

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

R. MOUSSU

Problème de Dulac et variétés pfaffiennes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1990, tome 41
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa,
R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 4, p. 143-149

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__143_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE DULAC ET VARIETES PFAFFIENNES

Par R. MOUSSU dédié a René THOM

Cet exposé a pour but de proposer une approche du problème de Dulac qui repose sur la théorie des variétés pfaffiennes de HOVANSKII [H], [R]. C'est un résumé d'un travail avec C.Roche [Mo-R].

Soit $v = a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ une équation différentielle analytique sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à points singuliers isolés. Un *polycycle* P de $v = 0$ est une union finie, connexe de points singuliers (*ses sommets*) et de courbes intégrales (*ses côtés*) qui possède une *application retour* unilatérale f . C'est-à-dire, il existe une courbe analytique

$$T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, T(0) \in P,$$

transverse aux courbes intégrales de $v = 0$ telle que la courbe intégrale passant par $T(t)$ recoupe une première fois $T([0, 1])$ en $T(f(t))$ si t est assez petit. Evidemment f fixe 0 et est analytique sur un ouvert $]0, \varepsilon[$ mais, n'est pas en général analytique en 0.

Problème de Dulac : *Montrer que si f n'est pas l'identité, 0 est un point fixe isolé de f .*

Ce problème est résolu par IL'YASENKO [I] lorsque les sommets $a_k, k = 1, 2, \dots, n$ de P sont non dégénérés dans le sens suivant : les courbes $a = 0, b = 0$ se coupent transversalement aux points a_k . Dans le cas général, une esquisse de preuve est proposée dans [EMMR], [Y] et, dans [AI], il est annoncé que IL'YASENKO l'a aussi résolu.

Tous ces travaux reprennent et complètent la méthode de Dulac. On y montre tout d'abord que le germe en 0 de l'application retour d'un polycycle appartient à un anneau A quasi-analytique : un élément $f \in A$ possède un développement asymptotique $\hat{f}$ (transasymptotique dans [EMMR]) qui appartient à un anneau $\hat{A}$ et le morphisme de A dans $\hat{A}$ ainsi défini est injectif. On en déduit que si f n'est pas l'identité, la fonction $f(x) - x$ possède une partie principale $P(x)$ non nulle. On conclut en remarquant que $P(x)$ a des zéros isolés. Le point essentiel dans cette approche du problème de Dulac est la preuve de l'injectivité du morphisme de A vers $\hat{A}$. Dans [I] c'est une très jolie application du théorème de PHRAGMEN-LINDELOF, dans [EMMR] elle repose sur les théories de, ECALLE, MARTINET, RAMIS des fonctions résurgentes, de la resommabilité, des quasi-fonctions $[E_1], [E_2], [E_3], [Ma, R]$.

Nous allons prouver sans utiliser de quasi-analyticité et même de développement asymptotique le résultat suivant.

Théorème 1 : Soit P un polycycle d'une équation différentielle analytique $v = 0$ qui vérifie la propriété (I) suivante : en chacun des sommets de P , v possède un facteur intégrant analytique. Alors, l'application retour de P a seulement un nombre fini de points fixes si ce n'est pas l'identité.

Rappelons qu'un *facteur intégrant* analytique F de v en un point a est un germe de fonction analytique en a , non constant, tel que

$$v \wedge dF + Fdv = 0$$

Bien que très restrictive, la condition (I) n'est pas complètement arbitraire. En effet, après désingularisations, les sommets de P possèdent toujours un facteur intégrant formel. Nous reviendrons sur ceci à la fin de cet exposé.

La preuve du théorème repose sur une propriété de finitude du nombre de composantes connexes des variétés pfaffiennes de HOVANSKII. Rappelons tout d'abord leur définition, ou plus exactement celle que nous utiliserons.

Soit M un ouvert semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, ω une 1-forme différentielle analytique sur un voisinage de l'adhérence $\bar{M}$ de M dans $\mathbf{R}^n$ et soit V une sous-variété connexe, de codimension 1 de M . Nous dirons que V est une *hypersurface séparante* de M associée à ω , ce que nous écrirons sous la forme d'un triplet (V, ω, M) si V est une variété intégrale de $\omega = 0$ et si $M \setminus V$ est la réunion de deux ouverts connexes dont V est la frontière commune dans M .

Théorème 2 : Soient X un ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$ et (V_k, ω_k, M) pour $k = 1, 2, \dots, q$ des hypersurfaces séparantes. Si M est relativement compact le nombre de composantes connexes de $X \cap V_1 \cap V_2 \dots \cap V_q$ est fini.

Ainsi, du point de vue de la finitude du nombre de composantes connexes, les hypersurfaces séparantes se comportent comme les sous-ensembles semi-analytiques. En fait, elles héritent d'autres propriétés des ensembles semi-analytiques : finitude des groupes d'homologie, structure conique... Cependant elles ne sont pas, en général, semi-analytiques en un point de leur bord. Par exemple, le graphe de $x \rightarrow e^{-1/x}$ est une hypersurface séparante de $x^2 dy - y dx = 0$ dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

La preuve du théorème 2 repose sur l'existence de stratification adaptée simultanément à un ensemble analytique et à un système de Pfaff $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q\}$. C'est l'objet essentiel de [Mo.R]. Cependant, nous ne sommes pas certains que le résultat du théorème 2 soit

complètement original. Dans [T], J-C. TOUGERON étudie des questions du même type et surtout HOVANSKII dans [H] énonce un théorème dont le théorème 2 n'est qu'un aspect. Mais, nos hypothèses semblent moins restrictives et la méthode que nous utilisons pour le prouver est différente de celles utilisées dans [T]. Par contre nous utilisons l'argument basique de HOVANSKII, la variante suivante du théorème de Rolle classique :

Si $c : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ est une courbe C^1 qui coupe une hypersurface séparante (V, ω, M) en $c(\alpha), c(\beta)$, il existe $\tau \in [\alpha, \beta]$ tel que $\omega(c(\tau)) \cdot (c'(\tau)) = 0$.

La preuve du théorème 2 se fait par une double induction ; sur $p = \dim X$ et $q = \#\Omega$ ou $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q)$. Montrons comment elle fonctionne lorsque $p, q \leq 2$ en montrant l'assertion suivante :

Deux séparatrices $V_i, i = 1, 2$ d'équations différentielles analytiques $\omega_i = 0$ sur un voisinage du 0 de $\mathbf{R}^2$ qui se coupent en un nombre infini de points sont identiques.

Supposons que le cardinal de $V_1 \cap V_2$ soit infini et montrons que $V_1 \equiv V_2$. Envisageons tout d'abord le cas où $V_1 = C_1([0, 1])$ est une courbe analytique $C_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, C_1(0) = 0$. Il existe par hypothèse une suite monotone décroissante $\{t_n\}$ qui tend vers zéro tel que pour tout $n \in \mathbf{N}, C(t_n)$ appartienne à V_2 . D'après le théorème de Rolle il existe, pour chaque $n, \tau_n \in [t_n, t_{n+1}]$ tel que $\omega_2(C(\tau_n))(C'(\tau_n)) = 0$. Ainsi, la fonction analytique $\tau \rightarrow \omega(C(\tau))(C'(\tau))$ et une infinité de zéros, elle est identiquement nulle, V_1 est une courbe intégrale de $\omega_2 = 0$ et ainsi $V_1 \equiv V_2$.

Montrons maintenant comment le cas général se ramène à ce cas particulier. Soit $\{a_n\}$ une suite de points de $V_1 \cap V_2$ qui converge vers $0 \in \mathbf{R}^2$ tel que a_n appartienne à l'arc (a_{n-1}, a_{n+1}) de V_2 . D'après le théorème de Rolle, pour chaque n , il existe b_n qui appartient à l'arc (a_n, a_{n+1}) de V_2 et tel que $\omega_1 \wedge \omega_2(b_n) = 0$. Soit V_1' une branche de l'ensemble analytique $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ qui contient une infinité de b_n . Le couple (V_1', V_2) vérifie les hypothèses du cas particulier précédent. On en déduit que

$$V_1 = V_2 = V_1' \subset \{\omega_1 \wedge \omega_2 = 0\}$$

Remarque : Sous l'hypothèse de l'assertion précédente (ω_1, ω_2 analytiques) si $V_1 = V_2$ n'est pas une courbe analytique il est clair que $\omega_1 \wedge \omega_2 \equiv 0$. Plus généralement, soit V une courbe intégrale commune à deux équations différentielles

$$\omega_i = a_i dx + b_i dy, \quad i = 1, 2$$

où les a_i, b_i appartiennent à un anneau de fonction $A \subset \mathbf{R}\{x, y\}$. Si V n'est pas contenu dans une courbe $f = 0$, avec f non constante et appartenant à A , alors ω_1 et ω_2 sont colinéaires. Par exemple, deux équations polynomiales qui ont un cycle non algébrique en commun sont colinéaires.

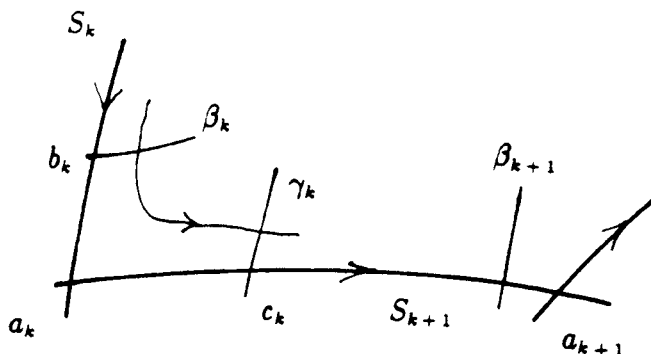
Démonstration du Théorème 1 : Soit $v = adx + bdy$ une équation différentielle analytique sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, à points singuliers isolés et soit P un polycycle de $v = 0$ à côtés S_k et sommets $a_k = S_k \cap S_{k+1}, k = 1, 2, \dots, n$, avec la convention $n + 1 \equiv 1$. Nous supposons que P vérifie la condition (I) : il existe une fonction analytique non constante, F_k , sur un voisinage U_k de a_k pour $k = 1, 2, \dots, q$ telle que :

$$(I_k) \quad v \wedge dF_k + F_k dv = 0.$$

Choisissons, pour chaque k , des points $b_k \in S_k \cap (U_k - a_k), c_k \in S_{k+1} \cap (U_k - a_k)$ et des courbes analytiques (comme sur la figure 1), transverses à $v = 0$ notées

$$\beta_k : x_k \in]-1, 1[\rightarrow \beta_k(x_k) \quad , \quad \beta_k(0) = b_k$$

$$\gamma_k : y_k \in]-1, 1[\rightarrow \gamma_k(y_k) \quad , \quad \gamma_k(0) = c_k.$$



La courbe intégrale de $v = 0$ passant par $\beta_k(x_k)$ pour $x_k \in]0, \varepsilon_k[$ coupe une première fois γ_k au point $\gamma_k(y_k)$. L'application $\bar{g}_k : x_k \rightarrow y_k$ ainsi définie est analytique et se prolonge en 0 par continuité. Montrons tout d'abord l'assertion suivante :

Le graphe $\bar{G}_k$ de $\bar{g}_k$ est une courbe intégrale d'une équation différentielle analytique $\bar{\omega}_k = 0$ sur un voisinage de a_k .

De (I_k) on déduit que les composantes irréductibles de $F_k = 0$ sont des courbes intégrales de $v = 0$. Ainsi F_k ne s'annule pas sur la composante connexe U'_k de $U_k \setminus S_k \cup S_{k+1}$

qui contient des points de β_k, γ_k . On choisit U_k de façon que U'_k soit simplement connexe. Les courbes intégrales de $v = 0$ dans U'_k sont les courbes de niveau d'une fonction analytique :

$$I_k : U'_k \rightarrow \mathbf{R} \text{ avec } dI_k = \frac{v}{F_k}.$$

En particulier $\bar{g}_k$ est défini implicitement par l'équation $I_k(\beta_k(x_k)) = I_k(\gamma_k(y_k)), y_k = \bar{g}_k(x_k)$. Ainsi $\bar{g}_k$ est une solution de l'équation différentielle :

$$\left(\frac{v}{F_k}\right)_{\beta_k(x_k)}(\beta'_k(x_k)) = \left(\frac{v}{F_k}\right)_{\gamma_k(y_k)}(\gamma'_k(y_k)) \cdot \frac{dy_k}{dx_k}.$$

Son graphe $\bar{G}_k$ est une courbe intégrale de l'équation analytique

$$\omega_k = F_k(\gamma_k(y_k))v(\beta_k(x_k)) \cdot (\beta'_k(x_k))dx_k - F_k(\beta_k(x_k))v(\gamma_k(y_k)) \cdot (\gamma'_k(y_k))dy_k$$

sur un voisinage de 0. Soit $\bar{\omega}_k$ une 1-forme analytique sur le même voisinage de 0 telle que $\bar{\omega}_k \wedge \omega_k = 0$ et dont 0 est un zéro isolé.

La courbe intégrale de $v = 0$ passant par $\gamma_k(y_k)$, pour y_k assez petit, coupe une première fois β_{k+1} en $\beta_{k+1}(x_{k+1})$. L'application $h_k : y_k \rightarrow x_{k+1}$ ainsi définie est un difféomorphisme analytique qui fixe 0. Le graphe G_k du composé

$$g_k = h_k \circ \bar{g}_k : x_k \rightarrow x_{k+1}, \quad x_k > 0$$

est une courbe intégrale de l'équation $0 = \omega_k = H_k^*(\bar{\omega}_k)$ où H_k est le difféomorphisme

$$H_k : (x_k, x_{k+1}) \rightarrow (x_k, h_k^{-1}(x_{k+1})).$$

D'autre part, l'application retour f de P évaluée sur γ_1 est le composé $f = g_n \circ g_{n-1} \dots \circ g_1$.

Considérons les $\omega_k, k = 1, 2, \dots, n$ comme des 1-formes (analytiques) sur des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$. Soit $\rho > 0$ tel que les ω_k soient analytiques sur la boule $B_0(\rho) = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x\| < \rho\}$. Notons M le sous-ensemble $B_0(\rho) \cap (\mathbf{R}_+^*)^n$. Pour $k = 1, 2, \dots, n$, (V_k, ω_k, M) est une hypersurface séparante où

$$V_k = \{x \in M / (x_k, x_{k+1}) \in G_k\}.$$

Le graphe (dans M) de $f_{n-1} = g_{n-1} \circ \dots \circ g_1$ est la courbe $\Gamma = \bigcap_{k=1}^{n-1} V_k$ et l'ensemble Fix f des points fixes de f est la projection $\pi_1(\Gamma \cap V_n)$ avec $\pi_1 : x \rightarrow x_1$. D'après le théorème 2, $\Gamma \cap V_n$ a un nombre fini de composantes connexes et si

$$\# \text{ Fix } f = \# \bigcap_{k=1}^n V_k = \infty,$$

Γ est contenu dans V_n et f est l'identité.

Remarque : Les travaux précédents sur le problème de Dulac (utilisation des développements asymptotiques) commencent par la désingularisation des sommets du polycycle. Dans notre approche, cette première étape n'a pas été nécessaire, compte tenu de l'hypothèse (I). Par contre, il est clair qu'elle le redevient sans l'hypothèse (I); c'est le seul moyen d'avoir des renseignements sur les applications g_k .

Supposons que P soit un polycycle de $v = 0$ à sommets $a_k, k = 1, 2, \dots, n$, réduits : ces points sont des points singuliers hyperboliques ou semi-hyperboliques de $v = 0$ (voir [M]). Dans les deux cas $v = 0$ possède un facteur intégrant formel $\hat{F}_k$ au point a_k (voir [CM]). Dans des coordonnées analytiques (u, v) au point a_k , bien choisies, $\hat{F}_k$ s'écrit

$$\hat{F}_k(u, v) = u^p \cdot \sum_{n \geq 0} \hat{a}_n(u) v^n, p \geq 1, \hat{a}_n \in \mathbf{R}[[u]].$$

Selon les cas, les $\hat{a}_n$ sont analytiques, resommables, "compensables". On en déduit l'existence d'un facteur intégrant (réel) $F_k(u, v) = u^p \sum b_n(u) v^n$, où les b_n ont k pour développement asymptotique les a_n . Compte tenu de ces propriétés, on peut espérer que notre approche géométrique du problème de Dulac puisse être encore utilisée sans l'hypothèse (I). Ceci nécessiterait évidemment une théorie des ensembles définis par des équations non nécessairement analytiques mais "resommables".

BIBLIOGRAPHIE

- [AI] ARNOLD V.I., IL'YASHENKO Y.S., Ordinary differential equations I, Dynamical Systems I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol I, Springer V., 1988, 1-148.
- [CM] CERVEAU D., MATTEI J.F, Intégrales premières des formes différentielles analytiques intégrables. Asterisque S.M.F., 97, 1982.
- [D] DULAC H., Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France, 51, 1923, 45-188.
- [E₁], [E₂], [E₃] ECALLE J., Les fonctions résurgentes. Publications d'Orsay. 1-20 (1981), 3 (1985).
- [EMMR] ECALLE J., MARTINET J., MOUSSU R., RAMIS J.-P., Non-accumulation de cycles limites, C.R.A.S., 304, 1987, (I) 375-378, (II) 431-434.

- [H] HOVANSKII A.G., Real Analytic varieties with the finiteness property and complex abelian integrals. *Funct. Anal. and Appl.*, 18, 1984, 119-127.
- [I] IL'YASHENKO Y.S., Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane. *Funct. Anal. and Appl.*, 18, 1984, 199-207.
- [L] LOJASIEWICZ S., Ensembles semi-analytiques. IHES, Burres-sur-Yvette, 1965.
- [M.R] MARTINET J. et RAMIS J.P. Exposé dans cette R.C.P.
- [M] MOUSSU R., le problème de la finitude du nombre de cycles limites, Séminaire Bourbaki, N° 655, 1985, Astérisque S.M.F., 145-146, 1987, 89-101.
- [Mo.R] MOUSSU R. et ROCHE C. Théorie de HOVANSKII et problème de DULAC. Préprint Université de Dijon.
- [R] RISLER J.J., Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovansky). Séminaire Bourbaki, N° 637, 1984, Astérisque S.M.F., 133-134, 1986.
- [T] TOUGERON J-C., Sur certains algèbres de fonctions analytiques. Séminaire sur la géométrie algébrique réelle, Publ. Paris VII, 1986, 35-121.
- [Y] YOCCOZ J-Ch., Non-Accumulation de cycles limites. Séminaire Bourbaki, N° 690, 1987, Astérisque S.M.F. 1989.

Laboratoire de Topologie
 CNRS D0 755
 Topolog at frccub11.earn
 B.P. 138, 21000 Dijon Cedex, France.