RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR
PROGRAMME N^{o} 25

M. ROSSO

Groupes quantiques de Drinfeld et Woronowicz

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1987, tome 38
« Conférences de H. Grosse, M. Henneaux, J.M. Maillard, M. Rosso et W. Zimmermann »,
, exp. n^{o} 5, p. 67-82

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1987__38__67_0>

GROUPES QUANTIQUES DE DRINFELD ET WORONOWICZ

par M. ROSSO

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex

"Unité Associée au C.N.R.S. n° 169"

M794.0587

Mai 1987

INTRODUCTION. Qu'est-ce qu'un groupe quantique ?

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par espace quantique. Nous adoptons un point de vue algébrique, qui peut être motivé par le fait suivant : alors qu'en mécanique classique, les états d'un système sont décrits par les points d'une variété M (l'espace des phases) et les observables par des fonctions sur M , en mécanique quantique les états sont des droites dans un espace de Hilbert et les observables des opérateurs dans cet espace de Hilbert. Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique peut donc être vu comme le fait de remplacer l'algèbre associative et commutative des fonctions sur M par une algèbre associative et non commutative d'opérateurs. Un "espace quantique" est donc un "espace non commutatif", en ce sens qu'il est décrit par son "algèbre de fonctions continues à valeurs complexes", cette algèbre n'étant plus nécessairement commutative.

On s'intéresse alors aux objets de la catégorie des espaces quantiques possédant une structure de groupe. Pour comprendre ce que cela signifie, il faut traduire au niveau de l'algèbre des fonctions continues $C(G)$, ce que signifie, pour G, que d'être un groupe.

L'opération de groupe $\pi : G \times G \to G$ détermine un homomorphisme d'algèbres $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ et l'associativité de π , se traduit par la coassociativité de Δ : $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$.

L'existence d'un élément neutre se traduit par celle d'une augmentation

$$\begin{array}{rl} \varepsilon : C(G) & \longrightarrow C \\ f & \longmapsto f(e) \end{array} \qquad \text{qui vérifie} \qquad \begin{tikzcd} C(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & C(G) \otimes C(G) \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes \varepsilon"] \\ & C(G) \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif.

L'existence d'un inverse se traduit par celle d'un antihomomorphisme d'algèbres S , appelé antipode, tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
C(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & C(G)\otimes C(G) \arrow[r, "S\otimes Id"] & C(G)\otimes C(G) \arrow[r, "m"] & C(G) \\
& \mathbb{C} \arrow[urr, hook, "i"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C(G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & C(G)\otimes C(G) \arrow[r, "Id\otimes S"] & C(G)\otimes C(G) \arrow[r, "m"] & C(G) \\
& \mathbb{C} \arrow[urr, hook, "i"] & &
\end{tikzcd}$$

(m désigne le produit dans C(G) et i l'injection $\mathbb{C} \hookrightarrow C(G)$, $z \mapsto z.\mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1, élément neutre pour m).

On obtient ainsi une algèbre de Hopf (C(G),m,Δ,i,&,S) avec unité i, counité & , antipode S, qui dans le cas des espaces usuels est commutative.

<ins>Définition</ins>. La catégorie des groupes quantiques est la catégorie duale de la catégorie des algèbres de Hopf avec unité i, counité & , antipode S et anti-antipode S' : i.e. on considère des algèbres unitaires (A,m,i) munies d'un coproduit Δ , d'une augmentation & , d'une antipode S vérifiant les mêmes propriétés que ci-dessus; de plus, dans le cas général A n'est ni commutative, ni co-commutative (ceci signifiant que Δ' , défini par $\Delta' = \sigma \circ \Delta$ où $\sigma : A\otimes A \to A\otimes A$, $x\otimes y \to y\otimes x$, n'est pas égal à Δ). Lorsque A n'est ni commutative, ni co-commutative on définit l'antiantipode S' comme l'antihomomorphisme d'algèbres $S' : A \to A$ rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr] & A\otimes A \arrow[r, "S'\otimes Id"] & A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \\
& \mathbb{C} \arrow[urr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr] & A\otimes A \arrow[r] & A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \\
& \mathbb{C} \arrow[urr, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Il s'agit maintenant de construire des exemples de groupes quantiques non triviaux (i.e. qui ne sont pas des groupes usuels), donc des algèbres de Hopf non commutatives.

Remarque. Si G est une algèbre de Lie, alors son algèbre enveloppante universelle UG est une algèbre de Hopf non commutative (le coproduit étant entièrement défini par ses valeurs sur les éléments de G et sur ces éléments $x \in G$ il est donné par : $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$). Cependant comme il est clair sur la formule ci-dessus, cette algèbre de Hopf est cocommutative et d'autre part cet exemple n'est pas plus général que celui des fonctions continues ou plus généralement régulières sur un groupe usuel. En effet, si G est l'algèbre de Lie du groupe de Lie G , alors UG est un sous-espace du dual $(C^{\infty}(G))^*$ et, d'un autre point de vue, $(UG)^*$ s'identifie à l'anneau des fonctions sur le groupe formel associé à G .

La question intéressante est donc de construire des algèbres de Hopf non commutatives et non cocommutatives.

Nous allons décrire deux approches a priori indépendantes à de telles constructions. L'une, due à Drinfeld s'inscrit dans un cadre formel et utilise la théorie des déformations; l'autre, due à Woronowicz, s'inscrit dans le cadre de la théorie des C^*-algèbres et de la topologie non commutative.

Nous montrerons ensuite comment une certaine classe d'exemples de l'approche de Woronowicz peut apparaître comme une spécialisation d'une certaine classe d'exemples de l'approche de Drinfeld : en fait, la relation entre ces deux exemples est une généralisation "quantique" des relations entre groupe de Lie compact et groupe algébrique complexe associé.

I. L'APPROCHE DE DRINFELD.

L'idée est de "quantifier" un groupe usuel en utilisant la théorie des déformations (développée par Gernsterhaber puis Lichnérowicz, Vey, Flato, Sternheimer,...). Tout ceci s'inspire de la méthode du scattering inverse dans l'étude des systèmes quantiques complètement intégrables (due à Faddeev et l'école de Léningrad : Kulish, Reshetikhin, Sklyanin, Takhtajian entre autres, puis à l'école japonaise autour de Jimbo, Miwa,...).

1. Motivation : Systèmes complètement intégrables et scattering inverse classique et quantique.

Donnons rapidement, sur une classe d'exemples de systèmes complètement intégrables, le schéma des méthodes utilisées afin de voir comment s'introduisent naturellement les notions développées par la suite.(Les exemples de groupes quantiques que nous décrirons en détail par la suite sont ceux provenant de l'étude de ces systèmes).

a_o . Le système Toda classique et ses généralisations.

Considérons le système mécanique constitué de n particules ponctuelles sur une droite (soient $x_1,..,x_n$ leurs positions), chaque particule n'interagissant qu'avec ses plus proches voisins et avec un potentiel d'interaction exponentiel : l'équation du mouvement de la i^o particule est donc donnée par

$\ddot{x}_i = e^{x_{i-1}-x_i} - e^{x_i-x_{i+1}}$.

On reconnait les formes linéaires $(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_i - x_{i+1}$, qui sont les racines de $s\ell(n)$, ce qui a conduit les gens à s'intéresser au système de Toda généralisé (GTS) associé à chaque algèbre de Lie simple G et défini comme suit :

Soit h une sous-algèbre de Cartan, R un système de racines simples. On considère le système dynamique pour une fonction $\phi = \phi(t)$ à valeurs dans h et dont l'équation d'évolution est :

$$(E) \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = - \sum_{\alpha\in R} 2\alpha\, e^{\alpha(\phi)}$$

Par exemple, pour $s\ell(n+1)$: $\phi = \mathrm{diag}(\phi_o,\ldots,\phi_n)$ avec $\sum_{i=o}^{n} \phi_i = 0$ et on obtient

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} = 2\, e^{2(\phi_{i-1}-\phi_i)} - 2\, e^{2(\phi_i-\phi_{i+1})} \quad .$$

L'espace des phases est $h\oplus h^*$ et on définit les crochets de Poisson de la façon habituelle:soit (h_i) une base de h, (h_i^*) la base duale, (ϕ_i) et (π_i) les formes linéaires coordonnées correspondantes (i.e. $\phi \in h$ s'écrit $\phi = \Sigma\phi_i h_i$ et $\pi \in h^*$ s'écrit $\pi = \Sigma\, \pi_i h_i^*$). Alors on pose $\{\pi_i,\phi_j\} = \delta_{ij}$.

On s'intéresse à la complète intégrabilité du système : on cherche n intégrables premières indépendantes et en involution.

Une situation particulièrement favorable est celle où on peut associer au système une paire de Lax (L,A) : ici, L et A sont des fonctions sur l'espace des phases à valeurs dans G telles que (E) soit équivalente, pour $t \mapsto L(\phi(t),\pi(t))$ et $t \mapsto A(\phi(t),\pi(t))$, à :

$$\frac{dL}{dt} = [A,L]$$

Pour GTS , L et A sont donnés par :

$$\begin{cases} L = \pi^v + \sum_{\alpha\in R} e^{\alpha(\phi)}(e_\alpha+f_\alpha) \\ A = \sum_{\alpha\in R} e^{\alpha(\phi)}(-e_\alpha+f_\alpha) \end{cases}$$

où π^v est l'image de π dans h par l'isomorphisme $h^* \to h^*$ induit par la forme de Killing

On constate que le long d'une trajectoire $t \mapsto (\phi(t),\pi(t))$, $t \mapsto L(t)$ est une "déformation isospectrale", si bien que les valeurs propres de L (qui sont des fonctions des variables canoniques ϕ_i,π_j) sont des intégrales premières du mouvement.

Il est commode de s'intéresser plutôt à leurs fonctions symétriques, i.e. aux fonctions $\mathrm{Tr}L^k$, et il s'agit de savoir si ces fonctions sont en involution. (On voit G comme une algèbre de Lie de matrices et Tr est la trace usuelle).

Pour calculer $\{\mathrm{Tr}L^j,\mathrm{Tr}\,L^k\}$, il est commode de commencer par calculer les crochets de Poisson des coefficients matriciaux de L.

En fait, si on note, pour $L = \Sigma f_{ij}\, U_{ij}$, $\{L \underset{;}{\otimes} L\} = \Sigma\{f_{ij}, f_{k\ell}\} U_{ij} \otimes U_{k\ell}$ (où U_{ij} sont les unités matricielles), alors les formules :

$$\{\mathrm{Tr}\, L, \mathrm{Tr}\, M\} = \mathrm{Tr}(\{L \underset{;}{\otimes} M\})$$

$$\{L \underset{;}{\otimes} MN\} = (\mathrm{Id} \otimes M)\, \{L \underset{;}{\otimes} N\} + \{L \underset{;}{\otimes} M\}\, (\mathrm{Id} \otimes N)$$

montrent que les $\{\mathrm{Tr}\, L^j,\mathrm{Tr}\, L^k\}$ sont entièrement déterminés par la connaissance de la matrice $\{L \otimes L\}$.

Le point de départ de la méthode du scattering inverse classique est l'existence d'un élément r de $G \otimes G$ tel que

$$\{L \underset{;}{\otimes} L\} = [r, L \otimes 1 + 1 \otimes L]$$

et on note que le membre de droite s'écrit $\partial r(L)$ où ∂ est le cobord pour la cohomologie de G à valeurs dans $G \otimes G$ avec l'action adjointe et $r \in G \otimes G$ est vu comme une 0-cochaîne.

De plus, dans de nombreux cas, r satisfait à l'équation de Yang-Baxter classique $[r^{12},r^{13}] + [r^{12},r^{23}] + [r^{13},r^{23}] = 0$ où, par exemple, si $r = \Sigma\, a_i \otimes b_i$ $r^{13} = \Sigma a_i \otimes 1 \otimes b_i \in U\ G \otimes U G \otimes\ UG$ (L'identité de Jacobi pour le crochet de Poisson implique uniquement que $[r^{12},r^{13}] + [r^{12},r^{23}] + [r^{13},r^{23}]$ est G-invariant).

b_o - <u>En vue d'une quantification du système</u> :

On veut remplacer les variables canoniques par des opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et les crochets de Poisson par $i\hbar\, [\ ,]$ où $[,]$ est le commutateur usuel. Le problème de la complète intégrabilité pour le système quantique consiste à trouver une algèbre commutative d'observables (i.e. d'opérateurs dans $\mathcal{H}$) qui commutent avec le Hamiltonien et qui soit suffisamment grande.

Si on veut suivre une méthode analogue à celle du cas classique, on voit que les coefficients de la "matrice L" seront des opérateurs dans $\mathcal{H}$ et donc ne commutent plus ! Pour établir une équation de type Lax, il est nécessaire d'introduire des termes "polynomiaux" en les opérateurs canoniques, i.e. de se placer dans UG ; de plus, la présence de $\hbar$ dans les relations de commutations conduit à des séries formelles en $\hbar$ et donc à des déformations de UG, soit $\widehat{UG}$.

Maintenant, en vue d'une étude de complète intégrabilité, il nous faut connaître les relations de commutation entre les coefficients de L et celles-ci sont encodées dans la formule.

$$R(L\otimes 1)(1\otimes L) = (1\otimes L)(L\otimes 1)R$$

où $R\in \widehat{UG}\otimes\widehat{UG}$ est inversible et satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique :

$$R^{12}\, R^{13}\, R^{23} = R^{23}\, R^{13}\, R^{12}$$

En conclusion : L'étude de la complète intégrabilité du système classique nous à conduit à introduire une algèbre de Lie G avec une structure supplémentaire donnée par r ; l'étude de la quantification du système conduit à des déformations de UG avec l'existence de l'élément particulier R .

Nous allons formaliser cela.

2. - Bialgèbres de Lie et quantification d'algèbres enveloppantes universelles.

a. - Structure de bialgèbre de Lie sur une algèbre de Lie G

. Définition : C'est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur G^* qui est compatible avec celle de G au sens suivant :
l'application $\varphi : G \to G\otimes G$ (déduite du crochet $G^*\otimes G^*\to G^*$ par transposition) est un 1-cocycle de G à valeurs dans $G\otimes G$ pour l'action adjointe.

Ceci équivaut à dire qu'il existe sur $G\oplus G^*$ une structure d'algèbre de Lie induisant les structures données sur G et G^* et telle que la forme bilinéaire $Q : (G\oplus G^*)\times(G\oplus G^*) \to \mathbb{C}$ soit ad-invariante.

$$((x_1,\ell_1),(x_2,\ell_2)) \mapsto \ell_1(x_2)+\ell_2(x_1)$$

Dans le cas où le 1-cocycle φ est le cobord d'une 0-cochaîne $r\in G\otimes G$ la bialgèbre de Lie est dite quasitriangulaire : c'est le cas dans l'exemple du système Toda généralisé.

Lorsque, de plus, $r\in \Lambda^2 G$, la bialgèbre de Lie est dite triangulaire.

. Exemple. Soit G une algèbre de Lie simple, h une sous-algèbre de Cartan, (α_i) un système de racines simples, $H_i\in h$ les éléments correspondants,

$G = N_- \oplus h \oplus N_+$ la décomposition triangulaire et X_i^-, X_i^-, H_i les générateurs canoniques.

Un co-commutateur $\varphi : G \to \Lambda^2 G$ est entièrement défini par ses valeurs sur X_i^+, X_i^-, H_i et on vérifie que les formules suivantes définissent sur G une structure de bialgèbre de Lie :

$$\varphi(H_i) = 0 \quad \varphi(X_i^{\pm}) = \frac{1}{2} X_i^{\pm} \wedge H_i \quad .$$

b_o . Quantification de UG .

. Définition : C'est une algèbre de Hopf topologique A sur $\mathbb{C}[[h]]$, qui est un $\mathbb{C}[[h]]$ -module topologiquement libre et telle que A/hA est identique à UG comme algèbre de Hopf.

Remarque : Si Δ désigne le coproduit de A et $\sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ est donnée par : $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$, alors,

$$\forall\ x \in A \quad \Delta(x) - \sigma(\Delta(x)) \in hA$$

et on peut définir une application linéaire $\delta : UG \to UG \otimes UG$ par :

$$\delta(x \bmod h) = \frac{\Delta(x) - \sigma(\Delta(x))}{h} \bmod h \quad (\underline{NB} : UG \simeq A/hA)$$

UG , munie de son produit m_o , de son coproduit Δ_o et de δ est alors une algèbre de Hopf co-Poisson en ce sens que δ satisfait aux axiomes duaux de ceux définissant une algèbre de Hopf-Poisson.

Ainsi, toute quantification de UG induit sur UG une structure d'algèbre de Hopf co-Poisson. On peut donc supposer que UG est munie a priori d'une telle structure et ne s'intéresser qu'aux quantifications de UG induisant par le procédé ci-dessus la structure donnée.

. Lien avec une structure de bialgèbre de Lie sur G

Théorème : Soit G une algèbre de Lie et $\delta : UG \to UG \otimes UG$ munissant UG d'une structure d'algèbre de Hopf co-Poisson.

Alors $\delta(G) \subset G \otimes G$ et l'application induite $\varphi : G \to G \otimes G$ confère à G une structure de bialgèbre de Lie.

Inversement : Si (G,φ) est une bialgèbre de Lie, alors il y a une unique application $\delta : UG \to UG \otimes UG$ qui prolonge φ et munit UG d'une structure d'algèbre de Hopf-co-Poisson.

Finalement, les structures que l'on cherche à quantifier sont celles de bialgèbres de Lie, et ceci est consistant avec la motivation donnée par les systèmes complètement intégrables puisqu'à (certains) systèmes classiques on a justement associé des bialgèbres de Lie.

Exemple : Quantification des bialgèbres de Lie apparues ci-dessus dans a. Exemple.

Les notations étant les mêmes que ci-dessus, soit UhG la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre engendrée au sens h adique par h , X_i^+ , X_i^- avec les relations :

$$[H_1,h_2] = 0 \quad \forall h_1,h_2 \in h$$

$$[H,X_i^\pm] = \pm\alpha_i(H)X_i^\pm \quad \forall H \in h$$

$$[X_i^+,X_j^-] = \delta_{ij}\,\frac{sh(\frac{h}{2}H_i)}{\frac{h}{2}}$$

Pour $i \neq j$, en posant $n = 1 - A_{ij}$ et $q = \exp(\frac{h}{2} < H_i, H_i >)$

$$\sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}_q \; q^{-\frac{k(n-k)}{2}} \; (X_i^\pm)^k \, X_j^\pm (X_i^\pm)^{n-k} = 0$$

où (A_{ij}) est la matrice de Cartan et $\binom{n}{k}_q = \dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\dots(q-1)}$

est le polynôme de Gauss.

Le coproduit $\Delta : U_hG \to U_hG \otimes U_hG$ est défini par :

$$\Delta(H) = H\otimes 1 + 1\otimes H \quad \forall H \in h$$

$$\Delta(X_i^\pm) = X_i^\pm \otimes \exp(\frac{h}{4}H_i) + \exp(\frac{-h}{4}H_i)\otimes X_i^\pm$$

Remarque : Cette classe d'exemples est précisément celle qui apparaît dans l'étude des systèmes Toda généralisés quantiques.

3.- Algèbre de Hopf duale d'une algèbre enveloppante universelle quantifiée :
La dualité est à prendre avec un sens convenable. Si (C,Δ,ε) est une cogèbre, alors grâce à l'existence de $\rho : C^*\otimes C^* \to (C\otimes C)^*$, $(C^*, {}^t\Delta\circ\rho, {}^t\varepsilon)$ est une algèbre mais comme en général ρ n'est pas un isomorphisme, si (A,m,i) est une algèbre, on ne peut pas toujours munir A^* d'une structure de cogèbre. En revanche, on peut le faire sur le sous-espace A' de A^* constitué des formes linéaires f telles que toutes leurs translatées f_x, $x\in A$ définies par : $f_x(y) = f(xy)$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

Alors que nous avons précédemment quantifié des algèbres enveloppantes universelles, si on s'intéresse au groupe proprement dit et donc à l'analogue de l'algèbre des fonctions continues sur le groupe quantique, il est naturel de s'intéresser aux algèbres de Hopf duales de celles construites ci-dessus.

Nous nous contenterons de décrire explicitement la duale de $U_h s\ell(2)$. Considérons la représentation (au sens de représentation d'algèbre et non d'algèbre de Hopf) $\rho : U_h s\ell(2;\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}[[h]])$ définie par :

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(X^+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(X^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{sh(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Proposition</u> : Les éléments matriciaux ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{21}, ρ_{22} sont dans $(U_h\, s\ell(2;\mathbb{C}))^*$ et vérifient les relations suivantes :

$$\rho_{11}\rho_{12} = e^{-\frac{h}{2}}\rho_{12}\rho_{11} \qquad \rho_{12}\rho_{21} = \rho_{21}\rho_{12}$$

$$\rho_{21}\rho_{22} = e^{-\frac{h}{2}}\rho_{22}\rho_{21} \qquad [\rho_{22},\rho_{11}] = (e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}})\rho_{21}\,\rho_{12}$$

$$\rho_{11}\rho_{21} = e^{-\frac{h}{2}}\rho_{21}\rho_{11} \qquad \rho_{11}\rho_{22} - e^{-\frac{h}{2}}\rho_{12}\rho_{21} = 1$$

$$\rho_{12}\rho_{22} = e^{-\frac{h}{2}}\rho_{22}\rho_{12}$$

En fait, $(U_h s\ell(2,\mathbb{C}))^*$ est le quotient de l'anneau des séries formelles non commutatives en les $\tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - \delta_{ij}$ par l'idéal J engendré par les relations ci-dessus.

C'est une algèbre de Hopf pour le coproduit : $\Delta\rho_{ij} = \sum_k \rho_{ik} \otimes \rho_{kj}$. $(U_h s\ell(2,\mathbb{C}))^*$ peut être interprétée comme décrivant le groupe formel quantifié SL(2) et sa sous-algèbre de Hopf engendrée par les polynômes en les ρ_{ij} décrit alors une quantification du groupe algébrique SL(2).

Nous noterons $\mathcal{B} = \dfrac{(\mathbb{C}[[h]][\rho_{ij}]}{J}$ cette dernière algèbre.

Remarque : Les relations définissant l'idéal J ont un sens pour toute valeur complexe du paramètre h . En particulier, pour $h_o \in \mathbb{C}$ fixé on peut considérer la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{B}_{h_o} = \dfrac{\mathbb{C}[\rho_{ij}]}{J_o}$ où J_o est l'idéal obtenu pour la valeur $h_o \in \mathbb{C}$.

C'est en fait une algèbre de Hopf.

II.- LA CONSTRUCTION DE WORONOWICZ.

On va travailler ici dans le cas des "espaces non commutatifs", i.e. des C^*-algèbres.

1.- Motivation :

Soit G un groupe de Lie. Une famille $(G_t)_{t \in [0,\varepsilon[}$ de groupes de Lie sera dite une déformation de G si $G = G_o$ et G_t dépend continûment de t au sens naturel suivant : on demande que tous les G_t soient de dimension finie et qu'on puisse choisir des bases des $\mathcal{G}_t = \mathrm{Lie}(G_t)$ telles que les constantes de structure dépendent continûment de t .

La motivation de Woronowicz est que de telles déformations pourraient intervenir pour décrire les symétries de certaines théories physiques : par exemple, si G décrit une symétrie approchée, ou une symétrie brisée, on peut espérer qu'une déformation de G (i.e. pour une certaine valeur de t , qui devient alors une constante fondamentale de la théorie) décrive une symétrie exacte.

Le problème est que les groupes intervenant en théories de jauge sont compacts semi-simples et donc rigides ! On est donc conduit à envisager des déformations dans la catégorie des "espaces quantiques".

Woronowicz s'est ainsi intéressé à développer une théorie de "groupe quantique compact de matrices $N \times N$ ".

Afin de justifier les définitions à venir, faisons quelques rappels sur la théorie classique.

2.-Rappels :

Soit G un groupe de Lie compact. Alors la structure de C^* algèbre de $C(G,\mathbb{C})$ détermine la structure topologique de G, et la structure d'algèbre de Hopf celle de groupe. Cependant, il y a déjà une sous-algèbre de $C(G,\mathbb{C})$, qui joue un rôle important dans l'étude des représentations et qui détermine la structure de G .

Soit $\rho : G \to GL(n,K)$ (avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une représentation continue. Alors les coefficients ρ_{ij} sont dans $C(G,K)$ et la relation $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ implique : $\Delta\rho_{ij} = \sum_k \rho_{ik} \otimes \rho_{kj}$. Ceci indique que les translatées (à droite ou à gauche) de ρ_{ij} par G engendrent un G-sous-espace de dimension finie de $C(G,K)$.

<u>Définition</u> : G agissant dans $C(G,K)$ par la représentation régulière droite, une fonction f dans $C(G,K)$ est appelée fonction représentative si elle engendre (sous l'action de G) un G-sous espace de dimension finie de $C(G,K)$.

<u>Proposition</u> : Les fonctions représentatives engendrent une sous-algèbre $\mathcal{T}(G,K)$ de $C(G,K)$, stable par conjugaison complexe si $K = \mathbb{C}$, et qui est même une sous-algèbre de Hopf.

<u>Proposition</u> : Soit $r : G \to GL(n;\mathbb{C})$ une représentation fidèle. Alors les coefficients r_{ij} et leurs conjugués $\overline{r_{ij}}$ engendrent $\mathcal{T}(G,\mathbb{C})$ comme $\mathbb{C}$-algèbre.

<u>Théorème</u> (Peter-Weyl) $\mathcal{T}(G,\mathbb{C})$ est dense dans $C(G,\mathbb{C})$.

Enfin, la dualité de Tannaka-Krein indique que l'on peut reconstruire G à partir de $\mathcal{T}(G,\mathbb{R})$.

Considérons pour cela $G_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{R}$- algèbres : $\mathcal{T}(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Pour $s,t \in G_{\mathbb{R}}$, on définit leur produit (de convolution) comme la composée :

$$s.t : \mathcal{T} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{s \otimes t} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} .$$

<u>Proposition</u> : Pour le produit de convolution, $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe.
L'isomorphisme $G \xrightarrow{i} G_{\mathbb{R}}$ se définit comme suit :

à tout $g \in G$, on associe $e_g \in G_{\mathbb{R}}$ par : $e_g : \begin{array}{l} \mathcal{T} \to \mathbb{R} \\ f \to f(g) \end{array}$ et on obtient ainsi un

isomorphisme de groupes $i : \begin{array}{l} G \to G_{\mathbb{R}} \\ g \to e_g \end{array}$.

De plus, si on munit $G_{\mathbb{R}}$ de la topologie la plus faible rendant les évaluations $\lambda_f : \begin{array}{l} G_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ s \to s(f) \end{array}$ continues (où $f \in \mathcal{T}$), alors $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe topologique et s'envoie comme sous-groupe fermé dans un groupe orthogonal. C'est donc un groupe de Lie compact et on montre que i est un isomorphisme de groupes de Lie.

Nous avons ainsi mis en évidence le rôle de la sous-algèbre de Hopf involutive dense $\mathcal{T}(G,\mathbb{C})$ de $C(G,\mathbb{C})$, cette sous-algèbre étant engendrée par les coefficients d'une seule représentation.

3.-Définition générale :

Soit A une C^*-algèbre unitaire, $u \in M_N(A)$ (i.e. $u = (u_{k\ell})$ avec $u_{k\ell} \in A$) et soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre involutive de A engendrée par les $u_{k\ell}$.

On dit que (A,u) est un groupe quantique compact de matrices si :

1°) $\mathcal{A}$ est dense dans A

2°) il y a un morphisme de C^*algèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ tel que :
$\Delta(u_{k\ell}) = \sum_r u_{kr} \otimes u_{r\ell}$

3°) il y a une application linéaire antimultiplicative $\mathcal{K} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que : $\mathcal{K}(\mathcal{K}(a^*)^*) = a$ et

$$\sum_r \mathcal{K}(u_{kr})u_{r\ell} = \delta_{k\ell}\ 1$$

$$\sum_r u_{kr}\mathcal{K}(u_{r\ell}) = \delta_{k\ell}\ 1$$

Remarques : $\Delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ u est un élément inversible de $M_N(\mathcal{A})$ et $(u^{-1})_{k\ell} = \mathcal{K}(u_{k\ell})$.

4.-Exemples :

a.- Soit G un (vrai) groupe compact de matrices $G \subset GL(N;\mathbb{C})$. Prenons $A = C(G)$ et $u_{k\ell}(g)$ les coefficients matriciaux pour la représentation fondamentale.

Alors le théorème suivant découle essentiellement des rappels du 2.

Théorème : $(C(G),u)$ est un groupe quantique compact et tout groupe quantique compact (A,u) avec A commutative est ainsi obtenu.

b.- Groupes $Su(2)$ déformés

On construit une famille $S_\mu U(2)$, pour $\mu \in]0,1[$, de tels groupes de la façon suivante : on remplace la condition d'unimodularité pour une matrice $m \in M_2(\mathbb{C})$ (qui signifie que $m \otimes m$ stabilise $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ où (e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbb{C}^2$), par la condition de stabiliser

$\xi_\mu = e_1 \otimes e_2 - \mu e_2 \otimes e_1$. Pour cela, il est nécessaire de prendre des matrices à coefficients dans une C^* algèbre A .

Notation : Pour $m \otimes a$, $n \otimes b$ dans $M_2(\mathbb{C}) \otimes A = M_2(A)$, on pose

$$(m \otimes a) \oplus (n \otimes b) = (m \otimes n) \otimes ab$$

Proposition : Pour $u \in M_2(A)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes

i) $(u \oplus u)(\xi_\mu \otimes 1) = \xi_\mu \otimes 1$ et u est unitaire $(u^*u = uu^* = 1)$

ii) u est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$ où $\alpha, \gamma \in A$ et

$$(R) \qquad \begin{cases} \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1 & \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^* \\ \alpha\alpha^* + \mu^2\gamma^*\gamma = 1 & \alpha\gamma = \mu\gamma\alpha \\ & \alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha \end{cases}$$

Définition : $S_\mu U(2)$ est le groupe compact de matrices 2×2 défini par la C^* algèbre A engendrée par α, γ avec les relations (R) et $u = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}$ est la sous-algèbre involutive engendrée par α et γ i.e. $\mathcal{A} = \dfrac{\mathbb{C}[\alpha,\gamma,\alpha^*,\gamma^*]}{I}$ où I est l'idéal engendré par (R).

III. Lien entre les exemples de Drinfeld et Woronowicz. Pour toute valeur réelle du paramètre h_o on peut munir $\mathcal{B}h_o$ d'une involution en posant

$\rho_{11}^* = \rho_{22}$

$\rho_{12}^* = -\rho_{21}$

Nous allons montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ de Woronowicz s'identifie à une certaine algèbre $\mathcal{B}h_o$ pour une valeur réelle convenable de h_o .

Pour cela, notons d'abord que l'on peut remplacer les générateurs α,γ de $\mathcal{A}$ par les générateurs α , $\beta = \sqrt{\mu}\gamma$ (ce qui revient à remplacer $u = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$ par sa conjuguée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix}$) et l'idéal I est alors engendré par les relations :

$$\begin{array}{ll} \alpha^*\alpha + \frac{1}{\mu}\beta^*\beta = 1 & \beta^*\beta = \beta\beta^* \\ \alpha\alpha^* + \mu\beta^*\beta = 1 & \alpha\beta = \mu\beta\alpha \\ & \alpha\beta^* = \mu\beta^*\alpha \end{array}$$

Théorème : Prenons $h_o = -2 \operatorname{Log} \mu$

Alors l'application $\varphi : A \to \mathcal{B}h_o$ définie par :

$$\varphi(\alpha) = \rho_{11} \text{ , } \varphi(\beta) = \rho_{21} \text{ , } \varphi(\beta^*) = -\rho_{12} \text{ , } \varphi(\alpha^*) = \rho_{22}$$

est un isomorphisme de *-algèbres de Hopf

Démonstration : On note tout d'abord que l'involution est bien définie sur $\mathcal{B}h_o$ car on a les identités suivantes entre les relations de définition :

$$(a)^* = (b) \text{ , } (c)^* = (d), \ (e)^* = (e), \ (f)^* = (f) \text{ , } (g)^* = (g)$$

$\mathcal{B}h_o$ est donc l'algèbre involutive engendrée par ρ_{11} , ρ_{12} avec les relations (a), (c), (e), (f), (g)

Par l'application φ , ce sont exactement les relations ci-dessus entre α , α^*, β , β^* . On a donc deux algèbres qui ont la même présentation.

Remarque finale : Si G est un groupe de Lie compact, on sait qu'il admet une complexification $G_{\mathbb{C}}$ qui est en fait un groupe algébrique ; de plus, l'algèbre des fonctions représentatives $\mathcal{T}(G;\mathbb{C})$ s'identifie à l'algèbre des fonctions rationnelles sur $G_{\mathbb{C}}$.

Notre résultat peut s'interpréter en disant que ce passage d'un groupe de Lie compact à son complexifié subsiste au niveau quantique, au moins dans le cas de SU(2).

BIBLIOGRAPHIE :

[1] V.G. Drinfeld : Quantum Groups ICM Congrès de Berkeley 1986

[2] V.G. Drinfeld : Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation Dolk. Akad. Nauk SSSR 283 (1985) n°5 1060-1064.

[3] L.D. Faddeev : Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory (Lectures in Les Houches, 1982) Elsevier Science Publishers B.V.1984.

[4] P.P. Kulish - N. Yu Reshetikhin : The quantum linear problem for the Sine-Gordon equation and higher representations Zapiski Nauch Semin LOMI, 101 (1981), 101-110.

[5] M. Jimbo : A q-difference analogue of $U(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation Lett. Math Phys 10 (1985) 63-69.

[6] M. Rosso : Comparaison des groupes SU(2) quantiques de Drinfeld et Woronowicz CRAS t 304 Série I, (1987) 323-326.

[7] S.L. Woronowicz : Twisted SU(2) group-An example of non commutative differential calculus à paraître dans RIMS-Publ Kyoto University.

[8] S.L. Woronowicz : Compact matrix pseudogroups Prépublication