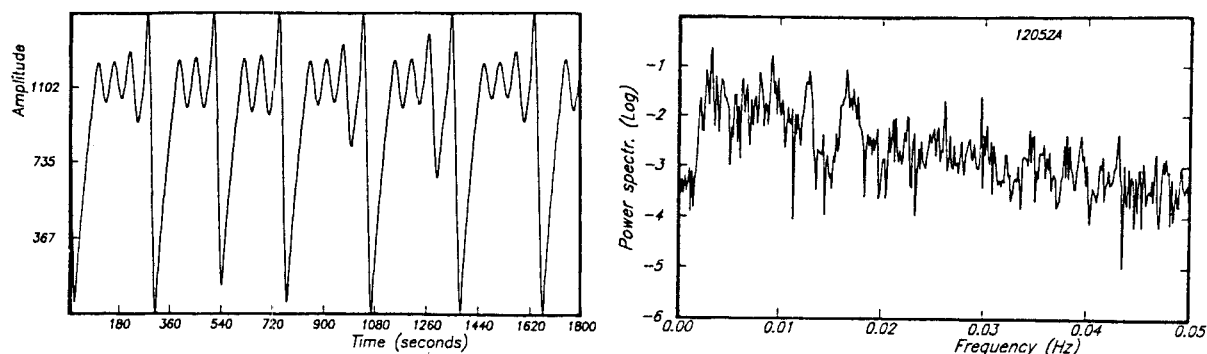


Figure 5. Idem figure 4 pour un temps de résidence $\tau = 1.38$ heure , les motifs sont : $L^1 S^2$ et $L^1 S^3$ (d'après [21]).

Ainsi , il nous apparaît intéressant à la vue de ces exemples d'essayer de mathématiser cette notion , pour l'instant intuitive , de motif composant un signal . C'est ce à quoi nous allons nous employer au Chapitre III , non pas sur le système (4) , bien que cela soit actuellement possible mais non encore réalisé , mais sur la famille de systèmes (2) qui possède sur (4) l' avantage d'une certaine généralité et ne présente pas l'inconvénient de la discontinuité des seconds membres des équations qui le composent (cf. (5) : r et f sont discontinus pour des raisons de géométrie de la variété lente [17]).

2.4. Le Double Scroll .

On appelle Double Scroll un circuit électronique très simple puisque fabriqué à partir de quatre éléments de base : un résistor , un inducteur , deux capaciteurs et d'un résistor nonlinéaire caractérisé par une courbe voltage - intensité affine par morceaux (avec 5 morceaux) . Ce circuit inventé par L.O. Chua et T. Matsumoto en 1985 [22] , a la particularité de présenter des oscillations " chaotiques " qui ressemblent à l'attracteur de Rössler [18] . On peut les étudier grâce aux outils classiques des systèmes dynamiques [3], cependant en dépit de la simplicité des équations qui modélisent la dynamique de ce circuit , les demi-applications de Poincaré ne sont pas connues explicitement et il est difficile de donner des résultats précis sur la nature des oscillations de circuit .

Les inventeurs de ce circuit ont également décrit les oscillations de ce circuit en termes de motifs qui présentent certaines analogies avec les motifs de la réaction de Bélousov - Zhabotinskii . Pour notre point de vue , ce système est très important car il permet de définir et d'étudier mathématiquement des motifs et des confineurs pour des systèmes d'équations différentielles dans $\mathbf{R}^3$ **qui ne peuvent pas se ramener à des équations différentielles contraintes sur une variété de dimension deux** . C'est - à - dire que les applications de Poincaré correspondantes sont de dimension 1 dans le cas des équations différentielles contraintes et de dimension 2 dans le Double Scroll . Ainsi il devient beaucoup plus complexe de définir des confineurs car dans le premier cas , les bornes de ceux-ci sont des points tandis que dans le deuxième cas , il s'agit de courbes dans le plan . Cependant nous arrivons à obtenir des premiers résultats , qui s'ils sont techniquement délicats à décrire n'en constituent pas moins un pas important dans la construction d'une véritable théorie des confineurs .

La dynamique du Double Scroll est décrite par le système suivant (système sans dimension au sens physique de ce terme) :

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha (Y - h(X)) ; \\ \dot{Y} = X - Y + Z ; \\ \dot{Z} = -\beta Y ; \end{cases} \quad (6)$$

où :

$$h(X) = X + f(X) = m_1 X + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) (|X + 1| - |X - 1|) \quad (7)$$

est l'équation linéaire par morceaux canonique décrivant une courbe voltage-intensité affine par morceaux ayant des discontinuités aux points $X = -1$ et $X = 1$ (seuls trois des cinq segments de la courbe voltage-intensité sont inclus dans l'équation (7) car les deux segments extérieurs de cette courbe ne jouent aucun rôle dans la formation de l'attracteur du Double Scroll).

L'approche mathématique développée dans [3] consiste à développer et analyser un déploiement (qui ne nécessite que des fonctions continues au lieu des habituelles fonctions différentiables classiquement utilisées pour les déploiements) de (6) qui a quatre paramètres en une famille de champs de vecteurs continues par morceaux, de dimension trois caractérisée par six paramètres. Ces six paramètres sont ensuite réduits à cinq valeurs propres normalisées grâce à un **critère d'équivalence linéaire** introduit spécialement dans [3].

Notre approche consiste en s'appuyant sur ces travaux et d'autres plus récents de développer la notion de confieurs dans ce cas.

Nous n'entrerons pas plus avant dans cette étude à ce chapitre, où nous bornerons à montrer tout d'abord le schéma de ce circuit électronique (**Figure 6**), la forme des oscillations en fonction du temps (**Figure 7a, 7b, 7c**) et la forme des oscillations dans l'espace des phases (**Figure 8a, 8b, 8c**) d'après [23]. Ces oscillations étant obtenues sur un oscilloscope à partir du circuit électronique, ce qui pour les électroniciens est très important, car ils ont en général une confiance limitée dans les simulations numériques d'équations différentielles sensées représenter leurs circuits, en raison notamment des variations dans le temps et en fonction de la température à laquelle fonctionnent leur circuit, des caractéristiques des composants élémentaires. Ce qui se traduit par des variations non contrôlées des valeurs des paramètres des équations différentielles. On retrouve à ce propos de la valeur des paramètres, les mêmes difficultés dans la modélisation que pour la réaction de Bélousov - Zhabotinskii.

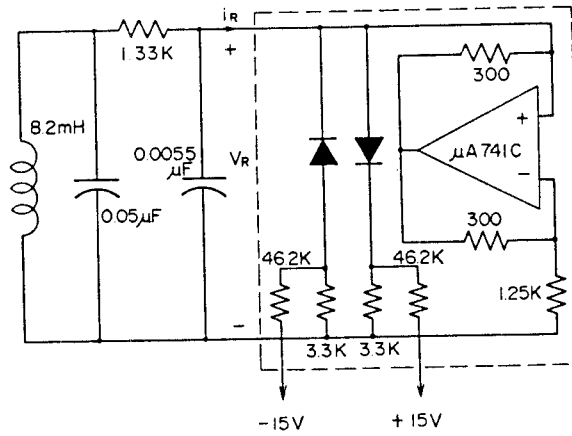
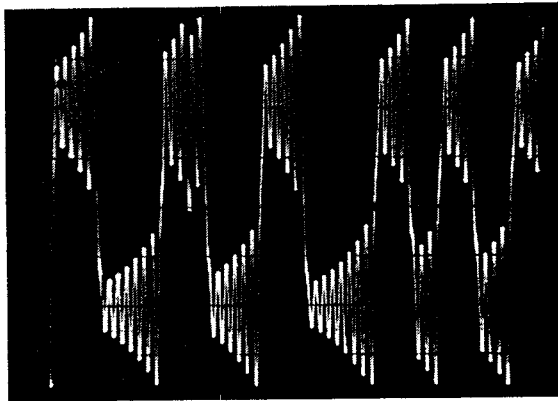
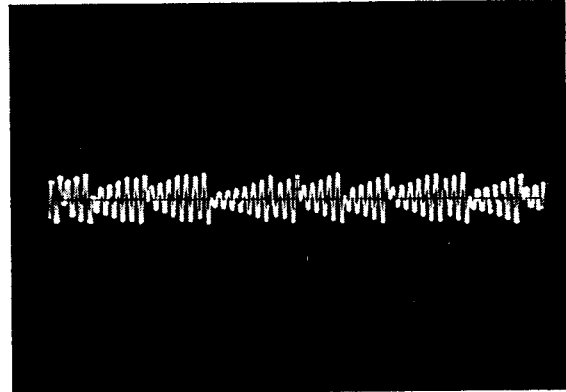


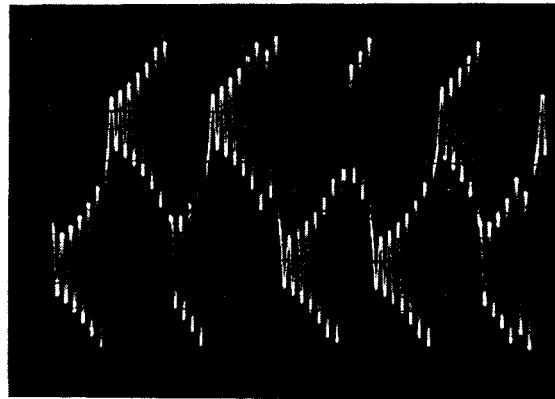
Figure 6. Un circuit possible pour le Double Scroll (d'après [23]).



(a)

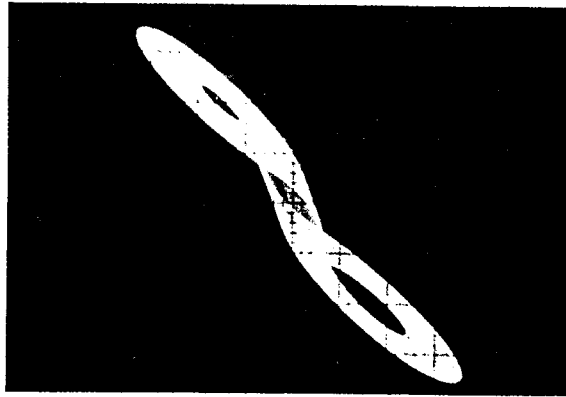


(b)

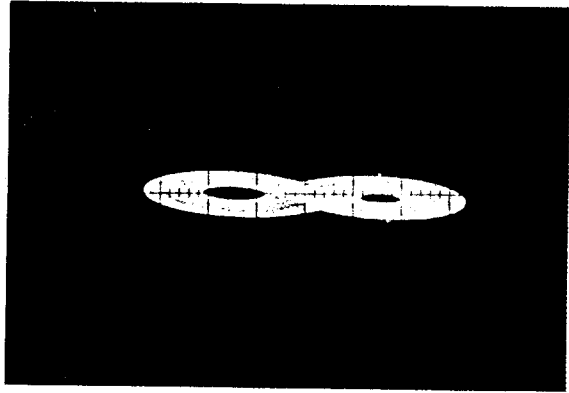


(c)

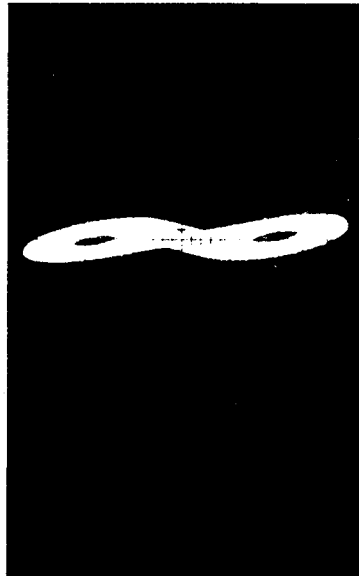
Figure 7. Motifs dans le Double Scroll . (7a) : Voltage de la capacité de $0.0055 \mu\text{F}$ en fonction du temps = $V_{C_1}(t)$. (7b) : Voltage de la capacité de $0.05 \mu\text{F}$ en fonction du temps = $V_{C_2}(t)$. (7c) : Intensité de la self en fonction du temps = $i_L(t)$ (d'après [23]).



(a)



(b)



(c)

Figure 8. Attracteur observé dans le Double Scroll . (8a) : projection dans le plan (i_L, V_{C_1}) . (8b) : projection dans le plan (i_L, V_{C_2}) . (8c) : projection dans le plan (V_{C_1}, V_{C_2}) (d'après [23]) .

La description des oscillations sous forme de motifs a été utilisée par L.- Q. Pei , F. Guo, S. - X . Wu et L.O. Chua lors des premiers essais sur un circuit préfigurant le Double Scroll (**Figure 9**) [24] .

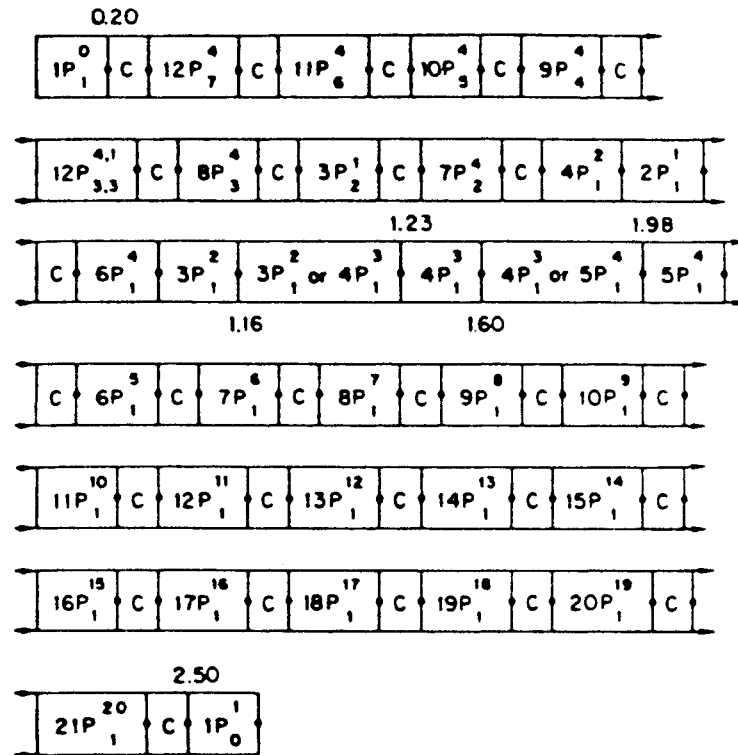
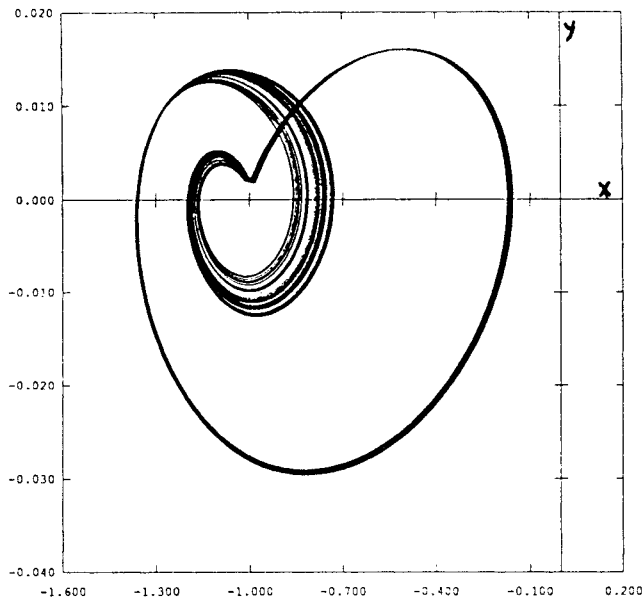
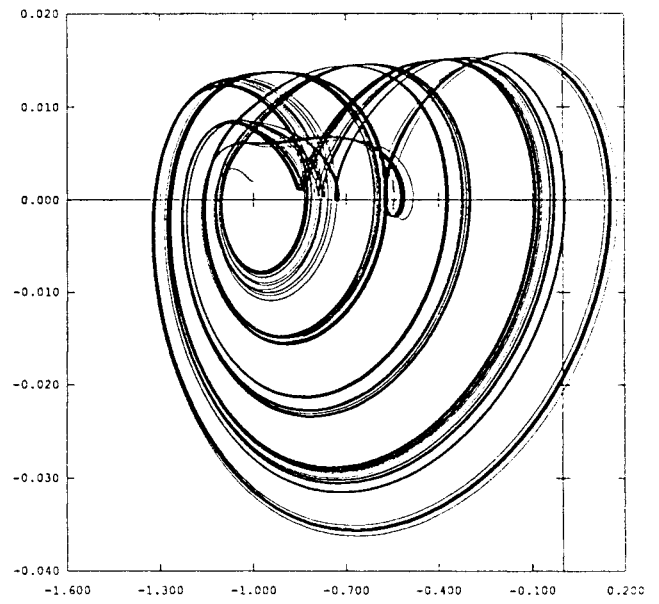


Figure 9. Une suite de motifs périodiques et chaotiques . Le nombre en exposant (indice) indique le nombre d'oscillations de grande (petite) amplitude . P veut dire périodique et C chaotique . Les nombres au-dessus (au-dessous) des frontières entre deux motifs différents indiquent les valeurs de bifurcation dans le sens croissant (décroissant) du paramètre (d'après [24]) .

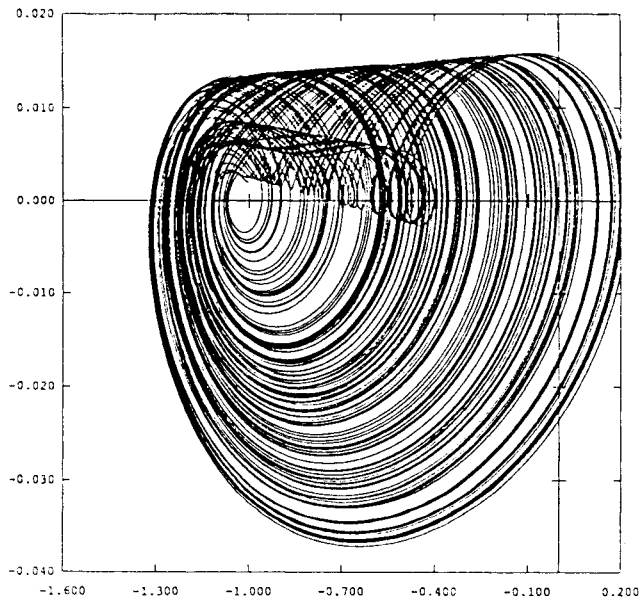
Finalement nous montrons aux Figures 10a, 10b, 10c , 10d , des formes des trajectoires du système différentiel correspondant à la famille déployée du Double Scroll , que nous avons obtenues par intégration numérique . Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à des valeurs des paramètres pour lesquelles l'attracteur du Double Scroll est séparé en deux composantes connexes (attracteur appelé " spiral " dans [3]), ces valeurs correspondent à la situation pour laquelle nous sommes capables de démontrer l'existence de confineurs . Formellement L.O. Chua et T. Matsumoto appellent Double Scroll l'attracteur connexe qui " entoure " les trois points singuliers du circuit . Par commodité nous garderons dans la suite l'appellation Double Scroll pour la famille déployée .



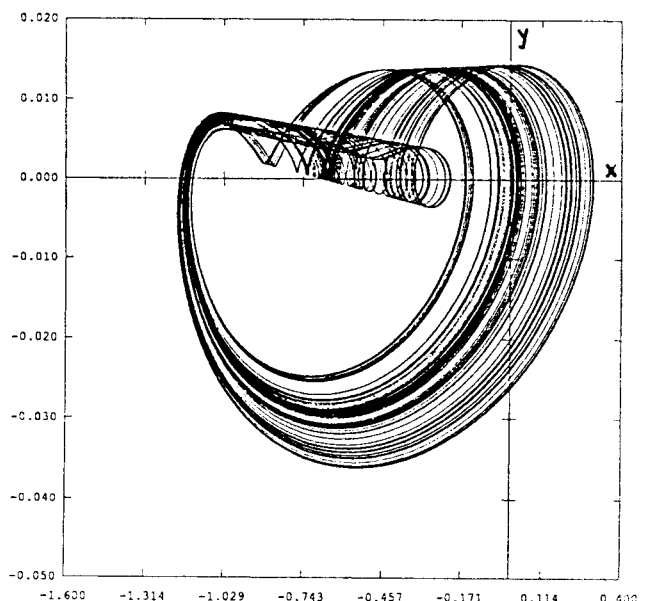
a



b



c



d

Figure 10. Trajectoires spirales du Double Scroll (projection dans le plan (X, Y)) obtenues par intégration numérique à partir de la donnée initiale $(X_0, Y_0, Z_0) = (-0.001, 0.001, 0.001)$ pour les valeurs suivantes des paramètres : $\gamma_0 = 0.135$, $\gamma_1 = -0.900$, $\sigma_0 = -0.325$, $\sigma_1 = -0.500$ et (10a) : $k_0 = 0.090165$; (10b) : $k_0 = 0.1300$; (10c) : $k_0 = 0.1400$; (10d) : $k_0 = 0.1800$.

3. MOTIFS ET CONFINEURS ORGANISES.

Après nous être intéressés , au **chapitre II** , à l'aspect expérimental des motifs , nous allons dans ce chapitre développer un aspect plus formel en définissant pour les systèmes d'équations différentielles contraintes de $\mathbf{R}^3$ et en particulier pour le système (2) une région attractante particulière : le **confiner principal** que nous décomposerons en **confiners** et **anti-confiners organisés** par des **schémas** reliés à différentes dynamiques symboliques .

Ces objets nous permettent d'étudier les régimes **transitoires** autant que les régimes **asymptotiques** . Ils ne sont pas complètement comparables aux différentes définitions d'attracteurs asymptotiques qui existent à ce jour . Nous espérons qu'ils nous permettront de développer de nouvelles méthodes d'étude dans lesquelles l'idée de **niveau d'analyse** d'un système dynamique est prise en compte . Cette idée qui s'inspire de l'approche expérimentale n'est pas suffisamment développée dans la modélisation mathématique actuelle .

3.1. Eléments caractéristiques des systèmes d'équations différentielles contraintes dans $\mathbf{R}^3$.

Soit donc le système d'équations différentielles contraintes (E_0) donné par (1) . Ce système est souvent considéré comme une perturbation singulière d'un système lent - rapide (E_ε , $\varepsilon > 0$) de la forme (3). Nous allons en définir quelques éléments caractéristiques qui sont , pour certains d'entre eux , aussi des éléments caractéristiques des systèmes (E_ε) .

Dans la suite nous définissons donc des éléments des systèmes (1) et (3) (notés (E_ε , $\varepsilon \geq 0$)) et nous précisons ceux qui ne sont définis que pour (1) . Tout d'abord ces systèmes possèdent une **variété lente** :

$$S_V = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = 0 \} \quad (8)$$

de partie stable :

$$S_{V_{\min}} = \{ (x, y, z) \in S_V \text{ tel que } -F(x, y, z) = \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2} \geq 0 \} \quad (9)$$

on se borne aux systèmes (E_ε , $\varepsilon \geq 0$) qui vérifient l'hypothèse:

Hypothèse 1 : S_V est une variété de dimension 2 dont la projection dans le plan (y, z) est générique : les seules singularités étant le pli et la fronce .

On appelle **pli** $\mathcal{P}$ tout sous-ensemble connexe de (10) :

$$\{ (x, y, z) \in S_V \text{ tel que } F(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \neq 0 \} \quad (10)$$

et **copli** $\mathcal{Q}$ la projection d'un pli $\mathcal{P}$ sur S_V dans la direction des x .

En général , le portrait de phase du système contraint (E_0) (1) au sens de Takens , est à l'exception de quelques trajectoires [12] , proche de celui du système lent - rapide (E_ε) (3) pour $\varepsilon > 0$ petit .

Pour étudier les solutions du système contraint (E_0) au sens de Takens , on a besoin de définir un **champ de vecteurs réduit** qui est un champ de vecteurs défini partout sur S_V par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{x} = - \left\{ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \cdot g(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \cdot h(x, y, z) \right\} \cdot \text{sgn } F ; \\ \dot{y} = g(x, y, z) \cdot F \text{sgn } F ; \\ \dot{z} = h(x, y, z) \cdot F \text{sgn } F ; \end{array} \right. \quad (11)$$

Les solutions de $(E_\varepsilon, \varepsilon \geq 0)$ qui appartiennent à S_V sont solutions de (11) .

Parmi les éléments caractéristiques de ces systèmes réduits figurent les **points pseudo-singuliers** , mis en évidence par J. Argémi [24] . Il s'agit des points singuliers de (11) qui ne sont pas singuliers pour (3) . Leur importance vient de ce que les trajectoires passant par ces points déterminent des séparatrices des solutions du système contraint .

Les points pseudo-singuliers (notés PPS) de $(E_\varepsilon, \varepsilon \geq 0)$ sont les points du pli $\mathcal{P}$ tels qu'en ces points :

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot g(x,y,z) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot h(x,y,z) = 0 . \quad (12)$$

Nous supposons que les systèmes (1) et (3) que nous étudions , vérifient en outre l'hypothèse :

Hypothèse 2 : Soit $\mathbf{B}$ un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ qui ne contient pas le point cuspidal , les points singuliers de $(E_\varepsilon, \varepsilon \geq 0)$ dans $\mathbf{B}$ sont isolés, ne sont pas situés sur le pli et g ou h ne s'annulent pas en ces points . Les PPS de ce système dans $\mathbf{B}$ sont des cols non dégénérés, c'est-à-dire que :

$$\delta = h^2 \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right)^2 \right\} + h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right\} < 0 \quad (13)$$

$$\text{et } \frac{T^2}{4} - \delta \neq 0 \quad \text{aux PPS , avec } T = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} .$$

Nous avons également besoin de définir les points **co-pseudo-singuliers** qui sont les points de $\mathbf{Q}$ où le champ de vecteur réduit est tangent à $\mathbf{Q}$.

La définition exacte, au sens de Takens , des solutions du système (1) est la suivante [9] :

Soit $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la projection $(x, y, z) \rightarrow \pi(x, y, z) = (y, z)$;

Définition 1 : soit $] \alpha, \beta [$ un intervalle réel, $\alpha < \beta$; une courbe $\gamma :] \alpha, \beta [\rightarrow \mathbf{R}^3$ est une solution de (1) si :

i)

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \gamma(t) = \gamma(t_0^+) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \gamma(t) = \gamma(t_0^-) \quad \text{existent pour tout } t \in] \alpha, \beta [$$

et satisfont :

$$\pi(\gamma(t_0^+)) = \pi(\gamma(t_0^-)) \quad \text{et} \quad \gamma(t_0^+), \gamma(t_0^-) \in S_{v_{\min}} ,$$

ii)

$$\begin{cases} \frac{dy(t^-)}{dt} = g[x(t^-), y(t^-), z(t^-)] ; \\ \frac{dz(t^-)}{dt} = h[x(t^-), y(t^-), z(t^-)] ; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dy(t^+)}{dt} = g[x(t^+), y(t^+), z(t^+)] ; \\ \frac{dz(t^+)}{dt} = h[x(t^+), y(t^+), z(t^+)] ; \end{cases}$$

iii)

si $\gamma(t^+) \neq \gamma(t^-)$, $t \in]\alpha, \beta[$, alors il existe une courbe dans

$\pi^{-1}(\pi(\gamma(t^+)))$ de $\gamma(t^-)$ à $\gamma(t^+)$ le long de laquelle V décroît monotonement .

Définition 2 : Une courbe $\gamma :]\alpha, \beta[$ (resp. $]\alpha, \beta[$; resp. $[\alpha, \beta]$) $\rightarrow \mathbf{R}^3$ est une solution de (1) si pour tout $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, $\gamma|_{] \alpha', \beta' [}$ est une solution de (1) et si γ est continue en α , (resp. β ; resp. α et β) ou s'il existe une courbe de $\gamma(\alpha)$ à $\gamma(\alpha^+)$ (resp. de $\gamma(\beta^-)$ à $\gamma(\beta)$; resp. $\gamma(\alpha)$ à $\gamma(\alpha^+)$ et de $\gamma(\beta^-)$ à $\gamma(\beta)$), comme au **iii**) .

Remarque : Les solutions ainsi définies ne sont pas continues , de plus il peut y avoir une ambiguïté pour les solutions qui passent par les PPS . Pour simplifier cet exposé , nous n'entrerons pas dans le détail de ce qu'il faut considérer , soit pour obtenir des solutions continues , soit pour utiliser les solutions discontinues . Pour lever toute ambiguïté , nous ne considérerons que les solutions qui , passant par un PPS , restent sur la même nappe de la variété invariante .

Remarque : Un système différentiel contraint dans $\mathbf{R}^3$ ne définit pas , en général , un système dynamique car en changeant t en $(-t)$, la plupart du temps il n'y a pas unicité des solutions passant par un point de $S_{V_{\min}}$. On dit qu'il définit un semi - système dynamique et qu'il engendre un semi - flot que nous noterons Φ .

3.2. Confineur Principal pour le système (2) .

Nous allons définir un ensemble compact C_0 de $S_{v,\min} \cup \Delta$ de la famille de systèmes (2) appelé **confineur principal** dans lequel nous pourrions donner plus de détails sur la forme des solutions de cette famille .

Soit la variété $\Delta = \{ \pi^{-1}(\pi(L)) \text{ pour tout } L \text{ appartenant aux plis de } S_v \}$.

Définition 3 : L'ensemble C_0 de $S_{v,\min} \cup \Delta$ est appelé confineur principal du système (1) qui vérifie les hypothèses 1 et 2 avec $\mathbf{B} = C_0$, si C_0 est compact , positivement invariant par le semi-flot Φ des solutions contraintes de (E_0) , attractant dans $S_{v,\min} \cup \Delta$ et tel que presque toutes les trajectoires contenues dans C_0 possèdent un **itinéraire** de longueur non nulle pour une dynamique symbolique donnée .

Nous nous intéressons plus spécialement à la famille de systèmes définis par les équations (2), (2a), (2b), (2c) pour les raisons développées au chapitre précédent . Cette famille que nous avons introduite dans [10] dérive d'une famille plus générale proposée par H. Oka et H. Kokubu [25] comme modèle de systèmes lents - rapides présentant des solutions qui " ressemblent " à l'attracteur de Lorenz . Cette famille provenant elle - même d'un modèle géométrique défini dans [26] .

Le système (2) est à considérer , bien sûr comme perturbation du système lent - rapide correspondant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y + \frac{3}{4}xz - x^3 ; \\ \dot{y} = \tau^2 Ax + \tau By + \frac{3\beta\tau}{4\alpha}xz ; \\ \dot{z} = \tau Cz - \frac{4\alpha\gamma\tau}{3a}x^2 ; \end{cases} \quad (14)$$

Les coefficients de (2) qui sont A, B, C, a, α , β , γ et τ vérifient les conditions (2a), (2b) et (2c) auxquelles on rajoute ensuite les conditions (17) .

La variété lente de (2) est la fronce $S_v : y = x^3 - \frac{3}{4}xz$.

Soient $(X, Z) \in \mathbf{R}^2$ les coordonnées qui paramétrisent S_v :

$$x = X , \quad y = X^3 - \frac{3}{4}XZ , \quad z = Z .$$

Comme $F(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} < 0$ sur $S_{v, \min}$, dans (X, Z) le champ de vecteurs réduit sur $S_{v, \min} = \{ Z \leq 4 X^2 \}$ prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = -X (Z - U - V X^2) ; \\ \dot{Z} = D (Z - 4 X^2) (Z - W X^2) ; \end{cases} \quad (15)$$

où :

$$U = \tau^2 A, \quad V = \tau \left(B - \frac{\alpha \gamma}{a} \right), \quad D = -\frac{3 C \tau}{A} \text{ et } W = -\frac{4 \alpha \gamma}{3 a C}. \quad (16)$$

De plus on suppose que :

$$U > 0, \quad 1 > W > V > 0 \quad \text{et} \quad D > 0. \quad (17)$$

Les éléments constitutifs du portrait de phase de (15) sont figurés à la **Figure 11** et leur interprétation par rapport aux solutions du système contraint à la **Figure 12**.

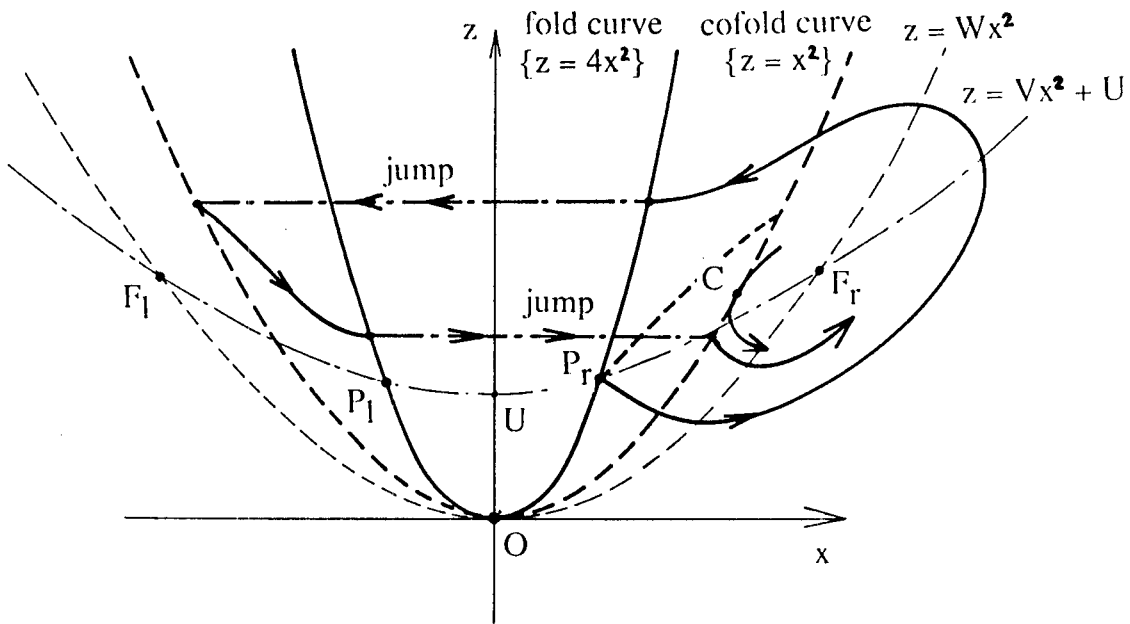


Figure 11. Eléments constitutifs du portrait de phase du système (15) (d'après [10]).

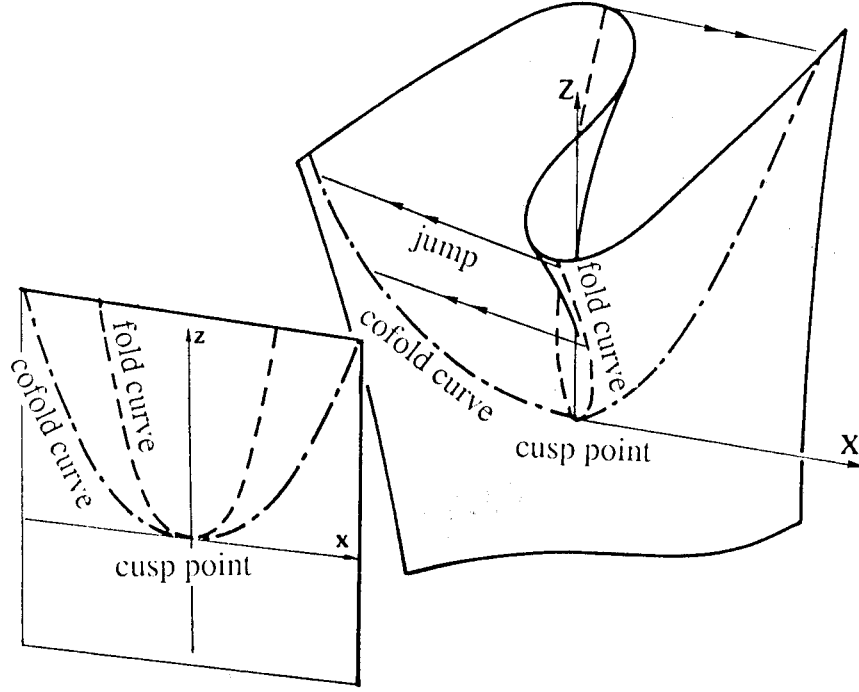


Figure 12. Représentation schématique du pli et du copli de la variété lente et leur projection dans R^3 (d'après [10]).

Pour simplifier l'étude du système (15), on pose : $\xi = X^2 \operatorname{sgn} X$, puis en changeant $t \rightarrow kt$, et $(\xi, Z) \rightarrow (\xi/k, Z/k)$, on remarque que le portrait de phase ne dépend pas qualitativement de U . On peut ainsi poser : $U = W - V$. Le système (15) devient alors:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -2\xi (Z - (W - V) - V\xi \operatorname{sgn} \xi) ; \\ \dot{Z} = D (Z - 4\xi \operatorname{sgn} \xi) (Z - W\xi \operatorname{sgn} \xi) ; \end{cases} \quad (18)$$

Il ne dépend plus que des trois paramètres D , V et W .

En dehors de l'origine, il y a quatre points singuliers P_r , P_l , F_r et F_l de (18) symétriques par rapport à l'axe des Z , (P_r et P_l sont les seuls PPS de (2) et de (14)) de coordonnées :

$$F_r = (1, W), F_l = (-1, W), P_r = (\xi_p, Z_p) = (\xi_p, 4\xi_p); P_l = (-\xi_p, Z_p)$$

$$\text{avec } \xi_p = \frac{V - W}{4 - V} \text{ dans le système de coordonnées } (\xi, Z) .$$

Il y a deux plis $\mathbf{P} : Z = 4 \xi$ et $\mathbf{P}' : Z = -4 \xi$, $\xi > 0$ et deux coplis $\mathbf{Q} : Z = \xi$ et $\mathbf{Q}' : Z = -\xi$, $\xi > 0$. Le saut de $\mathbf{P}$ à $\mathbf{Q}'$ et celui de $\mathbf{P}'$ à $\mathbf{Q}$ est déterminé par : $(\xi, Z) \rightarrow (-4 \xi, Z)$. Dans ces coordonnées, les matrices Jacobiennes J_{F_r} et J_{F_l} , aux points singuliers F_r et F_l sont données par :

$$J_{F_r} = \begin{pmatrix} 2V & -2 \\ 2EW & -2E \end{pmatrix} \quad J_{F_l} = \begin{pmatrix} 2V & 2 \\ -2EW & -2E \end{pmatrix} \quad (19)$$

avec :
$$E = \frac{D(4 - W)}{2} .$$

Ainsi :
$$\text{trace}(J_{F_r}) = \text{trace}(J_{F_l}) = 2(V - E)$$

et
$$\det(J_{F_r}) = \det(J_{F_l}) = 4(W - V) .$$

Si $V > E$, F_r et F_l sont instables. Les valeurs propres de J_{F_r} et J_{F_r} valent :

$$\lambda = V - E \pm \sqrt{(V+E)^2 - 4EW}, \quad \text{si} \quad (V+E)^2 \geq 4EW, \quad (20 \text{ a})$$

$$\lambda = V - E \pm i \sqrt{4EW - (V+E)^2}, \quad \text{si} \quad (V+E)^2 \leq 4EW. \quad (20 \text{ b})$$

Aux PPS, P_r et P_l , les matrices Jacobiennes sont données par :

$$J_{P_r} = \begin{pmatrix} 2V \xi_P & -2 \xi_P \\ -8E \xi_P & 2E \xi_P \end{pmatrix} \quad J_{P_l} = \begin{pmatrix} 2V \xi_P & 2 \xi_P \\ 8E \xi_P & 2E \xi_P \end{pmatrix} \quad (21)$$

et :
$$\det(J_{P_r}) = \det(J_{P_l}) = \xi_P^2 4E(V - 4) .$$

Comme nous ne considérons que la région définie par (17), P_r et P_l sont des cols et vérifient l'hypothèse 2.

Les valeurs propres $\lambda_{\pm} = \xi_P (V + E \pm \sqrt{(V - E)^2 + 16 E})$ correspondent aux vecteurs propres :

$$(1, V - \frac{\lambda_{\pm}}{2 \xi_P}) \text{ pour } J_{P_r} \quad \text{et} \quad (-1, V - \frac{\lambda_{\pm}}{2 \xi_P}) \text{ pour } J_{P_l}.$$

En dehors du point singulier dégénéré $O = (0, 0)$ il existe deux points co - pseudo - singuliers :

$$C_r = (\xi_c, Z_c) \text{ et } C_l = (-\xi_c, Z_c) \text{ avec } \xi_c = Z_c = \frac{W - V}{1 - V - \frac{3D(1 - W)}{2}}$$

si $2(1 - V) > 3D(1 - W)$, alors $Z_c > Z_p$ dans la région de paramètre définie par (17).

Les éléments caractéristiques du portrait de phase de (18) sont indiqués à la Figure 13 .

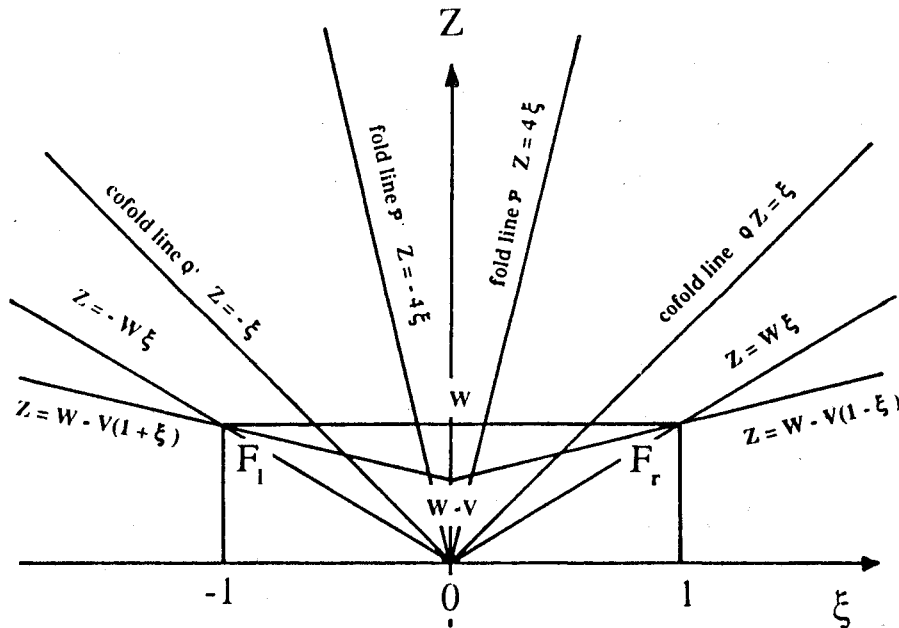


Figure 13. Eléments constitutifs du portrait de phase du système (15) (d'après [10]).

Nous pouvons alors démontrer l'existence d'un confineur principal pour le système (2) grâce aux propriétés de (18) . La remarque importante qu'il faut faire , est que la démonstration de cette existence nécessite **la vérification d'une inégalité** . Cette vérification n'est pas accessible par un calcul direct , car on ne sait pas intégrer explicitement le système (18) ; cependant on peut intégrer ce système numériquement et borner l'erreur d'intégration , puis se servir de la borne de l'erreur de l'intégration numérique pour vérifier l'inégalité .

Ainsi il possible de démontrer l'existence d'un confineur principal même au moyen d'un calcul numérique . Ce qui n'est pas possible pour un attracteur qui lui nécessite la vérification d'une égalité (point fixe d'application de Poincaré par exemple) . Bien entendu , le prix à payer dans ce cas est la **non - unicité** de ce confineur principal . Cependant comme nous ne recherchons que des caractéristiques sur la forme du signal , nous pouvons , comme nous le verrons par la suite nous accommoder de cette non - unicité .

Soit $\Pi (x , y , z)$ l'image réciproque $\pi^{-1} (\pi (x , y , z))$.

Nous ne considérons que les confineurs dont la frontière est composée d'un nombre fini d'arcs de courbes intégrales de plis et de coplis , d' arcs de $\Pi (L)$ où L appartient à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et des PPS et CO-PPS . Les variétés instables de P_T et P_I sont particulièrement importantes .

Proposition 1 [27] : Supposons $0 < V < W < 1$ et $D > 0$. Si la trajectoire de (18) qui part pour $t = -\infty$ de P_T et qui est contenue dans $S_{v,min}$, coupe pour la première fois $\mathcal{P}$ en P'_{r1} avec $Z_{P'_{r1}} > Z_P$, alors il existe un confineur principal C_0 du système (2) dans $S_{v,min} \cup \Delta$ dont la frontière est formée des arcs de trajectoire partant de P_T et P_I , des segments des deux plis et des segments de $\Pi (P_T)$, $\Pi (P'_{r1})$, $\Pi (P_I)$, $\Pi (P'_{l1})$, où P'_{l1} est le symétrique de P'_{r1} par rapport à l'axe des Z .

Ce confineur est indiqué à la **Figure 14** .

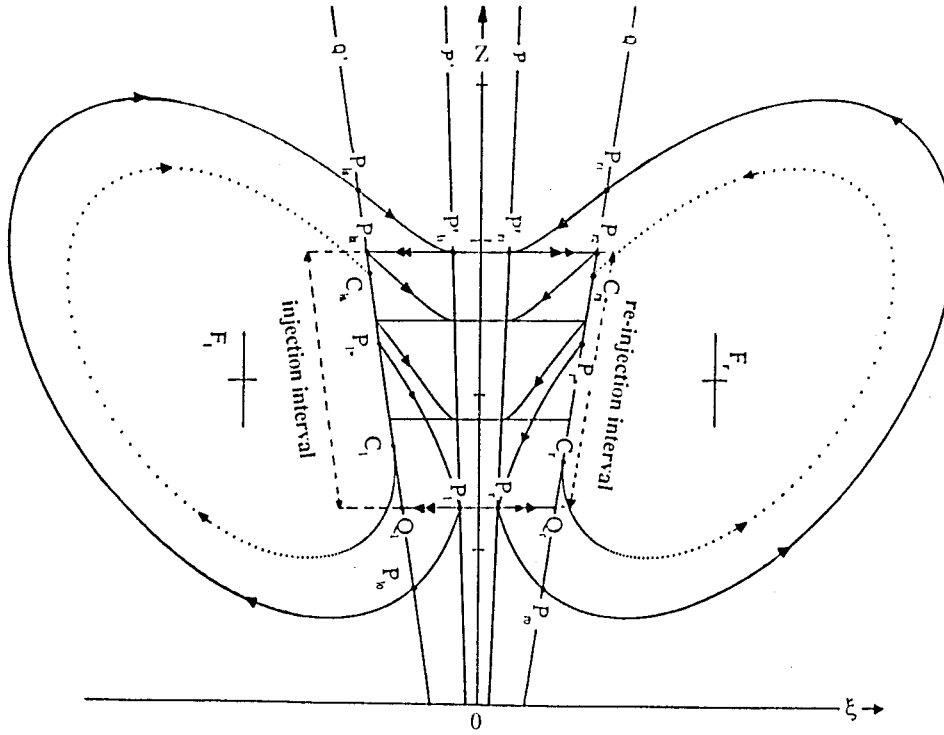


Figure 14. Confineur principal du système (2) pour $V = 0.09$ et $W = 0.4093$ (d'après [27]).

Preuve : A la figure 14, il est évident que la variété invariante instable de P_r dans un voisinage du PPS appartient au triangle $P_r O F_r$ dans lequel $\frac{d\xi}{dt} > 0$ et $\frac{dZ}{dt} < 0$, et coupe Q en P_{r0} puis en P_{r1} .

La variété stable part dans le secteur $\{4\xi > Z > W + V(\xi - 1)\}$ où $\frac{d\xi}{dt} < 0$ et $\frac{dZ}{dt} < 0$ et coupe pour la première fois Q en P_{r*} . Soit $Q_r = (Z_p, Z_p)$ et P_{l2} la projection de P_{r1} sur Q' . Les points $P_{l0}, P_{l*}, P_{l1}, Q_l, P'_{l1}, P_{r2}$ étant définis symétriquement. $Q_l P_{l2}$ est l'intervalle d'injection et $Q_r P_{r2}$ celui de réinjection.

La région C_0 bornée dans $S_{v,min} \cup \Delta$ par les arcs de variétés invariantes $P_{r*} P_r P_{r0}$, $P_{r1} P'_{r1}$ et $P_{l*} P_l P_{l0} P_{l1} P'_{l1}$, les intervalles d'injection et ceux de réinjection, les segments $P_{l2} P'_{r1}$ de $\Pi(P'_{r1})$, $P_r Q_l$ de $\Pi(P_r)$, $P_{r2} P'_{l1}$ de $\Pi(P'_{l1})$ et $P_l Q_r$ de $\Pi(P_l)$ est positivement invariante par le semi-flot Φ de (E_0) car $Q_l P_{l2}$ est inclus dans $P_{l0} P_{l1}$ et $Q_r P_{r2}$ dans $P_{r0} P_{r1}$.

Si $\mathbf{B} = C_0$ l'hypothèse 2 est vérifiée puisque l'origine n'appartient pas à C_0 .

Soit sur $\mathbf{Q}$ l'ordre: $(Z_1, Z_1) \leq (Z_2, Z_2)$ si et seulement si $Z_1 \leq Z_2$, (resp. sur $\mathbf{Q}'$, $(-Z_1, Z_1) \leq (-Z_2, Z_2)$ si et seulement si $Z_1 \leq Z_2$).

Dans la région $\{4\xi > Z > W + V(\xi - 1) \text{ et } Z > W\xi\}$, $\frac{d\xi}{dt} < 0$ et $\frac{dZ}{dt} < 0$, donc $P_{l_2} < P_{l_1}$ et $P_{r_2} < P_{r_1}$. En choisissant un voisinage assez petit de C_0 dans $S_{v,\min} \cup \Delta$ tel que toutes les trajectoires n'appartenant pas à C_0 aillent dans $P_{l_2}P_{l_1}$ ou $P_{r_2}P_{r_1}$, on prouve que C_0 est attractant.

Soit $\mathbf{D}$ la dynamique symbolique de lettres $\{0,1\}$ qui correspond à un codage égal à 0 (resp. 1) quand les trajectoires coupent $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Q}'$). Cette dynamique symbolique permet de terminer la démonstration en remarquant que toutes les trajectoires de C_0 (sauf les foyers F_r et F_l) passent alternativement par $Q_l P_{l_2}$ et $Q_r P_{r_2}$ (en tournant éventuellement autour des foyers) et ont ainsi un itinéraire de longueur infinie.

Nous avons ainsi donné une condition qui permet de démontrer l'existence d'un confineur principal. Cette condition (suffisante) étant $Z_{p'_{r1}} > Z_p$. On peut avant de poursuivre le découpage de ce confineur principal, réduire un peu sa taille en enlevant des régions tabous.

La région tabou $\mathbf{T}_r$ de C_0 qui appartient à la partie supérieure ($\xi > 0$) de $S_{v,\min}$ est un ouvert contenant F_r dont la frontière est constituée de la portion de trajectoire $C_r C_{r1}$ avec C_{r1} première intersection de la trajectoire passant par C_r avec $\mathbf{Q}$ et du segment $C_r C_{r1}$ de $\mathbf{Q}$. $\mathbf{T}_l$ est la région symétrique de $\mathbf{T}_r$ par rapport à l'axe des Z . Aucune trajectoire de condition initiale dans C_0 ne peut pénétrer dans $\mathbf{T}_r$.

Nous utiliserons donc le nouveau confineur principal : $C^*_0 = C_0 / \{\mathbf{T}_r \cup \mathbf{T}_l\}$.

3.3. Confineurs organisés .

C'est dans ce paragraphe que nous allons développer l'idée principale de cet exposé : nous allons définir des confineurs et des anti - confineurs qui vont partager le confineur principal en régions telles que les trajectoires qui appartiennent à ces régions ont une forme particulière . Il y a deux types de régions : les confineurs dont on ne peut pas s'échapper et les anti-confineurs dont on peut éventuellement s'échapper .

Une propriété de ces structures est importante :

Un confineur peut contenir plusieurs confineurs et plusieurs anti-confineurs , un anti-confineur peut contenir plusieurs confineurs et plusieurs anti-confineurs .

Cette propriété , nécessaire si l'on veut pouvoir analyser l'espace des phases avec plusieurs niveaux d'analyse possibles , est fondamentale et différentie les confineurs des attracteurs asymptotiques qui sont indécomposables .

Soit C^*_0 et $C_1, C_2 \dots C_s$, s ensembles compact de C^*_0 , positivement invariant par le semi-flot Φ et $A_1, A_2 \dots A_q$, q ouverts, négativement invariants (au sens des ensembles) pour Φ tels que $C_1, C_2 \dots C_s, A_1, A_2 \dots A_q$, forment une partition de C^*_0 .

Soit $\mathcal{H}$ la dynamique symbolique dont les lettres sont $\{ C_1, C_2 \dots C_s, A_1, A_2 \dots A_q \}$.

3.3.1. Schémas .

Définition 4 : Soit $X_{n+p} = (X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$, X_i , $1 \leq i \leq n$, étant soit une lettre soit un mot de $\mathcal{D}$, X_{n+j} , $0 \leq j \leq p$, une lettre ou un mot de $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{M}_{n+p} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{n+p} & \mathcal{O}_{n,p} \\ \mathcal{I}_{p,n} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (22)$$

avec $m_{i,j} \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n+p$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe au moins un j^* avec $m_{i,j^*} > 0$.

$\mathcal{S}_{n+p} = \{X_{n+p}, \mathcal{M}_{n+p}\}$ est appelé **schéma** de la dynamique symbolique $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$.

3.3.2. Confineurs , anti-confineurs .

Définition 5 : Supposons qu'il existe C_0 confineur principal du système (2) qui vérifie les hypothèses 1 et 2 . Un ensemble C_i de C^*_0 est un **confineur** s'il est compact, positivement invariant pour Φ et s'il existe un schéma $\mathcal{S}_{n+p}$ de $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ avec $\mathcal{O}_{n,p}$ identiquement nulle tel que les itinéraires de toutes les trajectoires appartenant à C_i peuvent être engendrés par ce schéma .

Définition 6 : Sous les mêmes conditions , A_i est un anti-confineur , s'il est ouvert , négativement invariant (au sens de la théorie des ensembles) pour Φ et s'il existe un schéma $\mathcal{S}_{n+p}$ avec $\mathcal{I}_{n,p}$ identiquement nulle telle que les itinéraires de toutes les trajectoires appartenant à A_i peuvent être engendrés par ce schéma .

Exemple :

Nous donnons un exemple de confineur du système (2) avec les valeurs $V = 0.09$, $W = 0.4$, $D = 0.039$, des paramètres qui grâce à la **proposition 1** assurent l'existence de C^*_0 .Le confineur principal C^*_0 peut-être décomposé en $\{ C_1 , C_2 , A_1 , A_2 \}$ dès que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$P_{l_2} > Q_{l+1} > C_{l_1} = D_{l_1} , \quad (23 \text{ a})$$

$$P_{r_3} > D_{r_2} > P_{r^*} , \quad (23 \text{ b})$$

$$Q_{l-1} > P_{l_4} > D_{l_3} > Q_l , \quad (23 \text{ c})$$

voir la **Figure 15** .

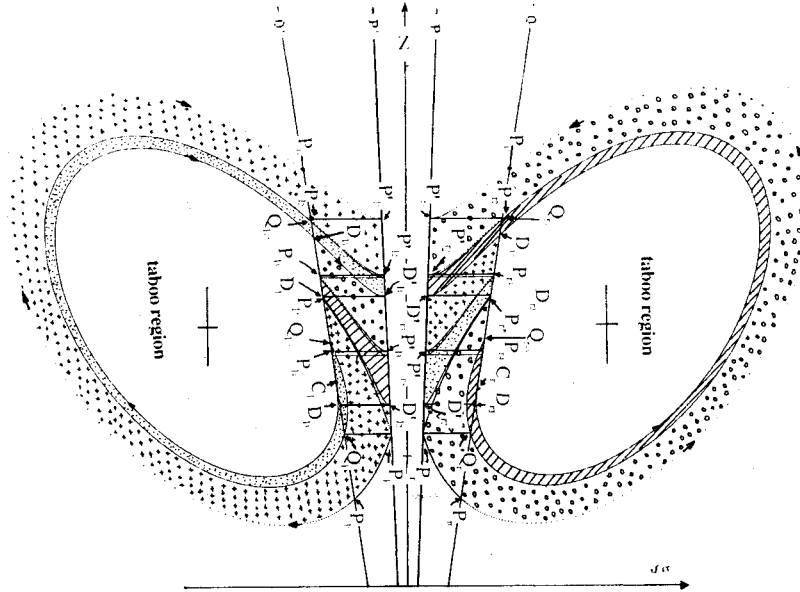


Figure 15. Exemple de confineurs et d'anti-confineurs du système (2) avec $V = 0.09$, $W = 0.4$, $D = 0.039$. C_1 = région pointillée , C_2 = région hachurée, A_1 = région avec des croix , A_2 = région avec des cercles (d'après [27]).

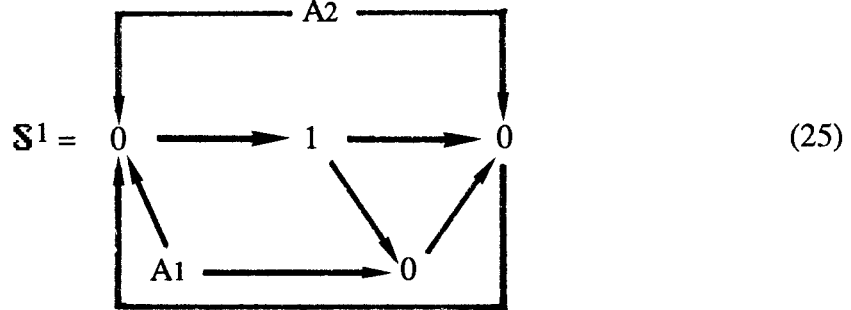
De même que le confineur principal les confineurs ont l'avantage sur les attracteurs de pouvoir être définis par des **inégalités** dont la vérification (éventuellement numérique lorsque l'on majore les sources d'erreurs) est plus facile que celle d'égalités .

Le schéma $\mathcal{S}^1 = \{ X_1 , \mathcal{M}_1 \}$ de C_1 peut s'écrire : $X_1 = \{ 0 , 1 , 0 , 0 ; A_1 , A_2 \}$, avec :

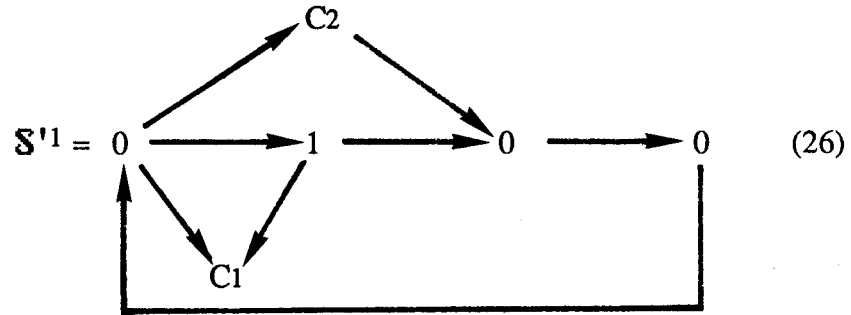
$$\mathcal{M}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & A_1 & A_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ A_1 \\ A_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (24)$$

Dans X_1 le premier " 0 " correspond à l'intervalle $P_{12} D_{11}$ de $\mathcal{Q}'$, le " 1 " à $P_{r3} D_{r2}$ le second " 0 " à $Q_{1-1} C_1$ et le troisième à $C_1 Q_1$. Les intervalles $P_{12} Q_{1+1}$ et $Q_{1-1} P_{14}$ sont les deux entrées de A_1 dans C_1 et les intervalles $P_{12} D_{11}$ et $D_{13} Q_1$ celles de A_2 dans C_1 .

$\mathcal{S}^1$ peut également se représenter ainsi :



Le schéma $\mathcal{S}'^1$ de l'anti-confineur A_1 , $\mathcal{S}'^1 = \{ X'_1, \mathcal{M}'_1 \}$, $X'_1 = \{ 0, 1, 0, 0; C_1, C_2 \}$, est :



Il reste à définir le lien entre les confineurs et les motifs . Nous avons utilisé comme dynamique symbolique $\mathcal{D}$ dont les lettres sont $\{ 0, 1 \}$. On peut définir d'autres dynamiques symboliques pour ces systèmes . En particulier , si on prend comme dynamique celle dont les lettres S et L , où S correspond à un tour autour d'un des deux points singuliers (foyers) de la variété lente et L un saut d'un pli au copli correspondant (voir [27] pour une définition précise) , le signal (s'il est lié à la composante x du système (2)) correspondant à toutes les trajectoires qui entrent dans les confineurs C_1 et C_2 est composé du seul motif $S^1 L^2$. Pour la dynamique symbolique $\mathcal{D}$ le motif est plus complexe à décrire , mais décrit le signal de façon plus fine .

Par le choix de la dynamique symbolique, il est possible de choisir une description plus ou moins fine du signal sous forme de motifs .

Nous donnons à la **Figure 16** un autre exemple de confineur et d'anti-confineur pour le système (2) (où nous avons confondu x et $-x$ pour des raisons de symétrie) . Le motif attaché au confineur est : $(S^1 L^2)^2 S^1 L^2$

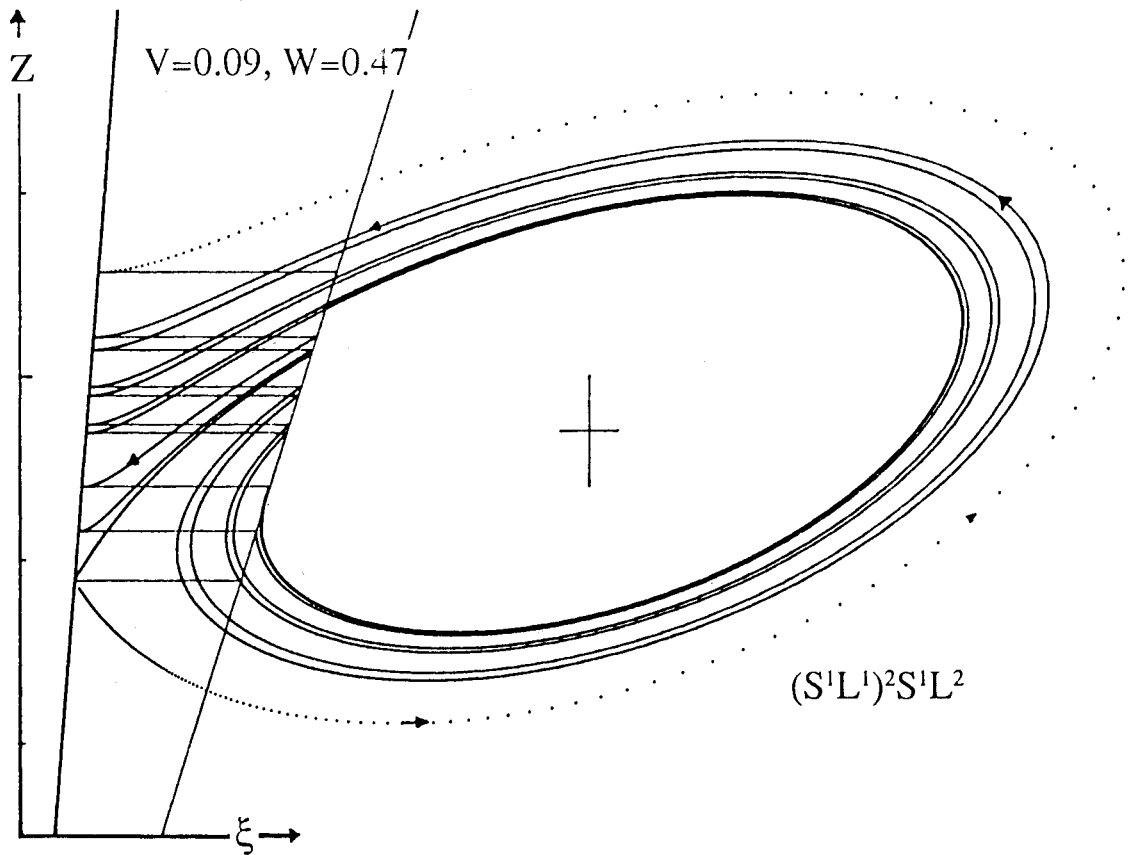


Figure 16. Exemple de confineurs et d'anti-confineurs du système (2) avec $V = 0.09$, $W = 0.47$, $D = 0.3966$; le motif est $(S^1 L^2)^2 S^1 L^2$ (d'après [27]) .

3.4. Niveau d'analyse .

L'analyse en confineurs organisés par des schémas permet de choisir le niveau d'analyse que l'on veut pour l'espace des phases d'un système différentiel , contrairement aux attracteurs pour lesquels il n'y a qu'un seul niveau d'analyse possible intrinsèque à la définition des attracteurs asymptotiques .

Ce choix possible est équivalent à celui utilisé par les expérimentateurs quand ils veulent décrire une expérience . (Par exemple lorsque l'on étudie le spectre de puissance d'un signal , on peut choisir la résolution de ce spectre et dans certains cas , des pics apparents à une certaine résolution se décomposent en plusieurs autres pics à une résolution supérieure) .

Nous allons , dans ce paragraphe , définir des **niveaux d'analyse** du confineur principal C^*_0 .

Soit C^*_0 un confineur principal du système (2) privé de ses régions tabou $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_l$ et soient $C_1, C_2, \dots, C_s$, s confineurs et $A_1, A_2, \dots, A_q$, q anti-confineurs pour la dynamique symbolique $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ où $\mathcal{D}$ a pour lettres $\{0,1\}$, et où les lettres de $\mathcal{H}$ sont $\{C_1, C_2, \dots, C_s, A_1, A_2, \dots, A_q\}$.

Définition 7: Soit $\mathcal{S}_i$ (resp. $\mathcal{S}'_i$) un schéma correspondant au confineur C_i (resp. anti-confineur A_i), le couple $(C_i, \mathcal{S}_i)$ (resp. $(A_i, \mathcal{S}'_i)$) est appelé confineur organisé (resp. anti-confineur organisé) et ,

$$\mathcal{L} = \{ (C_1, \mathcal{S}_1), (C_2, \mathcal{S}_2), \dots, (C_s, \mathcal{S}_s), (A_1, \mathcal{S}'_1), (A_2, \mathcal{S}'_2), \dots, (A_q, \mathcal{S}'_q) \}$$

est appelé **niveau d'analyse** du confineur principal C^*_0 .

Définition 8: Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) un schéma de la dynamique symbolique $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ et $\{k\} \mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ (resp. $\{k'\} \mathcal{D} \cup \mathcal{H}$) l'ensemble de tous les itinéraires engendrés par $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$). Nous dirons que :

$\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}$ si et seulement si $\{k'\} \supset \{k\}$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ si et seulement si $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}' \supset \mathcal{S}$.

Notons que si $\mathcal{S} = \{X, \mathcal{M}\}$ et $\mathcal{S}' = \{X', \mathcal{M}'\}$ il est possible d'obtenir $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ avec $\dim X \neq \dim X'$.

Le confineur C^*_0 du système (2) que nous avons défini précédemment, dépend bien entendu de plusieurs paramètres; soient $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$ deux valeurs de ces paramètres. Les lettres de $\mathcal{H}_\lambda$ sont $\{C_{1,\lambda}, C_{2,\lambda}, \dots, C_{s,\lambda}, A_{1,\lambda}, A_{2,\lambda}, \dots, A_{q,\lambda}\}$ et celles de $\mathcal{H}_\mu$ sont les mêmes paramétrées par μ .

Si $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_\mu$ ont le même nombre de confineurs et le même nombre d'anti-confineurs, on dira que $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}$.

Définition 9: Soit $\mathcal{L}_\lambda = \{(C_1, \mathcal{S}_1)_\lambda, (C_2, \mathcal{S}_2)_\lambda, \dots, (C_s, \mathcal{S}_s)_\lambda, (A_1, \mathcal{S}'_1)_\lambda, (A_2, \mathcal{S}'_2)_\lambda, \dots, (A_q, \mathcal{S}'_q)_\lambda\}$, un niveau d'analyse du confineur principal $C^*_{0,\lambda}$, on dira que $\mathcal{L}_\lambda \geq \mathcal{L}_\mu$ si et seulement si :

$$i) \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_\mu,$$

$$ii) \forall i, 1 \leq i \leq s, \mathcal{S}_{i,\mu} \supseteq \mathcal{S}_{i,\lambda} \text{ et } \forall j, 1 \leq j \leq q, \mathcal{S}'_{j,\mu} \supseteq \mathcal{S}'_{j,\lambda}.$$

Les deux définitions précédentes vont nous permettre d'étudier les bifurcations entre confineurs, dont une, la bifurcation arc-en-ciel, sera définie par une variation des niveaux d'analyse.

Actuellement, nous n'avons pas de propriété d'unicité pour les confineurs, mais on espère l'obtenir en quotientant l'espace des phases d'un système différentiel par une relation d'équivalence entre niveaux d'analyses, relation qui serait définie un peu comme la relation d'ordre précédente.

3.5. Bifurcations de confineurs .

3.5.1. Anti-bifurcation .

Nous appellerons **anti-bifurcation** , la perte par un anti-confineur de la séparatrice qui passe par le point pseudo-singulier . La **Figure 15** présente un exemple avec $V=0.09$ et $W=0.4$ où le confineur principal contient deux confineurs et deux anti-confineurs . L'existence de ces deux anti-confineurs est assurée par les inégalités (23 a) , (23 b) et (23 c) .

On peut montrer numériquement qu'en particulier $D_{r2} > P_{r*}$, pour $W=0.04$ mais que $D_{r2} < P_{r*}$ pour $W > 0.404$ et dans ce cas , (23 b) n'est plus vérifiée . La séparatrice issue de P_r ne peut plus appartenir à A_2 . Le confineur C_1 s'adjoint une nouvelle "route" dont l'ouverture correspond à la "bifurcation" du schéma de C_1 , par l'addition de nouveaux motifs possibles .

L'existence de C_1 nécessite à la place des inégalités (23 a) , (23 b) et (23 c) les inégalités suivantes :

$$P_{l2} > Q_{l+1} > D_{l4} > C_{l1} , \quad (27 \text{ a})$$

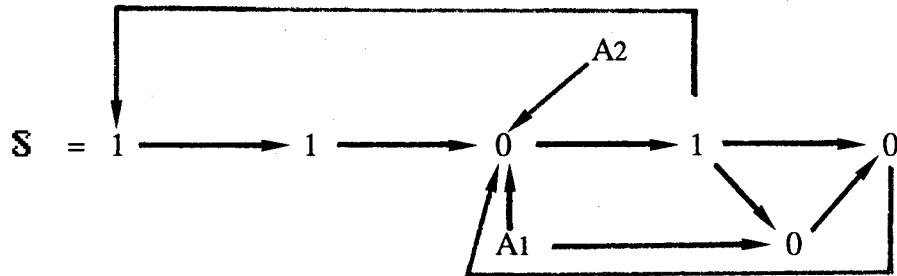
$$P_{r3} > P_{r*} > D_{r2} , \quad (27 \text{ b})$$

$$Q_{l-1} > P_{l4} > Q_l , \quad (27 \text{ c})$$

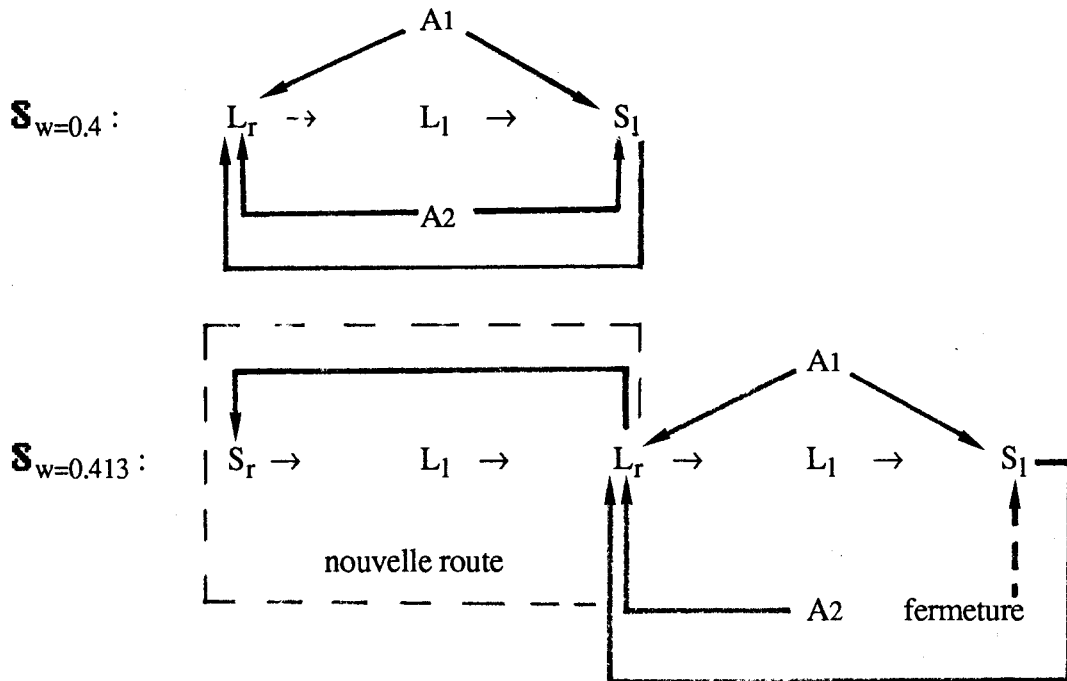
et celle de C_2 , les inégalités équivalentes portant sur les points symétriques .

Sans décrire complètement le niveau d'analyse correspondant à $\mathcal{H} = \{ C_1 , C_2 , A_1 , A_2 \}$ avec $\mathcal{D} = \{ 0 , 1 \}$, nous donnons le schéma : $\mathcal{S} = \{ X , \mathcal{M} \}$ du confineur C_1 , où $X = \{ 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 ; A_1 , A_2 \}$, le premier " 1 " correspond à $P_{r1} D_{r3}$, les " 0 " , " 1 " , " 0 " et " 0 " suivants sont les mêmes que ceux décrits au § 3.3.2., le dernier " 1 " correspond à l'intervalle $D_{r2*} P_{r0}$ qui est la première intersection des trajectoires passant par l'intervalle $D_{r2} P_{r*}$ avec le pli Q .

$$\begin{array}{c}
 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ A_1 \ A_2 \\
 \\
 \mathcal{M} = \begin{array}{c}
 1 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 A_1 \\
 A_2
 \end{array} \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (28)$$



En choisissant les dynamiques symboliques $\mathcal{D}' = \{L_l, L_r, S_l, S_r\}$ et $\mathcal{H} = \{C_1, C_2, A_1, A_2\}$ (voir [27]), l'anti-bifurcation correspond au changement de schéma :



La dynamique symbolique $\mathbf{D}'$ a pour lettres : S_l qui correspond à un tour autour du foyer F_l et S_r à un tour autour du foyer F_r ; L_l qui correspond au saut du pli $\mathbf{P}'$ au copli Q et L_r au saut inverse .

3.5.2. Bifurcation arc-en-ciel .

Elle correspond à la disparition des anti-confineurs et à la réunion de deux confineurs en un seul . Ce phénomène est dû à la transformation d'une entrée d'un confineur en sortie. L'inégalité $D_{r4} > D_{r1}$ qui est vérifiée pour $V = 0.09$ et $W = 0.413$ devient $D_{r1} > D_{r4}$ pour $W = 0.418$. L'entrée $D_{r4} D_{r1}$ du confineur C_2 avec des solutions provenant de l'anti-confineur A_1 devient la sortie $D_{r1} D_{r4}$. Comme par définition un confineur n'a jamais de sortie, il est nécessaire de trouver une nouvelle frontière au confineur C_2 . Ceci est obtenu en réunissant les confineurs C_1 et C_2 et en supprimant les anti-confineurs A_1 et A_2 .

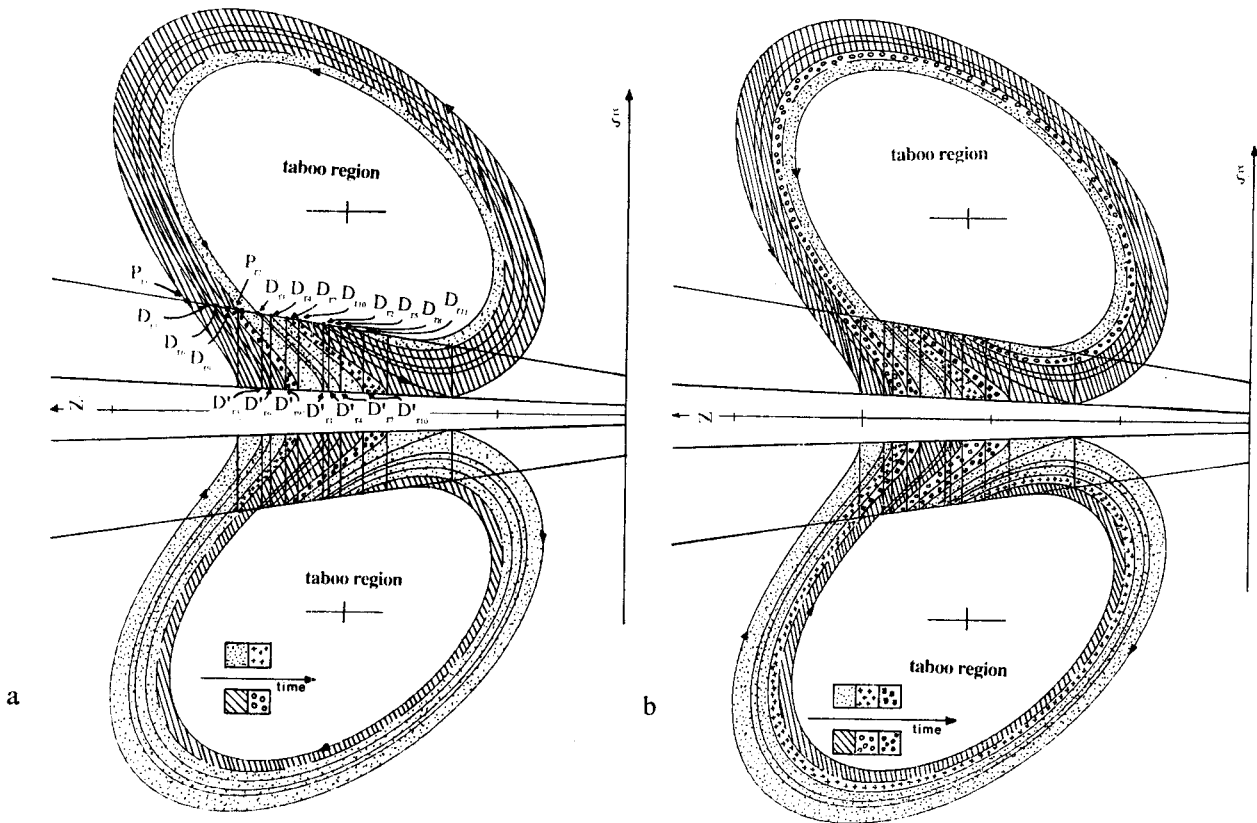


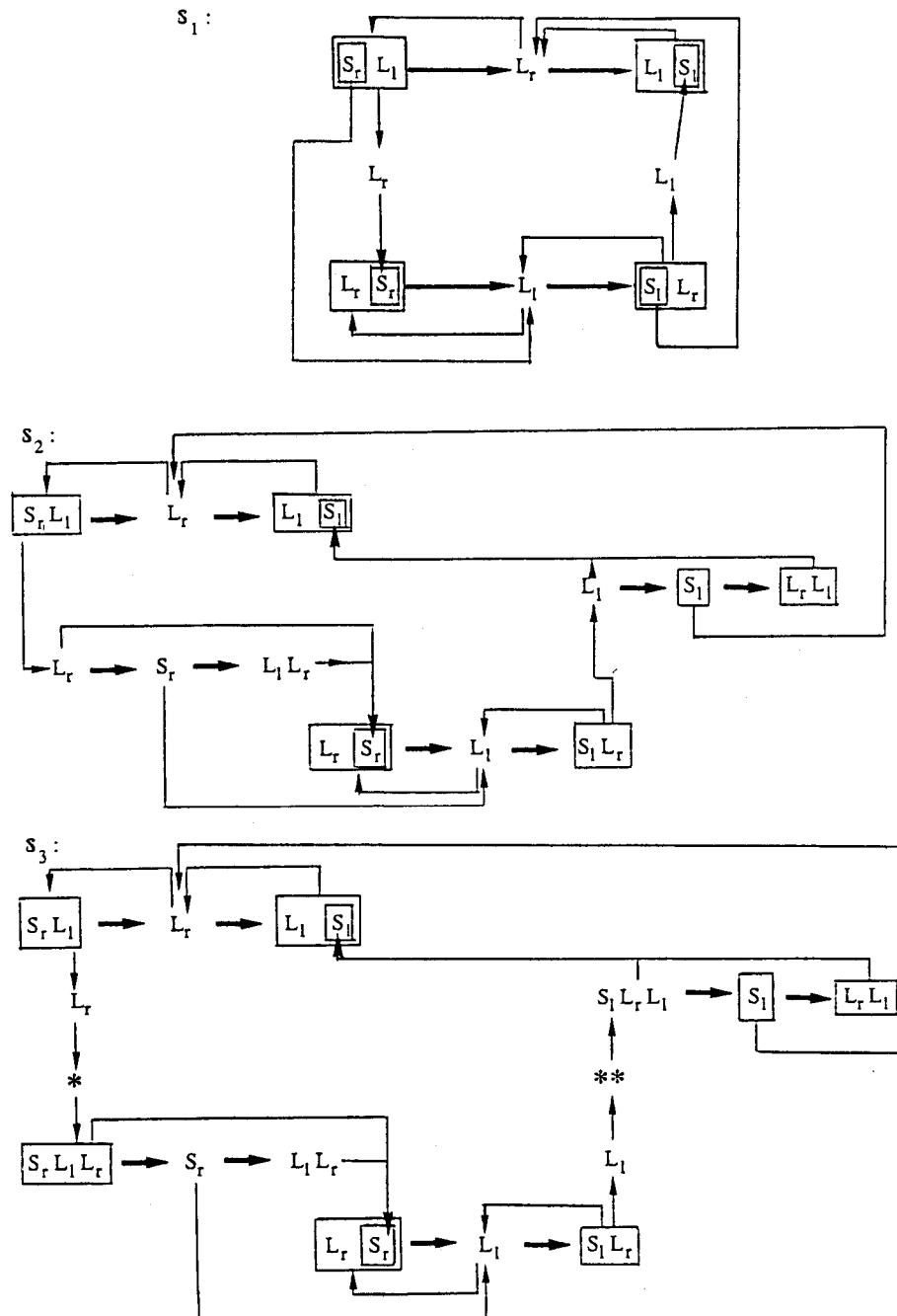
Figure 17. Exemple de bifurcation arc-en-ciel du système (2) avec $V = 0.09$, $W = 0.418$, $D = 0.3908$. a) premier niveau d'analyse , b) second niveau (d'après [27]) .

Il reste un unique confineur C^*_0 que l'on peut analyser avec différents niveaux d'analyse comme suit : les intersections suivantes de la trajectoire qui contient $C_r D_{r1} D_{r4}$ avec le copli sont notées $D_{r5} \dots D_{r11}$ (Q) (**Figure 17**) . pour $W = 0.418$ la plus petite valeur de i telle que $D_{r_i} < Q_{r-1}$ est $i = 11$. Il est alors possible de définir trois niveaux d'analyse ordonnés :

$$L^1_{0.418} = \{ (C^*_0, S_1) \} < L^2_{0.418} = \{ (C^*_0, S_2) \} < L^3_{0.418} = \{ (C^*_0, S_3) \}$$

où :

$\mathcal{D}' = \{ L_g, L_d, S_g, S_d \}$, $\mathcal{H} = \{ C^*_0 \}$, avec les schémas suivants :



L'organisation de C^*_0 correspondant au schéma $\mathcal{S}_2$ est indiquée à la Figure 17 dans laquelle les trajectoires de la région hachurée s'injectent dans la région avec des petits cercles et les trajectoires de cette région s'injectent dans la région avec cercles noirs ; symétriquement on a l'ordre : région pointillée puis région avec des croix puis région avec des carrés noirs .

On peut démontrer que : $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3$.

Pour $V = 0.09$ et $W = 0.430$ il n'est possible de définir qu'un seul niveau d'analyse : $\mathcal{L}^1_{0.430} = \{ (C^*_0, \mathcal{S}_1) \}$. Comme on utilise le même schéma ($\mathcal{S}_{1(0.418)} = \mathcal{S}_{1(0.430)}$) et la même dynamique additionnelle $\mathcal{H}_{0.418} = \mathcal{H}_{0.430} = \{ C^*_0 \}$, même si $C^*_{0(0.418)} \neq C^*_{0(0.430)}$ au sens des ensembles, on a :

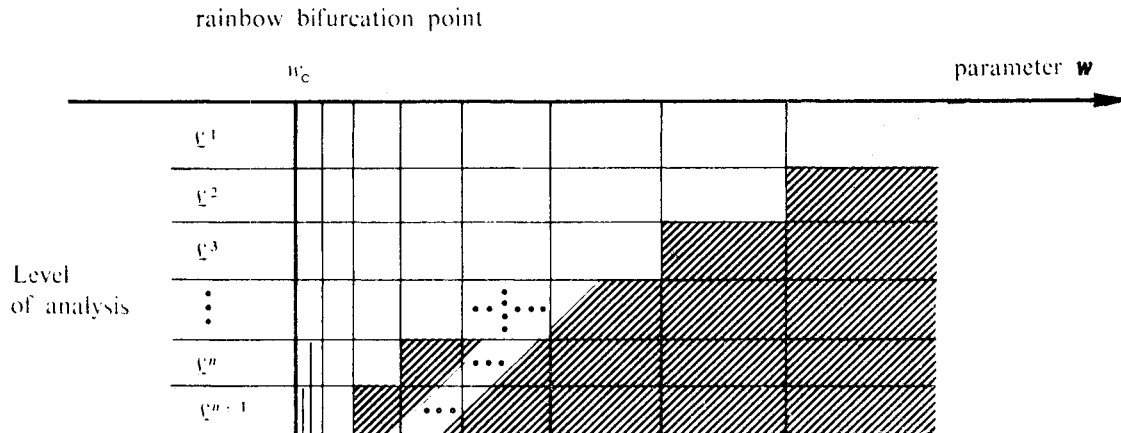
$$\mathcal{L}^1_{0.418} = \{ (C^*_0, \mathcal{S}_1) \} = \mathcal{L}^1_{0.430} .$$

Quand W converge en décroissant vers le point de bifurcation arc-en-ciel $W_0 = 0.414$ la première valeur de i qui vérifie $D_{r_i} < Q_{r-1}$ tend vers l'infini . Il est alors possible de définir $\mathcal{S}_n$ avec $n = \frac{i-2}{3}$ en ajoutant à $\mathcal{S}_3 : (S_r L_l L_r)^{n-3}$ à la place de * et $(S_l L_r L_l)^{n-3}$ à la place de * * .

On peut alors définir n niveaux d'analyse ordonnés :

$$\mathcal{L}^1 = \{ (C^*_0, \mathcal{S}_1) \} < \mathcal{L}^2 = \{ (C^*_0, \mathcal{S}_2) \} \dots < \mathcal{L}^n = \{ (C^*_0, \mathcal{S}_n) \} . \quad (29)$$

Ceci conduit à la caractéristique principale de la bifurcation arc-en-ciel , qui est l'existence d'un escalier de niveaux :



On a donné le nom de bifurcation arc-en-ciel en raison de la figure 17 qui pourrait être colorée avec de vraies couleurs .

3.6. Diagramme de bifurcation de confineurs .

Un diagramme de bifurcation de confineurs obtenu numériquement pour le système (2) est présenté à la **Figure 18** .

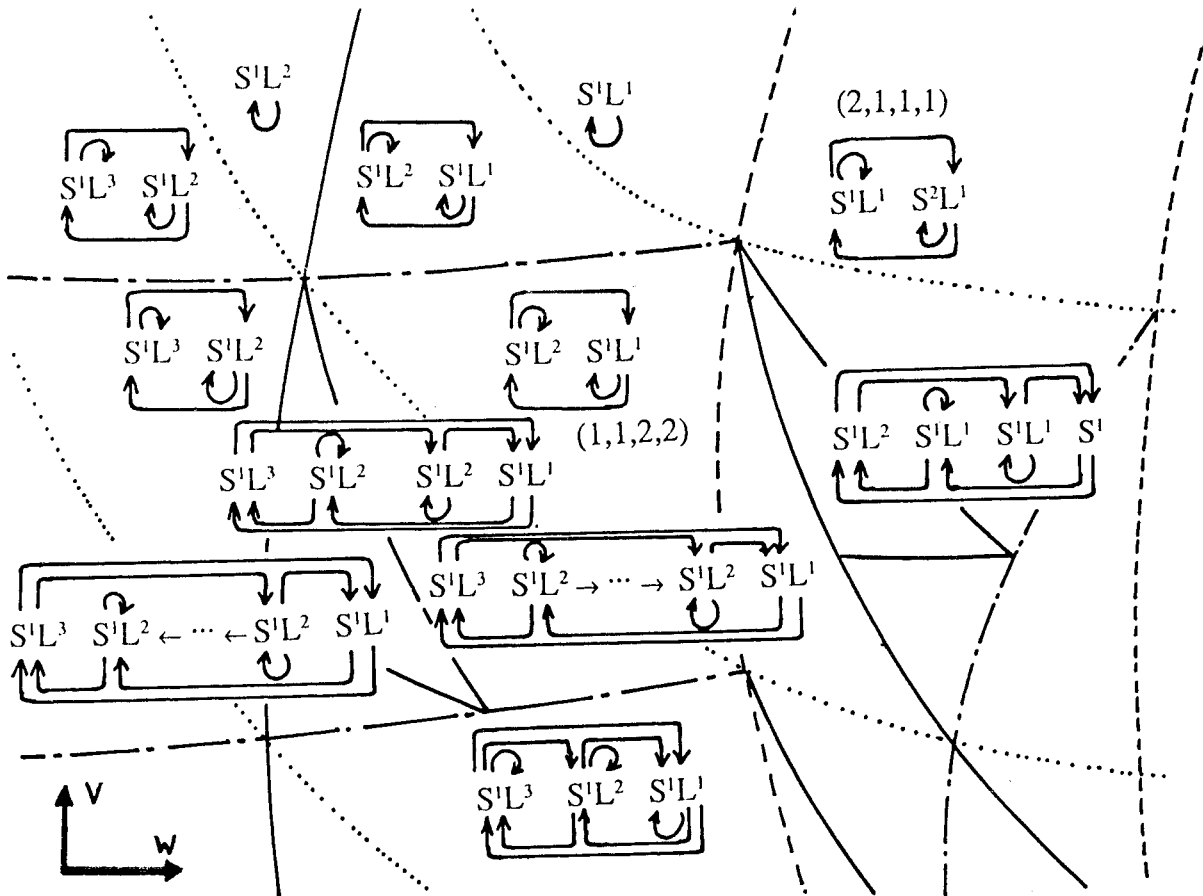


Figure 18. Diagramme de bifurcation de schémas de confineurs du système (2) avec $0.04 \leq V \leq 0.20$ et $0.35 \leq W \leq 0.7$ (d'après [27]) .

Pour revenir à la réaction de Belousov - Zhabotinskii, on peut comparer ce diagramme de bifurcation avec celui obtenu expérimentalement [20] dans l'espace des paramètres de bifurcation (temps de résidence , concentration en acide malonique) (**Figure 19**) . Sans chercher ici une correspondance non justifiée , on peut cependant penser que le développement des recherches sur les confineurs permettra d'expliquer de façon satisfaisante de tels diagrammes expérimentaux .

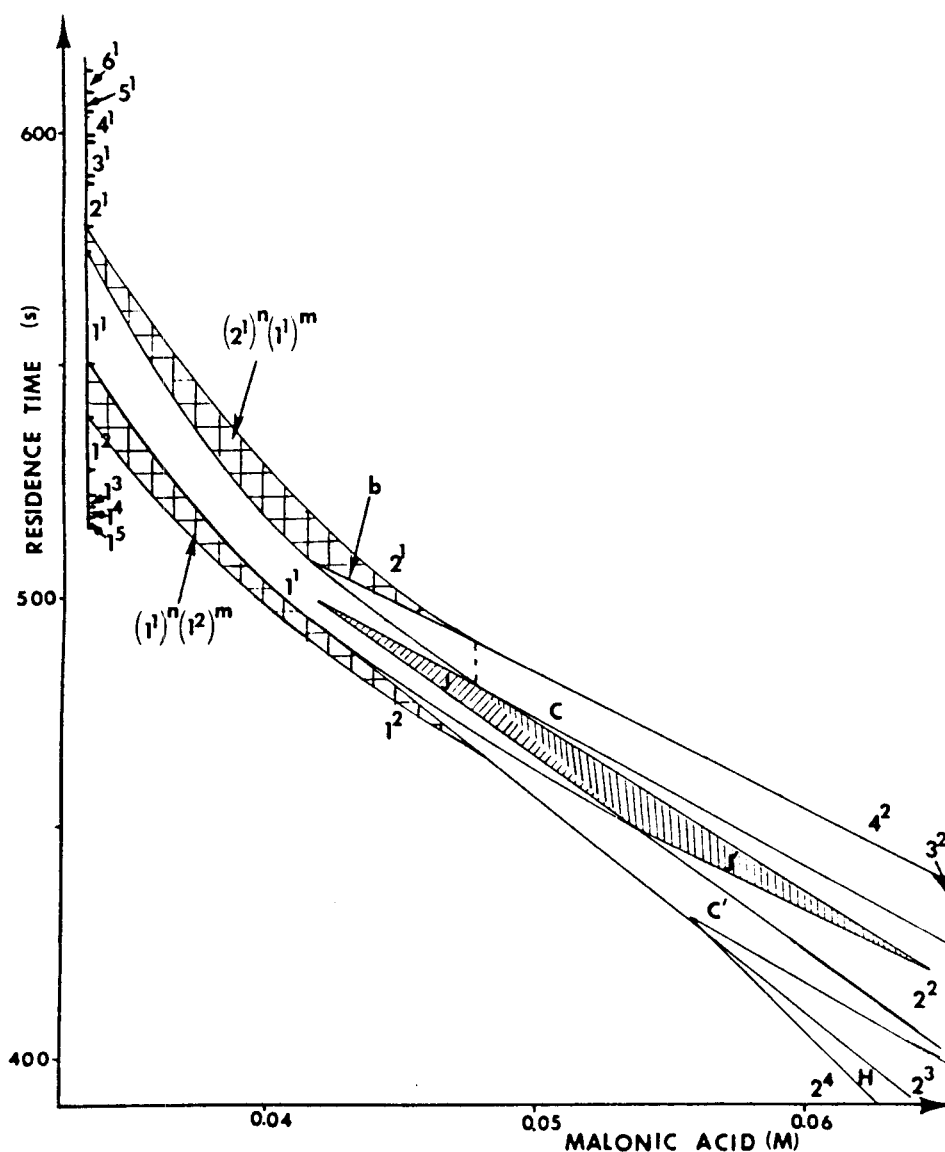


Figure 19. Diagramme de bifurcation pour la réaction de Bélousov - Zhabotinskii .La région hachurée supérieure contient des motifs de la forme : $(11)^m (21)^n$; la région hachurée inférieure les motifs : $(11)^m (12)^n$. Toutes les transitions (comme $1^2 \rightarrow 1^1 \rightarrow 2^1$ transformée en $2^4 \rightarrow 2^2 \rightarrow 4^2$ sur le côté droit du diagramme) ne sont pas indiquées (d'après [20]) .

4. DOUBLE SCROLL ET AUTRES MODELES .

4.1. Motifs pour le Double Scroll .

4.1.1. Formes Normales .

Ainsi que nous l'avons indiqué au § 2.4. , il est plus difficile d'obtenir des confineurs pour le Double Scroll que pour le système (2) , car les demi-applications de Poincaré sont ici de dimension 2 au lieu de 1 , ce qui nécessite la recherche de courbes frontières pour prouver l'existence d'un confineur principal , au lieu de points frontières .

D'autre part , la définition de la dynamique symbolique n'y est pas aussi aisée que pour les systèmes contraints .

Soit donc le système (6) - (7) définissant le Double Scroll . Ce système fait partie d'une famille plus générale , dont les paramètres sont :

$$\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\omega}_0, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\omega}_1, \tilde{\gamma}_1\} \quad (30)$$

et qui est obtenue par déploiement [3] grâce à trois changements de variables linéaires que nous allons expliciter en partie **pour indiquer comment interviennent ces six paramètres** .

Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{m_1}{m_0} \Psi_1 \begin{pmatrix} X - 1 + \frac{m_0}{m_1} \\ Y \\ Z + 1 - \frac{m_0}{m_1} \end{pmatrix} \quad (31)$$

où :

$$\Psi_1 = \frac{1}{\tilde{\omega}_1 [2\beta + \tilde{\gamma}_1^2 + 2\tilde{\sigma}_1(\beta - \tilde{\gamma}_1)]} \begin{pmatrix} \psi_{11}^1 & -\alpha \tilde{\omega}_1 \tilde{\gamma}_1 & -\alpha \tilde{\omega}_1 \\ \psi_{21}^1 & \psi_{22}^1 & \alpha (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\gamma}_1) \\ \psi_{31}^1 & \alpha \tilde{\omega}_1 \tilde{\gamma}_1 & \alpha \tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

avec :

$$\psi_{11}^1 = \tilde{\omega}_1(1 + 2 \tilde{\sigma}_1)(\beta - \tilde{\gamma}_1) \quad (32a)$$

$$\psi_{21}^1 = (1 + 2 \tilde{\sigma}_1)[\beta(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\gamma}_1) + \tilde{\sigma}_1\tilde{\gamma}_1] \quad (32b)$$

$$\psi_{22}^1 = \alpha[2\beta(1+\tilde{\sigma}_1) - \tilde{\sigma}_1\tilde{\gamma}_1] \quad (32c)$$

$$\psi_{31}^1 = \tilde{\omega}_1[\tilde{\gamma}_1(1 + \tilde{\gamma}_1) + \beta] \quad (32d)$$

et :

$$\beta = \frac{\tilde{\gamma}_1(\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\omega}_1^2)}{1 + 2\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\gamma}_1} \quad (32e)$$

$$\alpha = \beta - \tilde{\sigma}_1^2 - \tilde{\omega}_1^2 - (1 + 2\tilde{\sigma}_1)(\tilde{\gamma}_1 + 1) \quad (32f)$$

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{1 + 2\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\gamma}_1}{1 + 2\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\gamma}_0} . \quad (32g)$$

Ce changement de variable transforme le repère (X, Y, Z) dans lequel l'équation (6) est donnée , en le repère (x, y, z) , dans lequel la forme normale de l'équation du Double Scroll dans le domaine $D_1 = \{(x,y,z) ; x + z \leq 1\}$, image par (31) du domaine $\overline{D}_1 = \{(X,Y,Z) ; X \geq 1\}$ est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{\sigma}_1 x - y , \\ \dot{y} = x + \tilde{\sigma}_1 y , \\ \dot{z} = \tilde{\gamma}_1 z , \end{cases} \quad (33)$$

De la même façon , soit le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Psi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (34)$$

où Ψ_0 se déduit de Ψ_1 en remplaçant partout l'indice 1 par l'indice 0 .

Dans le domaine $D_0 = \{ (x', y', z') ; -1 \leq x' + z' \leq 1 \}$ qui est l'image par (34) du domaine $\overline{D}_0 = \{ (X, Y, Z) ; |X| \leq 1 \}$, la forme normale du Double Scroll est :

$$\begin{cases} \dot{x}' = \tilde{\sigma}_0 x' - y' , \\ \dot{y}' = x' + \tilde{\sigma}_0 y' , \\ \dot{z}' = \tilde{\gamma}_0 z' . \end{cases} \quad (35)$$

Ces deux premiers changements de variables sont représentés à la **Figure 20** .

Par symétrie on peut également définir celui qui donne la forme normale du Double Scroll pour le domaine $\overline{D}_{-1} = \{ (X, Y, Z) ; X \leq -1 \}$.

On peut réduire à cinq , le nombre de paramètres utilisés , si l'on considère que deux systèmes d'équations différentielles dans $\mathbf{R}^3$ qui possèdent les mêmes trajectoires , sans tenir compte de la vitesse à laquelle sont parcourues ces trajectoires , sont équivalents .

On pose alors :

$$\sigma_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\omega}_0} , \quad \gamma_0 = \frac{\tilde{\gamma}_0}{\tilde{\omega}_0} , \quad \sigma_1 = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\omega}_1} , \quad \gamma_1 = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\omega}_1} , \quad k = \frac{-\tilde{\gamma}_0}{\tilde{\gamma}_1} \quad (36)$$

et l'on considère les systèmes (33) (resp. (35)) avec σ_1, γ_1 (resp. σ_0, γ_0) à la place de $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\gamma}_1$ (resp. $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\gamma}_0$) que nous notons (33') (resp. (35')) .

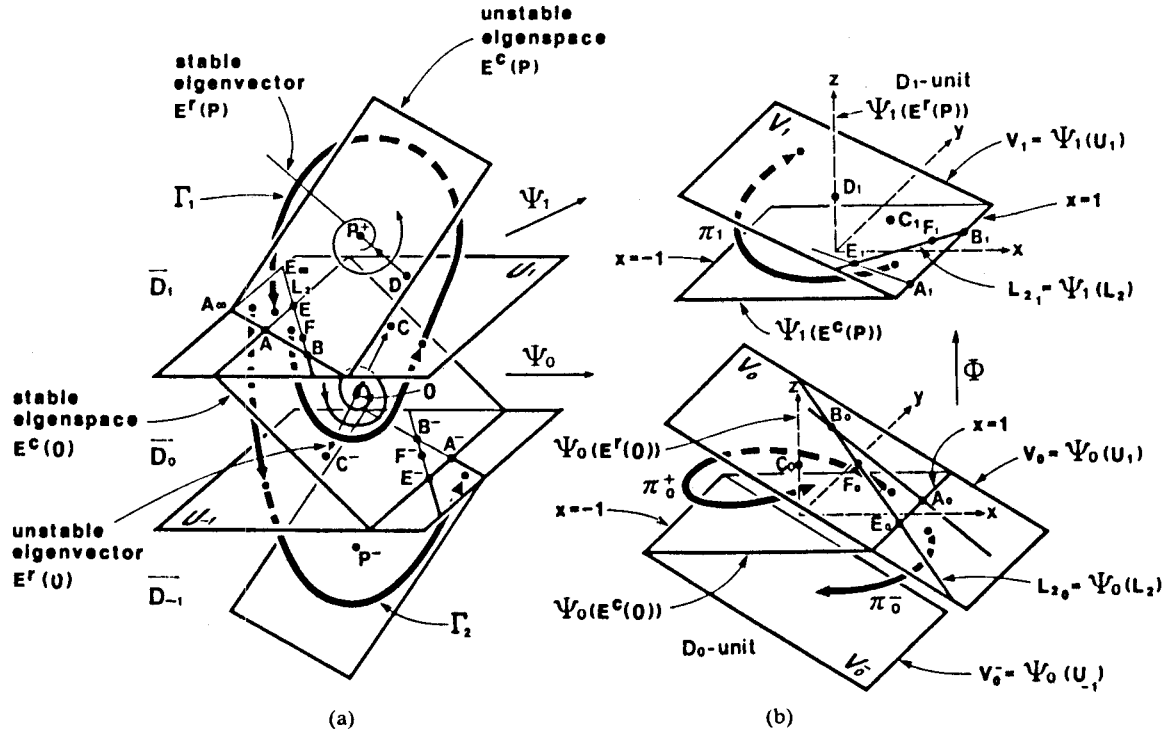


Figure 20. Structure géométrique et trajectoires typiques du Double Scroll dans le système initial de coordonnées (X, Y, Z) (a) et dans les systèmes de coordonnées des formes normales (b) (x, y, z) en haut et (x', y', z') en bas (d'après [3]) .

Remarquons que les paramètres (36) sont ceux utilisés la Figure 10 où l'on montre des trajectoires projetées dans le plan (X, Y) .

4.1.2. Demi - applications de Poincaré .

Pour décrire un système dynamique comme celui-ci , il est équivalent de connaître les trajectoires dans une partie attractante de l'espace des phases ou une application de Poincaré correspondante . Comme nous ne nous intéresserons par la suite , qu'à des valeurs des paramètres pour lesquelles l'attracteur du Double Scroll est séparé en deux composantes connexes symétriques par rapport à l'origine , comme à la Figure 10 ; nous utiliserons la propriété démontrée dans [3] , que ces trajectoires devront toujours traverser le triangle AEB qui est attractant pour le flot (du moins pour les trajectoires qui restent dans les régions $\bar{D}_0$ et $\bar{D}_1$) . Pour les trajectoires qui restent dans les régions $\bar{D}_0$ et $\bar{D}_{-1}$, comme celles de la Figure 10, il faut considérer le triangle symétrique $A^- E^- B^-$.

Les droites AB et AE de ce triangle sont définies de façon évidente sur la figure , la droite EB est la droite où le champ de vecteurs dans $\overline{D}_1$ est parallèle au plan $U_1 = \{ (X,Y,Z) ; X = -1 \}$. Au point F de cette droite , le champ est parallèle à celle - ci .

Ces deux triangles ne sont pas les seules régions attractantes ou globalement invariantes par le circuit électronique de L.O.Chua et T. Matsumoto (**Figure 6**), car si l'on considère un système différentiel comportant les cinq morceaux de la courbe voltage-intensité du résistor de ce circuit , au lieu de seulement trois morceaux comme dans (6) - (7) , il existe en sus de l'attracteur Double Scroll ou des deux attracteurs de type " spiral " , un cycle limite attractant , contenant un cycle limite de type hyperbolique qui lui-même entoure le Double Scroll [28] .

Dans tout ce qui suit , nous ne nous intéresserons plus qu'à l'application de Poincaré $\pi = \pi_1 \circ \pi_0$ qui va du triangle AEB = $\mathcal{T}$ dans lui - même . Cette application n'est pas facile à utiliser et il est plus simple de la décomposer en deux demi-applications π_0 et π_1 .

Soit π_0 , qui à tout point M de $\mathcal{T}$ associe le point $\pi_0(M)$ de premier retour de la trajectoire de (35') (la trajectoire étant reportée dans le repère (X , Y , Z)) ayant M comme condition initiale , sur le plan U_1 .

Cette trajectoire entre M et $\pi_0(M)$ reste toute entière dans $\overline{D}_0$, elle est parcourue en un temps que nous appellerons $\tau(M)$ pour le différencier du temps $\theta(M)$ où la trajectoire de (33') (la trajectoire étant reportée dans le repère (X , Y , Z)) va rester dans $\overline{D}_1$. On suppose que $\pi(M) \neq 0$ sauf sur le segment FB où $\pi(M)$ est toujours nul .

Soit $\mathcal{E}$ la portion du plan U_1 du côté du point D , limitée par les droites EB et AE (incluses dans cette portion) à laquelle on a ôté le point D .

Soit π_1 , qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le point $\pi_1(M)$ de premier retour de la trajectoire de (33') (la trajectoire étant reportée dans le repère (X , Y , Z)) ayant M comme condition initiale , sur le plan U_1 .

Cette trajectoire entre M et $\pi_1(M)$ reste toute entière dans $\overline{D}_1$, elle est parcourue en un temps $\theta(M)$. On suppose que $\theta(M) \neq 0$ sauf sur le segment EF où $\theta(M)$ est toujours nul . Suivant les valeurs des paramètres, il existe de nombreux arcs de courbes où la demi-application π_1 est discontinue .

Suivant [3] et [29] , nous appellerons $\mathbf{S} = \pi_0(\mathbf{T})$, car cette image a une forme rappelant celle d'un serpent enroulé , et $\mathbf{A}$ (pour anti-serpent) , la partie de l'image réciproque de $\mathbf{T}$ par π_1 qui est incluse dans $\mathbf{E}$.

Les solutions de (33') et (35') de condition initiale (x_0, y_0, z_0) sont connues explicitement , puisque les équations sont linéaires :

$$\begin{cases} x(t) = e^{\sigma_i t} (x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)) \\ y(t) = e^{\sigma_i t} (x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) \\ z(t) = z_0 e^{\gamma_i t}, \quad i = 0, 1 ; \end{cases} \quad (37)$$

(les variables sont x', y', z' si $i = 0$) cependant π_0 et π_1 ne sont pas connues explicitement car étant donné $M(x_0, y_0)$, il faut chercher les plus petits $t > 0$ solutions des équations transcendantes :

$$e^{\sigma_i t} (x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t)) + z_0 e^{\gamma_i t} = 1 \quad (38)$$

pour déterminer $\pi_0(M)$ ou $\pi_1(M)$.

Ainsi , en général on ne sait pas trouver les temps $\tau(M)$ (resp. $\theta(M)$) au bout desquels un point une trajectoire partant d'un point M du plan U_1 et restant dans $\overline{D}_0$ (resp. $\overline{D}_1$) recoupe pour la première fois ce plan , ni trouver l'endroit où elle le recoupe . Par contre on peut résoudre le **problème inverse** : étant donné un temps τ (resp. θ) quels sont les ensembles de points de U_1 qui sont envoyés sur ce plan par π_0 (resp. π_1) au bout de ce temps ?

4.1.3. Lignes équitemporelles .

La solution de ce problème inverse conduit aux lignes équitemporelles :

Proposition 2 [29] : Le temps $t > 0$ étant fixé , avec $t \neq k\pi$, soient $a_{it} = \frac{e^{(\sigma_i - \gamma_i)t} - \cos(t)}{\sin(t)}$ et $b_{it} = \frac{e^{\sigma_i t} (1 - e^{-\gamma_i t})}{\sin(t)}$. L'image par la demi-application de Poincaré π_i du plus grand segment inclus dans le triangle $\mathbf{T}$ si $i = 0$ (ou dans l'ensemble $\mathbf{A}$ si $i = 1$) , de la droite dont l'équation dans le repère (x', y', z') si $i = 0$ (ou (x, y, z) si $i = 1$) s'écrit $y = a_{i(-t)} x + b_{i(-t)}$, est le plus grand segment de la droite dont l'équation dans le repère (x', y', z') si $i = 0$ (ou (x, y, z) si $i = 1$) s'écrit $y = a_{it} x + b_{it}$ qui est inclus dans $\mathbf{S}$ si $i = 0$ (ou dans $\mathbf{T}$ si $i = 1$) .

Comme on doit considérer π_0 et π_1 pour diverses valeurs des cinq paramètres (36), il semble plus simple de ramener le triangle $\mathcal{T}$ du plan U_1 à un triangle fixe dans U_1 repéré par un système de coordonnées (ξ, η) dépendant de ces paramètres que nous appellerons U_1^* .

Nous choisissons le triangle de coordonnées $(0,0) = \Phi_0(A_0) = \Phi_1(A_1)$; $(1,0) = \Phi_0(B_0) = \Phi_1(B_1)$; $(0,1) = \Phi_0(E_0) = \Phi_1(E_1)$; avec Φ_0 (resp. Φ_1) la transformation affine de V_0 (resp. V_1) dans U_1^* ; Φ_0 et Φ_1 étant connues explicitement .

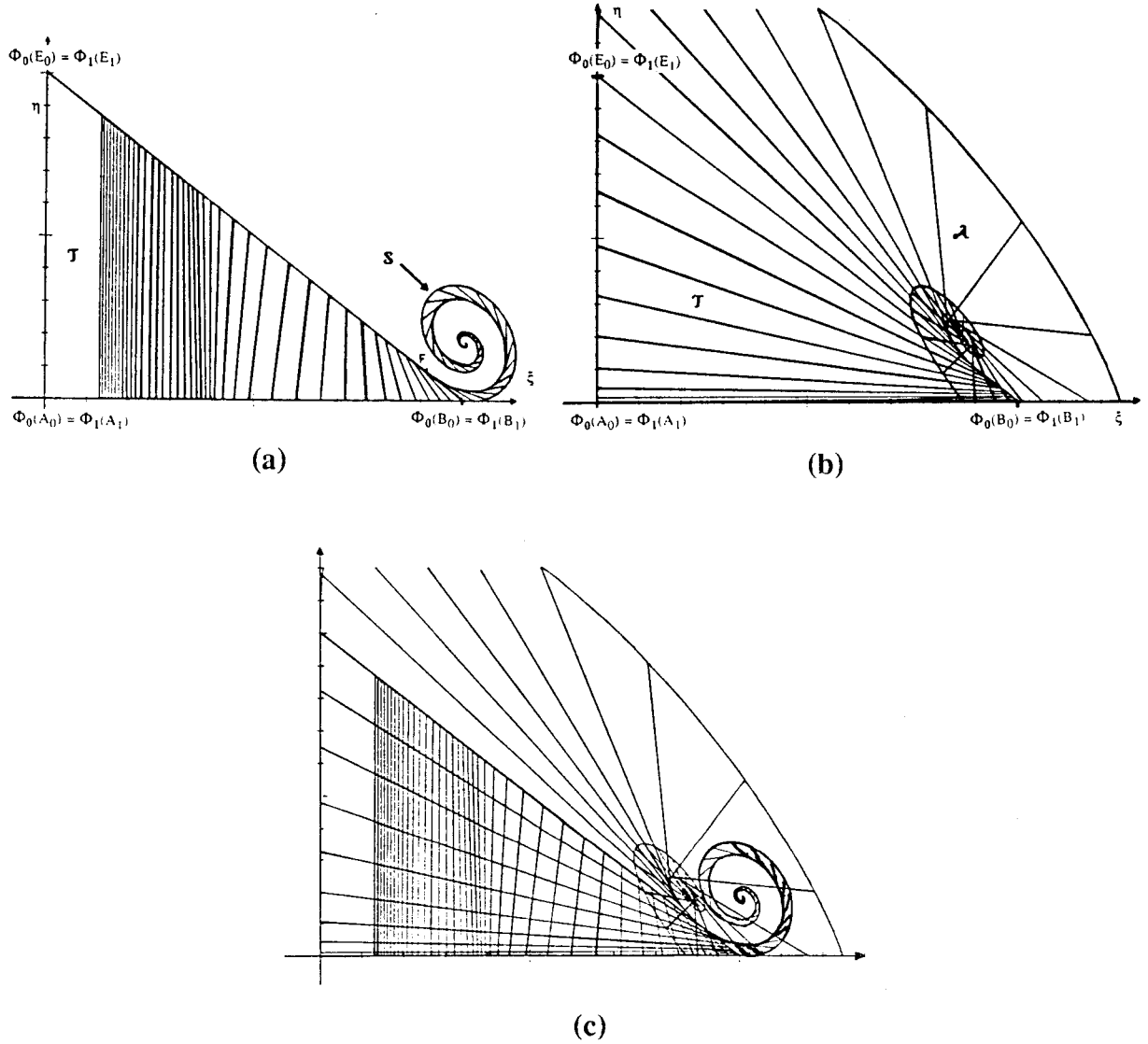


Figure 21. Demi-applications de Poincaré . Action de π_0 : $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ découpés par les lignes équitemporelles (21a) ; action de π_1 : $\mathcal{T}$ et $\mathcal{A}$ découpés par les lignes équitemporelles (21b) ; figures (a) et (b) superposées pour donner une idée de la composition $\pi = \pi_1 \circ \pi_0$ (21c) .

Nous donnons aux figures 21a , 21b , 21c , un exemple des découpages du triangle $\mathbf{T}$, de $\mathbf{S}$ et de $\mathbf{A}$, définis par ces droites équitemporelles .

L'idée de base des confineurs organisés réside dans la combinaison d'un aspect ensembliste (ensemble positivement invariant pour le semi - flot) et d'un aspect combinatoire (dynamique symbolique donnée , adaptée au système d'équations étudié) . Dans le cas du Double Scroll , la ou les dynamiques symboliques qui seront le mieux adaptées à l'étude des solutions , seront forcément liées à ces lignes équitemporelles .

4.1.4. Confiner Principal et variétés dynamiques .

Actuellement , il est possible de démontrer l'existence d'un confineur principal pour certaines valeurs des paramètres du Double Scroll qui vérifient des conditions explicitées pour certains sous-ensembles du plan U_1^* . Ce résultat et sa démonstration étant très techniques , nous n'en donnerons qu'un aperçu succinct :

Proposition 3 [29] : Il existe un ensemble Λ de valeurs des paramètres (36) tel que :

- i) il existe une partie $\mathbf{E}'$ de $\mathbf{E}$ contenant un voisinage du point D et un voisinage du " bord intérieur " de $\mathbf{A}$, telle que π_1 restreinte à $\mathbf{A} - \mathbf{E}'$ est continue ,
- ii) $\mathbf{S}$ est inclus dans $\mathbf{A} - \mathbf{E}'$ (donc $\pi_1(\mathbf{S})$ est inclus dans $\mathbf{T}$) ,
- iii) de plus , pour chacune des valeurs des paramètres dans Λ , il existe $\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$, $\theta_{\min}$, $\theta_{\max}$, tels que pour tout point M de $\pi_1(\mathbf{S})$ on a $\tau_{\min} \leq \tau(M) \leq \tau_{\max}$, et pour tout point M de $\mathbf{S}$ on a $\theta_{\min} \leq \theta(M) \leq \theta_{\max}$.

Par abus de notation , nous avons conservé les notations de U_1 pour U_1^* . Le " bord intérieur " de $\mathbf{A}$ est celui qui part du point F (Figure 21b) .

Cette proposition montre l'existence d'un confineur principal du Double Scroll pour certaines valeurs des paramètres (36) , pour une dynamique symbolique qui s'appuie sur les lignes équitemporelles .

Cette dynamique symbolique peut être équivalente à un décompte du nombre de tours que font les solutions autour du vecteur propre stable de P^+ dans $\overline{D}_1$ (cf. Figure 20) et du vecteur propre instable de l'origine dans $\overline{D}_0$, un peu comme dans l'étude de L.O.Chua

(voir la **Figure 9**) . La proposition 3 prouve que ces nombres de tours sont bornés inférieurement et supérieurement .

La démonstration de cette proposition utilise les lignes équitemporelles ainsi qu'un autre outil : **les variétés dynamiques** . Celles - ci introduites par C. Kahlert et O.E. Rössler [30] , sont construites en prenant tous les points de toutes les trajectoires de (33') pour des temps positifs et négatifs (resp. 35') qui ont pour donnée initiale un cercle centré autour de l'origine du repère (x , y , z) , dans le plan z = 0 (voir la **Figure 22**) .

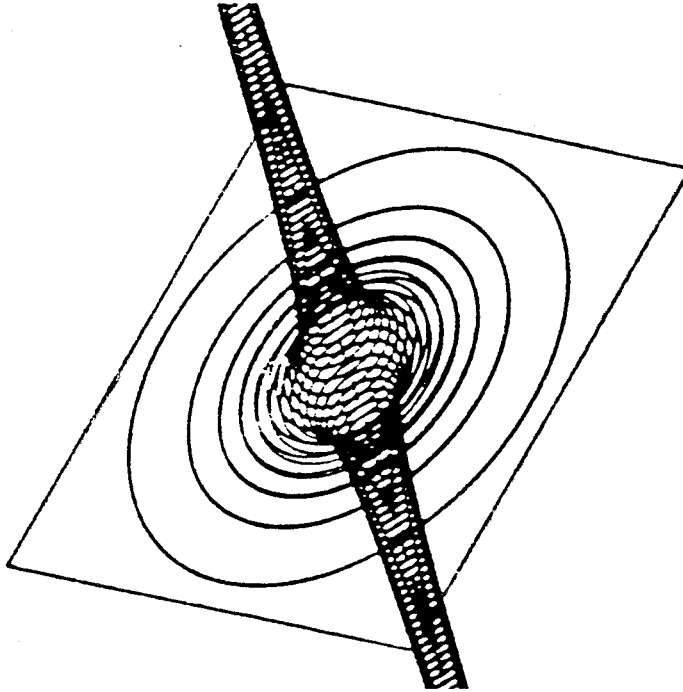


Figure 22. Exemple de variété dynamique . L'espace propre instable (correspondant au plan z = 0) sépare les deux parties de la variété (d'après [30]).

La particularité importante de ces variétés dynamiques résulte dans leur intersection avec le plan de séparation V_1 (resp. V_0) dont on connaît l'équation explicite :

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{\mu \gamma_0} (1 - x'^2) - \frac{2 \sigma_0}{\gamma_0}}{1 - x'^2}} \quad (39)$$

L'équation (39) donne l'équation de la courbe d'intersection correspondant à (35') , dans le repère (x', y', z') . Cette courbe dépend d'un paramètre $\mu \neq 0$ relié au rayon du

cercle des conditions initiales . Si $\mu = 0$, l'intersection de la variété dynamique avec le plan V_0 est l'ensemble : $\{ x = y = 0 \text{ et } x = 1 \text{ pour tout } y \}$.

Ces **courbes d'intersection** découpent toujours le plan V_1 (resp. V_0) en deux ou trois régions , car elles ont soit la forme d'un Ω , soit d'une île et d'une courbe de base unimodale . De plus , elles sont globalement invariantes par les demi-applications de Poincaré π_1 (resp. π_0) . Elles constituent donc un outil de choix pour borner un confineur principal dans le plan U_1^* , ainsi que pour délimiter la partie $\mathbf{E}'$.

Enfin la démonstration de la proposition utilise également les projections sur U_1^* des trajectoires de (33') et (35') et certaines de leurs propriétés par rapport aux courbes d'intersection , comme le fait qu'elles ne peuvent couper ces dernières qu'une seule fois .

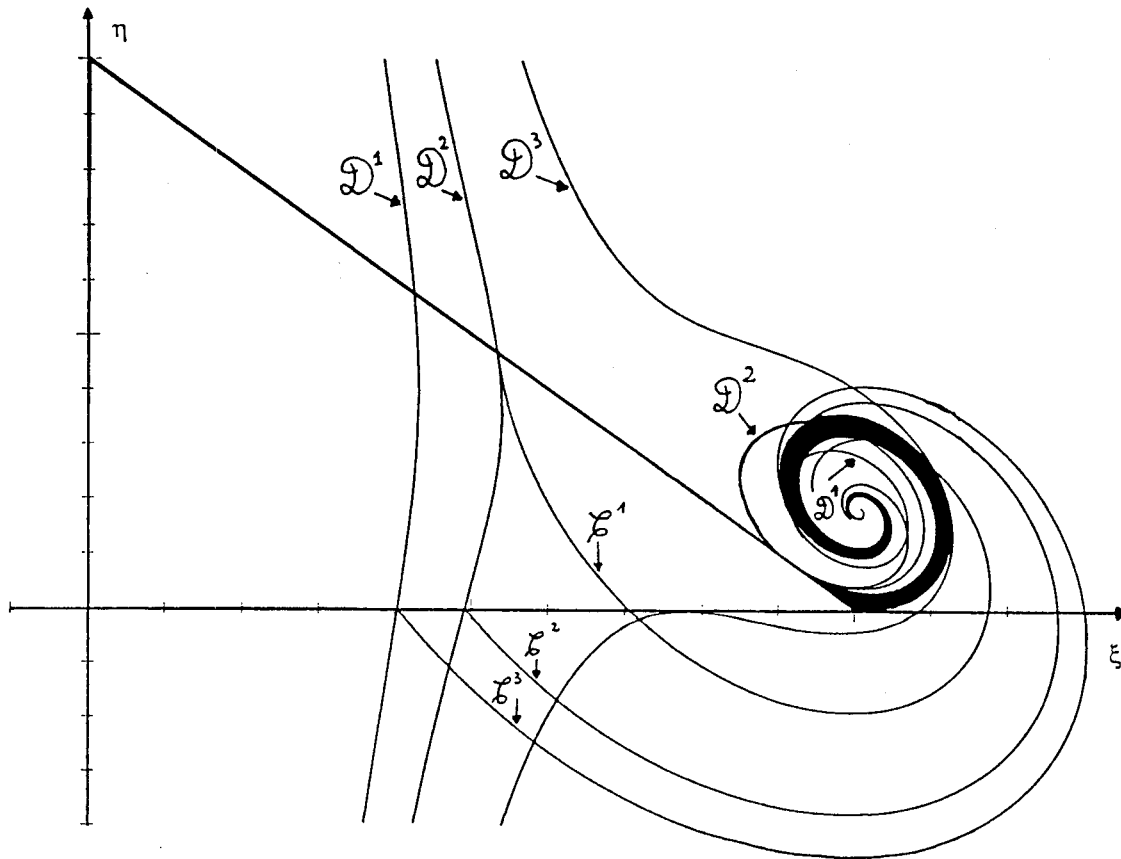


Figure 23. Bornes pour $\mathbf{S}$ (en noir) et découpage de $\mathbf{S}$ et de $\mathbf{T}$ à l'aide de trois courbes d'intersection de variétés dynamiques et des projections de trois trajectoires du système (35') .

Ainsi à la **Figure 23** , on montre comment **S** et **T** peuvent être bornés et séparés en parties distinctes par trois courbes d'intersection **D**¹, **D**² et **D**³ du système (35') , chacune de ces parties étant ensuite comparées au découpage par les lignes équitemporales de (35') . Pour borner **S** de façon plus fine , il est nécessaire d'utiliser en plus les projections de trois trajectoires de (35') **C**¹, **C**² et **C**³ .

Ces bornes de **S** sont alors comparées (voir la **Figure 24**) à des bornes d'une partie de **U**₁^{*} incluse dans **A** - **E'** , obtenues par deux courbes d'intersection **D**^{'1} et **D**^{'2} et une projection d'une trajectoire **C**^{'1} du système (33') (la partie **E'** est incluse dans **D**^{'1}) . Ces trois courbes sont à leur tour comparées au découpage par les lignes équitemporales de (33') . Toutes les courbes de la **Figure 23** et de la **Figure 24** ayant des équations cartésiennes qui sont connues explicitement .

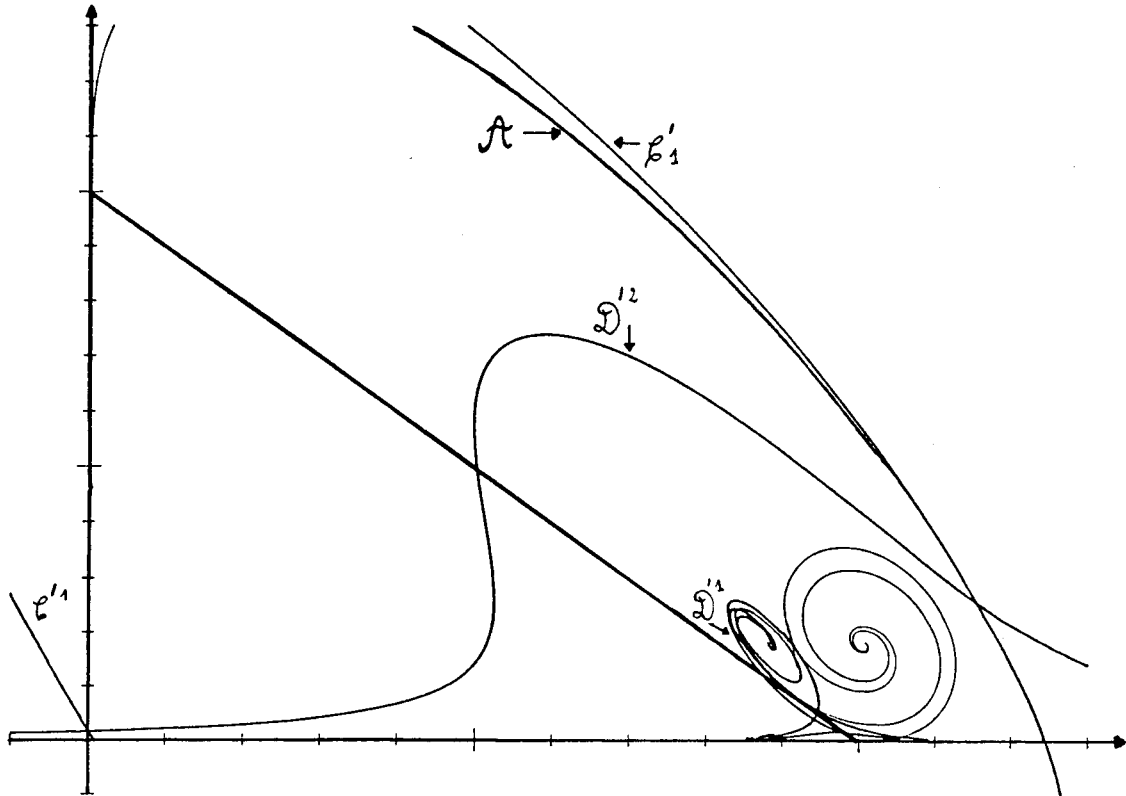


Figure 24. Bornes pour **S** et **A** - **E'** à l'aide de deux courbes d'intersection de variétés dynamiques et de la projection d'une trajectoire du système (33') .

Tout ceci ne constitue qu'une étude préliminaire du Double Scroll puisque nous n'avons jusqu'ici défini que le confineur principal . Notre but est , bien entendu , de découper celui - ci en confineurs et anti - confineurs . C'est toutefois un but qui nécessitera encore beaucoup de travail pour être atteint .

4.2. D'autres résultats pour les systèmes contraints .

4.2.1. Un algorithme de découpage de l'espace des paramètres pour un modèle contraint sur un double pli .

Je voudrais conclure cet exposé par la description rapide de certains autres résultats que nous avons obtenus sur des modèles contraints sur un double pli , proches de celui défini au chapitre 3 .

Avec A. SAIDI [31 , 32] , nous nous sommes intéressés à une famille de systèmes contraints dont la variété lente est un double pli , et qui est engendrée par deux " champs générateurs " (un pour chaque feuillet de la partie stable) de la forme (en coordonnées polaires) :

$$\begin{cases} \dot{r}_i = \alpha_i r_i (cl_i - r_i) , \\ \dot{\theta} = 1 . \end{cases} \quad (40)$$

Cette famille dépend d'un grand nombre de paramètres (puisque'il faut fixer les centres des repères relatifs dans lesquels sont écrits ces champs générateurs) qui permettent d'obtenir des oscillations dont les motifs sont comparables à ceux observés dans la réaction de Bélousov - Zhabotinskii . En utilisant la connaissance explicite des solutions de (40) , nous pouvons définir , puis vérifier , une condition suffisante d'existence d'un confineur principal [31] .

Nous fixons alors [32] tous les paramètres sauf deux : la position du pli (et donc du copli dont la distance de sa projection à celle du pli est fixe) suivant la direction des y (direction perpendiculaire au pli) par rapport à l'origine des axes , et l'écartement dans la direction des x , entre les foyers de la nappe supérieure et de la nappe inférieure .

Ce qui définit un sous-espace de paramètres de dimension 2 , pour lequel nous donnons un **algorithme de découpage en régions disjointes** . Dans chacune de ces régions , les systèmes (40) possèdent un confineur principal tel que les trajectoires qui sont à l'intérieur de celui-ci , font **un nombre de tours** autour du foyer supérieur (resp. du foyer inférieur) **compris entre deux bornes identiques** .

Nous généralisons cet algorithme au découpage d'un sous-espace de paramètres de dimension 3 (le sous-espace précédent auquel on a ajouté le paramètre : distance des foyers dans la direction des y) .

Nous donnons des résultats du fonctionnement de cet algorithme avec divers raffinements .

4.2.2. Une étude d'un arbre de bifurcations pour des solutions ayant des motifs de la forme 0111 et 010111 .

Avec A. AZIZ - ALAOUI [33 , 34] , nous nous sommes intéressés à une famille de systèmes un peu plus générale que la précédente , puisqu'elle n'est pas définie par des équations explicites , mais par des conditions sur les éléments caractéristiques de l'espace des phases (c'est - à - dire sur le nombre de singularités , de points pseudo - singuliers , etc ...) . Nous montrons que sous ces conditions , il existe un confineur principal dont tous les points ont un itinéraire engendré uniquement à partir des mots : $w = 0111$ et $w' = 010111$ (la dynamique symbolique étant celle définie au chapitre 3) .

Nous montrons [33] que ces conditions ne sont pas trop restrictives puisque pour la famille (40) , il est possible de définir assez facilement , un ensemble non vide de paramètres pour lesquels ces conditions sont vérifiées .

Nous pouvons alors [34] étudier plus précisément les motifs du confineur principal et déterminer les conditions qui doivent être vérifiées pour obtenir telle ou telle suite de mots w et w' . Suivant le niveau d'analyse que l'on désire , le nombre de conditions et donc de situations possibles augmente . Nous décrivons toutes ces possibilités à l'aide d'un arbre .

4.3. Conclusions .

Nous avons fait le tour des recherches actuelles sur les motifs et confineurs . Ces recherches basées sur une idée qui se veut nouvelle (mais y a-t-il des idées vraiment nouvelles ?) de la modélisation mathématique d'observations de systèmes chimiques ou physiques , ne font que débiter .

Certains obstacles ont été franchis comme le passage à des applications de Poincaré de dimension 2 , beaucoup d'autres restent encore à franchir pour identifier et comprendre tous les problèmes qui peuvent se prêter à cette approche .

Certains affirment que l'on a bien compris la transition vers le " chaos " dans les systèmes dynamiques de petite dimension et qu'il n'est plus de recherche intéressante dans ce domaine . Cependant le but d'une étude par confineur ne se situe pas ici , elle cherche plutôt à décrire ce qui se passe quand le " chaos " est installé , puisque la structure confineurs - anticonfineurs persiste en présence de celui - ci .

Nous espérons que d'autres personnes seront intéressées par ces structures et les étudieront à leur tour .

REFERENCES

- [1] R. LOZI . Sur un modèle mathématique de suite de bifurcations de motifs dans la réaction de Bélousov - Zhabotinsky , C. R. Acad. Sc. Paris , 1982 , **294**, Série I , pp. 21 - 26 .
- [2] J. MASELKO and H.L. SWINNEY . A complex Transition Sequence in the Belousov - Zhabotinskii Reaction , Physica Scripta , 1985 , Vol. T 9 , pp. 35 - 39 .
- [3] L.O. CHUA , M. KOMURO , T. MATSUMOTO . The Double Scroll Family , IEEE Transactions on circuits and systems , Vol. CAS - 33 , n°11 , 1986 , pp. 1073 - 1118 .
- [4] L.F. OLSEN . An enzyme with a strange attractor , Physics Letters , Vol. 94 A , n° 9 , 1983, pp. 454 -457 .
- [5] D. DANGOISSE , P. GLORIEUX and D. HENNEQUIN . Chaos in a CO₂ laser with modulated parameters : Experiments and numerical simulations , Physical Review A, Vol. 36 , n° 10 , 1987 , pp. 4775 - 4791 .
- [6] K. YOSHIKAWA , M. SHOJI , S. NAKATA , S. MAEDA , H. KAWAKAMI . An Excitable Liquid Membrane Possibly Mimicking the Sensing Mechanism of Taste . LANGMUIR , 1988, 4 , pp. 759 - 762 .
- [7] P.CONSTANTIN , C. FOIAS , B. NICOLAENKO et R. TEMAM . Nouveaux résultats sur les variétés inertiellles pour les équations différentielles dissipatives , C. R. Acad. Sc. Paris , 1986 , **302**, Série I , pp. 375 - 378 .
- [8] J.- M. GHIDAGLIA . Estimation des exposants de Lyapunov : applications à l'estimation de la dimension des attracteurs associés à des équations aux dérivées partielles . In Equations aux dérivées partielles non linéaires dissipatives et systèmes dynamiques , Travaux en cours, **28** , Hermann 1988 , pp.147 -169 .

- [9] F. TAKENS . Constained equations ; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions . *In* Structural stability , the theory of catastrophes , and applications in the sciences , Springer Lectures Notes in Math. 1976, **525** , pp. 143 - 234 .
- [10] S. USHIKI , R. LOZI . Confinor and anti-confinor in constrained "Lorenz" system . Japan J. Appl. Math. , 1987, **4**, pp. 433 - 454 .
- [11] M. CANALIS . Illustrations et étude des systèmes lents-rapides de R^3 . Thèse de 3^{ème} cycle, 1984 , Université de Nice .
- [12] E. BENOIT . Canards de R^3 . Thèse , 1984 , Université de Nice .
- [13] J.J. TYSON . The Belousov - Zhabotinsky reaction . Lectures Notes in Biomathematics , Springer , 1976 , **10** , 128 pp.
- [14] J.J. TYSON . Relaxations oscillations in the revised Oregonator . J. Chem. Phys., 1984 , **80** , n°12 , pp. 6071 - 6078 .
- [15] Z.NOSTICZIUS , H. FARKAS , Z.A. SCHELLY . Explodator : a new skeleton mechanism for the halate driven chemical oscillators . J. Chem. Phys., 1984 , **80** , n°12 , pp. 6062 - 6070 .
- [16] R.J. FIELDS & R.M. NOYES . Oscillations in chemical systems IV. Limit cycles behavior in a model of a real chemical reaction . J. Chem. Phys., 1974, **60** , pp.1877 - 1884 .
- [17] J.J.TYSON . On the appearance of chaos in a model of the B. - Z. reaction . J. Math. Biology, 1978, **5**, pp. 351 -362 .
- [18] O.E. ROSSLER . Chaotic behavior in simple reaction systems . Z. Naturforsch. , 1976 , **31a** , pp. 259 - 264 .

- [19] F. ARGOUL . Etude de comportements quasi-périodiques dans la réaction de B. - Z. .
Thèse , Université de Bordeaux , 1985 .
- [20] J. MASELKO & H.L. SWINNEY . Complex periodic oscillations and Farey
arithmetic in the B. - Z. reaction . Preprint , 1986 .
- [21] J.- C. ROUX , J.S. TURNER , W.D. Mc CORMICK & H.L. SWINNEY .
Experimental observations of complex dynamics in a chemical reaction , *In* Nonlinear
problems : Present and future , Proceedings of a conference at Los Alamos , March 2 -
6 , 1981 , A.R. Bishop Ed. , North Holland , Amsterdam , 1981 , pp. 409 - 431 .
- [22] T. MATSUMOTO , L.O. CHUA and M. KOMURO . " The double scroll " , IEEE
Trans. Circuits Syst. , vol. CAS - 32 , pp. 797 - 818 , Aug . 1985 .
- [23] T. MATSUMOTO . Chaos in Electronic Circuits , Proceedings of the IEEE , vol.
75, n° 8 , pp. 1033 - 1057 , Aug . 1987 .
- [24] J. ARGEMI . Approche qualitative d'un problème de perturbations singulières dans
 R^4 . *In* Equadiff. 78 , Convegno Int. su Equazioni Differenziali Ordinarie e
Equazioni . Firenze , Italia . R. Conti , G. Sestini and G. Villari ed. , 1978, pp. 333 -
340 .
- [25] H. OKA , H. KOKUBU . Constrained Lorenz like attractors . Japan J. Appl. Math. ,
1985, 2, pp. 495 - 500 .
- [26] R. LOZI . Modèles mathématiques qualitatifs simples et consistants pour l'étude de
quelques systèmes dynamiques expérimentaux .Thèse , Université de Nice , 1983 .
- [27] R. LOZI , S. USHIKI . Organized confinors and anti-confinors and their
bifurcations in constrained "Lorenz system" . Ann.Télécommun. , 43 , n° 3 - 4 , 1988,
pp. 187 - 208 .

- [28] S. WU . Chua's Circuit Family , Proceedings of the IEEE , vol. 75, n° 8 , pp. 1022 - 1032 , Aug . 1987 .
- [29] R. LOZI , S. USHIKI . Confinors and bounded time - patterns in the Chua's circuits family . *En préparation* .
- [30] C. KAHLERT , O.E. ROSSLER . Analytical Properties of Poincaré Halfmaps in a Class of Piecewise - Linear Dynamical Systems . Z. Naturforsch. , 1985 , **40a** , pp. 1011 - 1025 .
- [31] R. LOZI , S. SAIDI . Etude des Motifs dans les Oscillations de la Réaction de BELOUSOV - ZHABOTINSKY . Partie I : Existence d'un confineur principal pour un modèle contraint particulier . Les Annales de l'Enit , Vol. 3 , n° 2 , 1989 , pp. 69 - 98 .
- [32] S. SAIDI , R. LOZI . Etude des Motifs dans les Oscillations de la Réaction de BELOUSOV - ZHABOTINSKY . Partie II : Un algorithme de partition de l'espace des paramètres pour un modèle contraint particulier . *A paraître dans* Les Annales de l'Enit .
- [33] R. LOZI , A. AZIZ - ALAOUI . A Model Family of Differential Equations Constrained on a Double - Fold . Part 1 : Existence of a Main Confinor . *A paraître dans* Japan J. Appl. Math.
- [34] A. AZIZ - ALAOUI , R. LOZI . A Model Family of Differential Equations Constrained on a Double - Fold . Part 2 : Tree of the 0111 and 010111 Patterns . *Soumis à* Japan J. Appl. Math.