RAYMOND GÉRARD

Une classe d'opérateurs non linéaires à singularité régulière

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1988, tome 39
« Conférences de P. Degond, R. Gérard, C. Itzykson, F. Wegner et Mlle S. Rousset », ,
exp. nº 1, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1988__39__1_0>

Une classe d'opérateurs non linéaires à singularité régulière.

Raymond GÉRARD

Institut de Recherche Mathématique Avancée

7, rue René Descartes - 67084 STRASBOURG Cedex

LES PROBLEMES.

Notations.

$\mathbb{C}[[x]]$ l'anneau des séries formelles en les indéterminées $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$\mathbf{m}$ son idéal maximal;

$\mathbb{C}\{x\}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$,

$\mathbf{m}$ son idéal maximal,

$\mathbf{D}$ l'ensemble des opérateurs ,

$D : \mathbb{C}[[x]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x]]$,en général non linéaires.

Un opérateur $D \in \mathbf{D}$ est est dit <u>singulier</u> si

$$D(\mathbb{C}[[x]]) \subset \mathbf{m}$$

et <u>singulier régulier</u> si de plus on a :

pour $\hat{u} \in \mathbb{C}[[x]]$, $D\hat{u} \in \mathbf{m} \Rightarrow \hat{u} \in \mathbb{C}\{x\}$.

<u>Problème.</u> Trouver une classe $\mathbf{D}$ aussi générale que possible d'opérateurs non linéaires à singularité régulière.

Soit $\mathbf{L}$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires agissant sur $\mathbb{C}[[x]]$.

Un opérateur $D \in \mathbf{D}$ est dit L-<u>analytique</u> s'il existe :

1°) une fonction $F(x,y_0,y_1,\ldots,y_n)$ holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant $F(0,0) = 0$;

2°) $(m + 1)$ opérateurs $\theta_0 = \mathrm{id.}, \theta_1, \ldots, \theta_n$ appartenant à $\mathbf{L}$ tels que

$$Du = F(x,u,\theta_1 u, \ldots, \theta_n u).$$

Notons $\mathbf{D}_{an.}(\mathbf{L})$ l'ensemble des opérateurs L-analytique .On peut se restreindre à l'étude des opérateurs agissant sur $\mathbf{m}$ à la place de [[x]],car nous avons en vue de trouver une classe d'opérateurs à singularité régulière.Pour trouver des classes intéressantes d'opérateurs à singularités régulières il faut se restreindre à certaines sous classes d' opérateurs linéaires.Ceci signifie que nous avons à introduire certaines sous classes $\mathbf{L_k} \subset \mathbf{L}$ et à considérer l'ensemble $\mathbf{D}_{an.}(\mathbf{L_k})$ des opérateurs $\mathbf{L_k}$-analytiques.

Notons $\mathbf{H_q}(x)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes homogènes de degré q en les indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$\mathbf{m} = \oplus_{q \geq 1} \mathbf{H_q}(x) ,$$

soit $e_q(x)$ la $\mathbb{C}$-base usuelle de $\mathbf{H_q}(x)$, alors tout $u \in \mathbf{H_q}(x)$ peut s'écrire

$$u = e_q(x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{\delta(q)} \end{pmatrix} \quad \text{où } \delta(q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H_q}(x) .$$

Considèrons la base **m**-adique : $(\hat{e}) = ((e_1(x)),(e_2(x)),\ldots,(e_q(x)),\ldots)$ de **m**, dans cette base tout opérateur linéaire agissant sur **m** admet une matrice de dimension infinie.

Les sous espaces vectoriels de **L** intéressants pour les applications sont les suivants:

A) $\mathbf{L_0} = \{ \theta \in \mathbf{L} \mid \mathrm{Mat}(\theta,(e)) \text{ soit diagonale} \}$,

c'est à dire que

$$\theta(\textstyle\sum_{|m|\geq 1} u_m x^m) = \sum_{|m|\geq 1} \theta_0(m) u_m x^m \ .$$

Exemples.

1°) $\theta = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i x_i(\delta/\delta x_i)$, c'est à dire un champ de vecteurs linéaire semi-simple sous forme de Jordan ,

$$\theta(\textstyle\sum_{|m|\geq 1} u_m x^m) = \sum_{|m|\geq 1} (\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i m_i) u_m x^m \ .$$

Si $\langle \lambda,m\rangle = \sum_{|m|\geq 1} \lambda_i m_i \neq 0$, alors θ^{-1} existe et c'est également un opérateur diagonal :

$$\theta^{-1}(\textstyle\sum_{|m|\geq 1} u_m x^m) = \sum_{|m|\geq 1} (1/\langle \lambda,m\rangle) u_m x^m$$

2°) L'opérateur de Borel,

$$b(u) = \textstyle\sum_{|m|\geq 1} (1/m!) u_m x^m,$$

où $m! = m_1! m_2! \ldots m_n!$,cet opérateur est inversible son inverse:

$$b^{-1}(u) = \textstyle\sum_{|m|\geq 1} (m!) u_m x^m$$

est également diagonal.

3°) Soit $P(X_1,X_2,\ldots,X_n) \in \mathbb{C}[X_1,X_2,\ldots X_n]$ c'est à dire un polynôme en les indéterminées $(X_1,X_2,\ldots X_n)$, l'opérateur

$\theta = P(x_1\delta/\delta x_1, x_2\delta/\delta x_2, \ldots\ldots, x_n\delta/x_n)$ est diagonal avec

$\theta_0(m) = P(m_1,m_2,\ldots,m_n)$.

B) $\mathbf{L_1} = \{ \theta \in \mathbf{L} \mid \mathrm{Mat.}(\theta,(e)) \text{ soit triangulaire inférieure} \}$

ou bien une classe notée $\mathbf{L'_1}$ un peu plus générale dont la matrice à une forme triangulaire mais avec débordement au dessus de la diagonale principale,c'est à dire que

$$\theta(\Sigma_{|m|\geq 1}u_m x^m = \Sigma_{|m|\geq 1}(\Sigma_{k_0\leq k\leq m}\theta_k(m-k)u_{m-k})x^m$$

où $k_0 \in \mathbb{Z}^n$.On appelle **partie diagonale** de θ et on note diag.(θ) l'opérateur

$$\text{diag.}(\theta)(\Sigma_{|m|\geq 1}u_m x^m) \quad = \quad \Sigma_{|m|\geq 1}\theta_0(m)u_m x^m$$

Exemples.

1°).Tout champ de vecteurs linéaire sous forme de Jordan,

$$\Sigma_{1\leq i\leq n}\lambda_i x_i(\delta/\delta x_i) \quad + \quad \Sigma_{1\leq i\leq n-1}a_i x_{i+1}(\delta/\delta x_i) \ ,$$

pour tout $i = 1,2,\ldots,n$; $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

2°) L'opérateur de multiplication par une série formelle $a(x)$,

$$\theta(u) \ = \ a(x).u(x) \ .$$

C) $\mathbf{L_2} = \{\theta \in L \mid \theta(H_p) \subset H_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}\}$,c'est à dire que :

$$\text{Mat.}(\theta,(e)) = \begin{matrix} (A_1) & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & (A_2) & 0 & . & . & . & . \\ \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & (A_p) & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

où pour tout p , (A_p) est la matrice de la restriction θ_p de l' opérateur θ au sous espace vectoriel H_p.Cette matrice est blocs-diagonale.

Exemple.

$$\theta = \sum_{|\alpha|=|\beta|=q} a_{\alpha,\beta} x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}/\delta x^{\beta}) \qquad \text{où } a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C} \quad .$$

D) $\quad L_3 = \{ \ \theta \in L \ \ | \text{ Mat.}(\theta,(e)) \text{ soit blocs triangulaire inférieure } \}.$

Exemple.

$$\theta = \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq q} a_{\alpha,\beta}(x) x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}/\delta x^{\beta})$$

où $a_{\alpha,\beta}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

Les bons opérateurs et la domination.

Soient, φ et ψ deux opérateurs de la classe L_1 nous dirons que φ domine ψ ce que nous écrirons $\varphi \geqslant \psi$, si pour tout m et k,$0 \leqslant k \leqslant m$ on a :

$$|\psi_k(m-k)| \leqslant d_k \, |\varphi_0(m-k)|$$

où la suite $\{d_k\}$ est une suite de nombres positifs vérifiant,

$$\sum_{|k|\geq 0} d_k \, \rho^{|k|} \quad < +\infty$$

pour un nombre $\rho > 0$. Ceci signifie que ψ est dominé par la composition de deux opérateurs qui sont diag.(φ) et multiplication par la série convergente $\sum_{|k|\geq 0} d_k (x_1)^{k_1}(x_2)^{k_2}.....(x_n)^{k_n}$ .Nous dirons que φ **domine strictement** ψ si nous avons de plus :

$$\lim._{|m|\to+\infty} \{\psi_0(m)\}/\{\varphi_0(m)\} = 0.$$

Un **bon opérateur** est par définition un opérateur qui se domine.

Soient φ et ψ deux opérateurs de la classe L_2 c'est à dire la classe des opérateurs dont la matrice est bloc-diagonale,

$$\text{Mat}(\varphi,(e)) = \text{diag.}(A(1),A(2),....A(p),...... \ )$$

$$\text{Mat.}(\psi,(e)) = \text{diag.}(B(1),B(2),.....B(p),....... \ ).$$

Nous dirons que φ domine ψ à partir du rang q ,si pour tout $p > q$ et tout $v \in H_p$; $v = e_p(x)v_p$ nous avons :

$$|B(p)v_p| \leqslant C\, |A(p)v_p| \quad \text{où } C \in \mathbb{R}^+ .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un certain nombre de résultats concernant les opérateurs $\mathbf{L_k}$-analytiques.

Le cas d'une variable.

Dans ce cas la classe d'opérateurs la plus importante est la classe $\mathbf{L_1}$.

Soit D un opérateur $\mathbf{L_1}$-analytique de la forme

$$D(u) = F(x,u,\theta_1 u,\theta_2 u,\ldots,\theta_N u;\varphi_1 u,\varphi_2 u,\ldots,\varphi_M u)$$

où,pour tout $j = 1,2,\ldots,N$, $\theta_j \in \mathbf{L_1}$et pour tout $j = 1,2,\ldots,M$, $\varphi_j \in \mathbf{L_1}$.

Supposons que ,

$$F(x,X_0,X_1,\ldots,X_N;Y_1,Y_2,\ldots,Y_M) = F_p(x,X) + R_{p+1}(x,X,Y)$$

où:

$$F(x,X) = \sum_{\beta+|\alpha|=p} a_{\beta,\alpha} x^{\beta}(X_0)^{\alpha_0}(X_1)^{\alpha_1} \ldots (X_n)^{\alpha_n}$$

et R est une série convergente de valuation strictement supérieure à p par rapport à l'ensemble des variables , x, $X = (X_0,X_1,\ldots,X_N)$et $Y = (Y_1,Y_2,\ldots,Y_M)$.

Introduisons les (N+2) polynômes :

$$C_p(D)(T) = F_p(1,T,T,\ldots,T)$$
$$C_p^{\,j}(D)(T) = (\delta F_p/\delta X_j)(1,T,T,\ldots,T) , \quad \text{pour } j = 0,1,\ldots,N .$$

Faisons les hypothèses suivantes:

il existe $j_0 \in \{0,1,\ldots, N\}$ tel que θ_{j_0} soit **un bon opérateur dominant strictement** θ_k **pour tout** $k \neq j_0$ $(k = 0,1,\ldots, N)$ **et dominant tous les opérateurs** φ_k $(k = 0,1, \ldots, M)$. Alors nous avons :

__Théorème__ 1. __Si les deux polynômes $C_p(T)$ et $C_p^{j\theta}(D)(T)$ n'ont pas de racine commune, l'opérateur D est à singularité régulière.__

Applications .

1) Considèrons $Du = F(x,u,\theta u,\dots,\theta^N u)$ avec $F(0,0,\dots,0) = 0$ où $\theta = xd/dx$ nous avons ,

$$\theta^N > \theta^q \text{ pour tout } q < N \ (q = 0,1,\dots, N-1)$$

Donc si $C_p(D)(T)$ et $C_p^N(D)(T)$ n'ont pas de racine commune cet opérateur différentiel est à singularité régulière.

__Exemple__. $Du = x^2 du/dx - y^2 + x^2$ si on pose $\theta = xd/dx$,
$Du = x\theta u - y^2 + x^2$,l'opérateur θ est un bon opérateur qui domine l'identité, de plus $C_2(D)(T) = T - T^2 + 1$ et $C_2\theta(D)(T) = 1$ n'ont pas de racine commune,l'opérateur D est donc à singularité réguliere.

2) Supposons que θ soit maintenant l'opérateur de Borel,

$$\theta(\textstyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n) = \sum_{n\geq 1}(1/n!)a_n x^n$$

dans ce cas l'opérateur identité domine θ^p pour tout $p = 1,2, \dots ,N$; si $C_p(D)(T)$ et $C_p^0(D)(T)$ n'ont pas de racine commune l'opérateur D est à singularité réguliere.

Exemple . $Du = x\theta u - y^2 + x^2$, $C_2(D)(T) = T - T^2 + 1$ et $C_2^0(D)(T) =-2T$, ces deux polynômes n'ayant pas de racine commune, l'opérateur D est à singularité réguliere.

3) **Le théorème de Maillet.** Tout équation différentiel algébrique

$$(1) \qquad F(x,y,y',\dots , y^{(n)}) = 0,$$

peut après multiplication par une puissance convenable de x être écrite sous la forme ,

$$G(x,y,\theta y, \ldots\ldots, \theta^n y) = 0 \text{ où } \theta = xd/dx \ .$$

Introduisons l'opérateur Gevrey d'ordre α , g_α, c'est à dire l'opérateur

$$g_\alpha(\Sigma_{n\geq 1} a_n x^n) = \Sigma_{n\geq 1} a_n (1/(n!)^\alpha) x^n.$$

Posons $z = g_\alpha(y)$ donc $y = (g_\alpha)^{-1}(z)$ dans l'équation ci dessus ,nous obtenons ainsi l'équation

$$(2) \quad H(x,(g_\alpha)^{-1}(z), \ldots \theta^n((g_\alpha)^{-1}(z))) = 0 \ .$$

Si l'équation (1) admet une solution formelle y alors (2) admet une solution formelle z . Par des calculs explicites on peut voir que par un bon choix de α le théorème énoncé ci-dessus s'applique ,c'est à dire que par un bon choix de α la série formelle z solution de (2) est convergente ,nous obtenons ainsi le théorème suivant de Maillet :

Toute solution formelle d'une équation différentielle algébrique est dans une certaine classe de Gevrey. La valeur exacte de α pour laquelle on à ce résultat n'est pas encore à notre connaissance connue.

4) **Le théorème de Briot-Bouquet.**

Considèrons une équation différentielle de la forme :

$$(1) \qquad xy' = ax + by + R_2(x,y)$$

où plus généraalement une équation différentielle de la forme :

$$(1') \qquad \theta y = ax + by + R_2(x,y,\theta y)$$

où, $\theta = xd/dx$ et $R_2(x,y,Y)$ est une série convergente centrée à l'origine de $\mathbb{C}^3$ de valuation supérieure ou égale à 2.Du théorème nous déduisons immédiatement les résultats suivant :

Toute solution formelle de (1') est convergente .
Si b $\notin \mathbb{N}^* = (\mathbb{N}-\{0\})$ l'équation (1') admet une solution formelle donc une solution holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}$.
Si b$\in\mathbb{N}^*$ et si l'équation (1') admet une solution série formelle, toutes les solution de (1') sont holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}$.
Ici il reste encore un problème intéressant c'est celui de l'étude locale des autres solutions de l'équation de Briot-Bouquet.

5) **Le théorème de Cauchy.**

Considèrons une équation différentielle de la forme :

$$(1) \qquad y' = F(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + R_2(x,y)$$

où $F(x,y)$ est une fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$,que l'on peut donc écrire comme étant une série convergente au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. Le théorème de Cauchy nous dit que cette équation différentielle admet une solution holomorphe unique à l'origine et prenant la valeur zéro en ce point . Nous allons donner deux démonstrations de ce théorème.

a) Multiplions les deux membres de l'équation (1) par x , il vient

$$xy' = a_{0,0}x + a_{1,0}x^2 + a_{0,1}xy + xR_2(x,y)$$

le théorème de Briot - Bouquet nous donne alors le résultat.

b) Utilisons une idée de L.Gärding pour démontrer le théorème de Cauchy-Kowalevska . L'opérateur $y \to y'$ n'est pas bon comme opérateur agissant sur des séries convergentes car il a tendance à restreindre le rayon de convergence alors que l'opérateur $\int_0^x$ n'a pas cet inconvénient.

Posons donc $y' = z$ donc $y = \int_0^x z$ que nous noterons $y = \int z$. Notre équation va s'écrire,

$$z = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}\int z + R_2(x,\int z) ;$$

comme l'opérateur identité domine strictement l'opérateur $\int$,
le théorème 1 nous donne immédiatement le théorème de Cauchy .

Le cas d'une variable avec paramêtres.

A la place de considérer l'anneau $\mathbb{C}[[x]]$,nous pouvons considérer l'un ou l'autre des anneaux $\mathbb{C}[[y]][[x]]$ ou $\mathbb{C}\{y\}[[x]]$, $y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$.En utilisant exactement la même méthode,nous obtenons deux types de résultats,

a) un théorème (1') tout à fait analogue au théorème (1) et dont l'énoncé est similaire ;

b) un théorème du type Artin que nous n'énoncerons pas.

Les applications qui suivent vont montrer assez clairement ce que nous voulons dire.

Applications .

1) Considèrons une équation différentielle à paramêtres de la forme ,

$$xy' = F(x,\lambda,y) \ , \ \lambda =(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_q) \ ,$$

avec $F(0,0,0) = 0$.

Si cette équation admet une solution formelle de la forme ,
$\sum_{n\geq 1}a_n(\lambda)x^n$ où $a_0(0) = 0$ et $a_n(\lambda) \in \mathbb{C}\{\lambda\}$ pour tout n, cette série converge .

Si $a_n(\lambda) \in \mathbb{C}[[\lambda]]$,il existe une solution formelle de la forme
$\sum_{n\geq 1}b_n(\lambda)x^n$ où $b_n(\lambda) \in \mathbb{C}\{\lambda\}$ qui donc converge.

Ce résultat justifie l'appellation de théorème du type d'Artin.

2) Considèrons un opérateur différentielle de la forme :

$$\theta^n y + P_1(t,x,\delta/\delta t)\theta^{n-1}y + \ldots + P_n(t,x,\delta/\delta t)y = F(x,y)$$

où; $\theta = xd/dx$,$t = (t_1,t_2,\ldots,t_q)$, P_i est pour tout $i = 1,2,\ldots,n$, un opérateur différentielle analytique à l'origine de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^q$.

Si :

a) ord.(P_i) $\leqslant$ i ,pour tout i;

b) ord.($P_i(t,0,\delta/\delta t)$ = 0 .

Tout solution formelle est convergente.

Cette équation a été étudiée dans le cas linéaire par un certains nombres de mathématiciens : Baouendi – Goullaouic, Tahara,Parenti,. . .

Cette équation est une généralisation de l'équation classique d'Euler –Poisson – Darboux :

$\delta^2u/\delta t^2 + (k/t)\delta u/\delta t - \Delta u = 0$,où Δ désigne le Laplacien en les variables espace $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Cette équation s'écrit :

$$\theta^2 u + (k-1)\theta u - t^2\Delta u = 0;$$

le paramêtre est ici $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

<u>Idée de la démonstration.</u> Remplacer l'équation par une équation majorante à laquelle il sera possible d'appliquer le théorème 1. Pour ce faire on utilise une généralisation à plusieurs variables des inégalités suivantes: si $v(x)$ est analytique dans $|x| < R$ et vérifie ;

$$|v(x)| \leqslant C/(R-|x|)^a \quad \text{pour } |x|<R \text{ et } a \in R^+$$

alors ,

$$|(dv/dx)(x)| \leqslant Ce(1+a)/(R-|x|)^{a+1} \quad , \text{Log.}e = 1.$$

Ces inégalitées étendues au cas de plusieurs variables permettent de majorer les opérateurs $P_i(x,t,\delta/\delta x)$ par des opérateurs de multiplication.

On peut étendre aisément le résultat ci-dessus au cas où la partie non linéaire de l'opérateur contient $\theta,\ldots,\theta^n$.

Le cas de plusieurs variables.

Dans cette partie $x = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$, considèrons un opérateur :

$Du = \sum_{|\beta|+|\alpha|=1} a_{\beta,\alpha} x^{\beta} u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \ldots (\theta_N u)^{\alpha_N} + R_2(x, u, \theta_1 u, \ldots, \theta_N u; \theta'_1 u, \ldots, \theta'_M u)$

nous supposons que l'opérateur D a une partie linéaire,en fait si un tel opérateur n'a pas de partie linéaire il a rarement des solutions formelles .

La partie linéaire de D peut s'écrire sous la forme ;

$$D_1 u = \sum_{0 \leq i \leq N} a_i \theta_i u + b_1 u$$

Supposons que tous les opérateurs linéaires figurant dans D appartiennent à la classe $\mathbf{L_1}$ (opérateurs triangulaires) alors ,

<u>Théorème 2</u>. Si parmi les opérateurs $\theta_0 = id., \theta_1, \ldots, \theta_N$,il y a un bon opérateur disons θ_j tel que ,

– θ_j domine strictement θ_k pour tout $k \neq j$ et $k = 1, 2, \ldots, N$;

– θ_j domine les opérateurs θ'_k pour tout $k = 1, 2, \ldots, M$.

Si $a_j \neq 0$,l'opérateur D est singulier régulier.

Applications.

Soit $\tau = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i (\delta/\delta x_i)$ un champ de vecteurs semi-simple sous forme de Jordan qui satisfait à la condition de Poincaré:

$$\left|\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i m_i\right| \geqslant c|m| \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}^n.$$

1) Considèrons un opérateur analytique ,

$$Du = \sum_{0 \leq i \leq N} a_i(x,u) \tau^{N-i} u \ ,$$

la partie linéaire est:

$$D_1 u = \sum_{0 \leq i \leq N} a_i(0,0) \tau^{N-i} u \ .$$

Si $a_0(0,0) \neq 0$ l'opérateur D est singulier régulier.

Le même résultat est vrai pour un opérateur non linéaire de la forme :

$$Du = \sum_{0 \leq i \leq N} a_i(x,u) \tau^{N-i} u + R_2(x, u, \tau u, \ldots, \tau^N u) \ .$$

2) Les opérateurs d'Euler-Poisson-Darboux généralisés.

$Du = \tau^N u + P_1(t,x,\delta/\delta t)\,\tau^{N-1}u + \ldots + P_N(t,x,\delta/\delta t)u$ + (termes d'ordre supérieurs en t,x,u).

Rappelons que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $t = (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ et que τ est un champ de vecteurs du type de Poincaré. Avec les hypothèses que nous avons énoncées dans le cas d'une variable sur les opérateurs P_i nous avons : **l'opérateur D est singulier régulier** .

Supposons maintenant que les opérateurs linéaires qui figurent dans notre opérateur analytique non linéaire appartiennent à la classe L'_1, c'est à dire sont des opérateurs de la forme :

$$\theta(\Sigma_{|m|\geq 1} u_m x^m = \Sigma_{|m|\geq 1}(\Sigma_{k_0 \leq k \leq m} \theta_k(m-k)u_{m-k})x^m$$

dans ce cas nous avons également des théorèmes du type suivant:

a) théorème de singularité régulière analogue au théorème 2;

b) un théorème sur des opérateurs non linéaires contenant des paramètres analogue à un résultat énoncé plus haut;

c) un théorème du type Artin.En ce qui concerne ce type de résultats nous donnons seulement une référence:

G.Bengel and R.Gérard .Formal and convergent solutions of singular partial differential equations .
Manuscripta Mathematica,38,343-373,(1982).

Nous allons nous contenter d'expliquer ces résultats par leurs applications.

1) **Linéarisation d'un champ de vecteurs singulier**.

Soit $\tau = \Sigma_{1\leq i\leq n} a_i(x)(\delta/\delta x_i)$ un champ de vecteurs singulier en $0 \in \mathbb{C}^n$,c'est à dire que $a_i(0) = 0$ pour tout $i = 1,2,\ldots,n$ .Si la matrice jacobienne de τ a des valeurs propres qui satisfont à la condition de Poincaré alors le champ de vecteurs τ est linéarisable par une transformation analytique.

2) Le théorème de S.Kaplan.

Soit $\tau = \sum_{1\leq i\leq n} a_i(x)(\delta/\delta x_i)$ un champ de vecteurs singulier à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Notons S le sous ensemble analytique de $\mathbb{C}^n$ donné par les équations,

$$a_i(x) = 0 \quad , i = 1,2,\ldots,n.$$

Faisons les hypothèses suivantes :

A) S <u>définit à l'origine de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>un germe de sous variété de dimension s</u> .
Posons $d = n-s$,par un changement analytique de coordonnées ,on peut supposer que la matrice jacobienne de τ qui est de rang d à la forme suivante:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \lambda_1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \lambda_2 & \alpha_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{d-1} & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & 0 & \cdot & \cdot\ 0 & \lambda_d & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 & 0 & \cdot & \cdot & 0\ \ 0 & 0 & \cdot & \cdot & & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0
\end{array}$$

B) Les valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\ldots \lambda_d$,vérifient la condition de Poincaré,nous obtenons alors le théorème suivant qui a été démontré en premier lieu par S. Kaplan :

Si l'équation $\tau u = F(x,u)$ où $F(0,0) = 0$ admet une solution formelle alors elle admet une solution holomorphe .

<u>Remarque</u>. Ce n'est pas nécessairement la solution formelle qui converge .

<u>Idée de la démonstration</u>. Nous avons à appliquer plusieurs fois notre théorème du type Artin.

1^{ere} étape : trouver la forme de Jordan formelle du champ de vecteurs τ.

2°) étape : formellement on peut mettre le champ de vecteurs τ sous forme canonique de Jordan,mais vu notre théorème du type Artin ceci peut être fait par une transformation analytique .

3° étape : Appliquer à l'équation réduite le théorème de convergence ci-dessus.

<u>Un problème ouvert</u>. Le théorème de S.Kaplan est-il encore valable si on suppose seulement que les valeurs propres non nulles du champ de vecteurs τ , $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ \lambda_d$ vérifie une condition de Siegel:

$$|\Sigma_{1\leq i\leq d}\lambda_i m_i| \geqslant c(m_1 + m_2+\ldots+ m_d) \quad ?$$

Supposons maintenant que les opérateurs linéaires figurant dans notre opérateur analytique sont dans la classe L_3 (opérateurs blocs diagonaux) ,c'est à dire $\theta \in L_3$ si et seulement si $\theta(H_p(x)) \subset H_p(x)$ .Rappelons que $H_p(x)$ est l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré p .

Toute série formelle u $\in\mathbb{C}[[x]]$ peut s'écrire sous la forme ,

$u = \Sigma_{p\geq 1}u_p(x)$ où pour tout p, $u_p(x) \in H_p(x)$, donc

$$u_p(x) = e_p(x)u_p$$

$$(e_p(x)) = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_{\delta(p)} \end{matrix} = e_p(x)(u_p)$$

où $e_p(x)$ est la base habituelle de $H_p(x)$ et $\delta(p)$ la dimension sur $\mathbb{C}$ de $H_p(x)$.

Tout opérateur $\theta \in L_3$ opère donc de la manière suivante :

$$\theta(\Sigma_{p\geq 1}u_p(x)\ ) \quad = \Sigma_{p\geq 1}e_p(x)A(p)(u_p)\ ,$$

où A(p) est la matrice de la restriction de θ au sous -espace $H_p(x)$. Rappelons que si deux opérateurs θ^1 et θ^2 sont deux opérateurs linéaires de la classe L_3 ,θ^1domine θ^2 à partir du rang q ,si pour tout p >q et tout $v \in H_p(x)$, $v = e_p(x)v_p$;

$$|A^2(p)v_p| \leqslant C_{1,2}|A^1(p)v_p|$$

où pour tout i =1,2; et tout p, $A^i(p)$ est la matrice de θ^i dans la base $e_p(x)$ de $H_p(x)$. Considèrons maintenant un opérateur L_3- analytique :

$$Du = F(x,u,\theta_1u,\theta_2u,\ldots\theta_Nu)$$
$$= \Sigma_{1\leq i\leq n}b_ix_i - \Sigma_{1\leq i\leq m}\alpha_i\theta_iu + R_2(x,u,\theta_1u,\ldots,\theta_Nu)\ ,$$

où , $m \leqslant N$,et pour tout i = 1,2,. . . N , $\theta_i \in L_3$, ,$\alpha_i \neq 0$.

Si nous notons Θ l'opérateur $\Sigma_{1\leq i\leq m}\alpha_i\theta_i$,l'équation Du = 0 peut s'écrire,

$$(\,*\,) \qquad \Theta u = \Sigma_{1\leq i\leq n}b_ix_i + R_2(x,u,\theta_1u,\ldots,\theta_Nu)\ .$$

Nous avons,

<u>Théorème</u> 3. Si l'opérateur Θ domine à partir d'un rang q les opérateurs θ_0= id. ,θ_1 ,. . . .,θ_N ; alors l'opérateur D est singulier régulier.

<u>Une idée de la démonstration lorsque q= 1.</u>

$$\Theta\,(\Sigma_{p\geq 1}e_p(x)u_p) \quad = \quad \Sigma_{p\geq 1}e_p(x)A(p)u_p\ ,$$

comme l'opérateur Θ domine l'identité,toutes les matrices A(p) sont inversibles .Introduisons dans l'équation (*) une série formelle,

$u = \sum_{p\geq 1} e_p(x)u_p$, par identification nous obtenons :

$$A(1)u_1 = b = {}^t(b_1,b_2,\ldots,b_n)\ ,$$

et pour $p > 1$,

$A(p)u_p = f_p(u_1,u_2,\ldots u_{p-1};A(1)u_1,A(2)u_2,\ldots,A(p-1)u_{p-1};\ldots;A_N(1)u_1,\ldots\ldots,A_N(p-1)u_{p-1};(R_2))$;

où ,pour tout q, $A_j(q)$ est la matrice de la restriction de θ_j à $H_q(x)$ dans la base $e_q(x)$; (R_2) désigne la suite des coéfficients de la série R_2 seulement un nombre fini d'entre eux figurent dans f_p.De plus f_p est un polynôme en ses arguments.

Comme Θ domine les opérateurs $\theta_0 = id.,\theta_1,\ldots,\theta_N$; nous avons, pour tout $i = 1,2,\ldots,N$; et tout $v = e_p(x)v_p \in H_p(x)$,

$$|A_i(p)v_p| \leqslant c\,|A(p)v_p|\ ,\ c \in \mathbb{R}^+ .$$

L'inversibilité des matrices A(p) entraine l'existence d'une solution formelle , cette solution est de plus unique lorsque q= 1.

Soit $|R_2|(x,X_0,X_1,\ldots,X_N)$ une série convergente majorante de la série $R_2(x,X_0,X_1,\ldots,X_N)$ .Considèrons l'équation analytique :

(**) $\qquad \sigma y = \sum_{1\leq i\leq n} \psi_i x_i + |R_2|(x,cy,cy,\ldots,cy)$

où, σ et $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N$ sont des constantes positives que nous seront amené à choisir conenablement.Le théorème des fonctions implicites nous dit que l'équation (**) admet une solution holomorphe unique de la forme $y = \sum_{p\geq 1} e_p(x)y_p$ où les coéfficients y_p sont tous positifs et donnés par récurrence par les formulles:

$$\sigma y = \psi = {}^t(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N)\ , \qquad \text{et pour } p > 1 \text{ par,}$$

$$\sigma y_p = f_p{}^*(cy_1,cy_2,\ldots,cy_{p-1};cy_1,cy_2,\ldots,cy_{p-1};cy_1,cy_2,\ldots,cy_{p-1};|R_2|)$$

où $f_p{}^*$ est obtenu à partir de f_p en remplaçant les coéfficients de R_2 par ceux de $|R_2|$ .Par un bon choix des coéfficients $\sigma,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N$ nous allons voir que la série y est une série majorante de la série formelle u solution de l'équation (*).Soit $y_1{}^*$ un nombre positif vérifiant,

$$|u_1| \leqslant c\,|A(1)u_1| \leqslant c\,y_1{}^*$$

où u_1 est donné par $A(1)u_1 = b$.

Soit maintenant un nombre σ, $0 < \sigma < 1$,posons $y = \sigma y_1{}^*$,il est alors facile de voir que :

1°) tous les coéfficients de la série convergente y solution de (**) sont tous positifs;

2°) par récurrence ,

$|u_p| \leqslant c|A(p)u_p| \leqslant c\, y_p$. Ce qui prouve la convergence de la série formelle solution de l'équation (*).

Application. Considèrons l'opérateur différentiel,

$$Pu = \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} a_{\alpha,\beta}(x)x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}/\delta x^{\beta}) \ ,$$

cet opérateur est $\mathbf{L_3}$ - analytique,associons lui l'opérateur,

$$P_0 u = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(0)x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}/\delta x^{\beta})$$

Kashiwara,M. ; Kawai,T. et Sjöstrand ont démontré que sous la condition:

$$(\nabla) \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha,\beta}(0)x^{\alpha}x^{\beta} \neq 0 \quad \text{sur } \mathbb{C}^n - \{0\}$$

l'opérateur P est à <u>singularité réguliere</u>. Pour démontrer ce résultat ils utilisent des techniques de la théorie des équation aux dérivées partielles (espace de Sobolev,....).La condition (∇) signifie que les sphères centrées à l'origine de $\mathbb{C}^n$ sont non caractéristiques.Pour démontrer leur résultat ils démontrent en utilisant la théorie des espaces de Sobolev un lemme technique qui en fait dit que l'opérateur P_0 domine tous les opérateurs $x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}/\delta x^{\beta})$ pour tout α,β, vérifiant $|\alpha| = |\beta| < m$. Le résultat de Kashiwara - Kawai -Sjöstrand est alors un corollaire du théorème énoncé ci-dessus.

La condition (∇) n'est pas invariante par changement de coordonnées.Par contre les conditions de domination sont invariantes par changement de coordonnées et de plus invariantes par petites perturbations .Cette condition de domination n'est pas équivalente à la condition (∇) elle est en un certain sens plus faible.Il est d'autre part facile de démontrer directement le fait que l'opérateur P_0 domine tous les opérateurs $x^{\alpha}(\partial^{|\beta|}/\delta x^{\beta})$ pour tout α,β;vérifiant $|\alpha| = |\beta| < m$ et ceci sans utiliser la notion d'espace de Sobolev.Nous obtenons de plus un résultat dans le cas non linéaire :

Toute solution formelle d'une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$Pu = R_2(x\ ,\ \{x^{\alpha}(\delta^{|\beta|}u/\delta x^{\beta})\}_{|\alpha|=|\beta|<m})$$

est convergente.

Références bibliographiques.

{1} **Gérard R., A.H.M. Levelt.** Sur les connexions à singularités régulières dans le cas de plusieurs variables.Funkcial. Ekvac.19,149-173 (1973).

{2} **Kaplan S.** Formal and convergent power series solutions of singular partial differential equations.Trans. Amer. Math. Soc. 256.,163-183 (1979).

{3} **Artin M.** On the solution of analytic equations. Invent. Math.5, 277-291 (1968).

{4} **Kashiwara M., Kawai T., Sjöstrand J.** On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge. Ark. f. Math. 17, 83-91 (1979).

{5} **Oshima T.** On the theorem of Cauchy - Kowalevsky for first order linear differential equations with degenerate principal symbols. Proc. Japan Acad. 49, 83-87 (1973).

{6} **Bengel G., Gérard R.** Formal and convergent solutions of singular partial differential equations . Manuscripta Math. 38, 343-373 (1982).

{7} **Gérard R.** Une classe d'équations différentielles non linéaires à singularité réguliere. Funkcial. Ekvac. 29, N°1 (1986).

{8} **Gérard R.** Une classe d'opérateurs singuliers non linéaires à singularité réguliere. Séminaire Vaillant (1984) .Travaux en cours Hermann, Paris.

{9} **Gérard R.** Même titre . Séminaire Dolbeault- Lelong - Skoda (1983), Springer-Verlag, Lecture Notes.