

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

DENIS BERNARD

JEAN THIERRY-MIEG

Génétique modulaire des cordes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1986, tome 37
« Conférences de : J. Feldman, F. Nicolo et J. Thierry-Mieg », , exp. n° 2, p. 29-64

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1986__37__29_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GENETIQUE MODULAIRE DES CORDES.

Denis BERNARD et Jean THIERRY-MIEG

Groupe d'Astrophysique Relativiste
CNRS, Observatoire de Paris-Meudon
92195 Meudon Principal Cedex, France

RESUME:

L'étude conjointe du groupe modulaire et des algèbres de Kac-Moody permet de classer les modèles de cordes. En effet, chaque fonction modulaire que nous savons reconnaître comme étant égale à la q -dimension d'une algèbre de Kac-Moody, permet de construire un modèle de cordes possédant une interprétation algébrique simple. De cette manière, nous retrouvons les modèles connus, usuels et twistés, et en suggérons de nouveaux en dimensions 18 et 26.

0-INTRODUCTION.

Le groupe modulaire n'est apparu que progressivement dans l'étude des algèbres de Kac-Moody (1) et des théories des cordes. Il y joue cependant un rôle si important qu'on peut le considérer comme le pivot de ces théories et générer par l'étude de ses représentations tous les modèles de cordes connus, ainsi que quelques autres.

La première utilisation systématique du groupe modulaire en théorie des cordes est due à Nahm (2) qui, dès 1975, a découvert de cette manière la fonction spectrale de la corde hétérotique (3). Il a cependant rejeté ce modèle pour deux raisons, une bonne et une mauvaise.

La mauvaise raison est que Nahm n'a pas su reconnaître dans cette fonction, la q -dimension d'une représentation d'une algèbre de Kac-Moody, formule établie trois ans plus tard par Kac (4), Feingold et Lepowski (5). La bonne raison est que le spectre des particules correspondant n'a rien à voir avec les hadrons. Ce second problème a été résolu récemment par la communauté des physiciens, dits des particules, d'une manière radicale: toute interprétation physique des modèles est abandonnée, en d'autres termes, on néglige les données expérimentales non confirmées par la théorie.

Ainsi allégée, la physique peut reprendre avec les mathématiques un dialogue fructueux, qui, selon Dyson (0), avait failli se terminer par un divorce.

Depuis dix ans, le groupe modulaire est utilisé de plus en plus largement. Il soutient l'étude de Kac et Peterson (6) sur les algèbres de Kac-Moody, les résultats récents sur le gentil monstre de Fisher et Griess (7), et l'étude en cours des diagrammes à n boucles du modèle de Veneziano .

Lors de l'étude conjointe des représentations du groupe modulaire et des algèbres de Kac-Moody, nous montrerons, en suivant une approche voisine de celle de Nahm, comment les modèles connus de théories des cordes, apparaissent d'une manière qui nous semble particulièrement simple et directe.

1-GENETIQUE MODULAIRE DES CORDES.

Le but de ce paragraphe est de rappeler certaines propriétés du modèle de Veneziano (8) que nous considérons comme essentielles, afin de les utiliser par la suite comme cadre d'une classification des modèles de cordes.

Une théorie des cordes décrit la dynamique d'un ensemble de champs définis sur une 2-surface Lorentzienne S , qui est la surface balayée par la corde lors de son évolution. Les champs sont à valeur dans une variété Riemannienne M ,

$$M = M^D \times G \quad (1-1)$$

produit d'un espace de Minkowski M^D de dimension $D=d+2$ et de signature $(-++...+)$, par un espace Euclidien G . Dans les cas les mieux connus, G est un groupe de Lie, ou bien le tore maximal d'un groupe de Lie. On identifie M^D avec l'espace temps physique.

L'application X ,

$$X : S \longrightarrow M^D \quad (1-2)$$

est vue comme un plongement de la corde dans l'espace-temps physique.

L'application ϕ ,

$$\phi : S \longrightarrow G \quad (1-3)$$

est vue comme décrivant un ensemble de degrés de liberté interne à la corde.

Par analogie avec le modèle de Veneziano, nous supposons:

(i) L'existence d'une jauge unitaire.

C'est à dire l'existence d'une symétrie de la théorie à deux dimensions permettant de restreindre la dynamique du plongement X à celle d'une application X^{tr} vers une sous-variété Euclidienne V^d , de dimension $d=D-2$, appelée espace transverse,

(1-4)

(ii) Le découplage des hélicités.

C'est à dire que nous supposons que les équations de mouvement sont séparables dans les coordonnées du cône de lumière, $\mathcal{F}_\pm = \sigma \pm \tau$.

Une dynamique chirale pour le cas où G est un groupe de Lie a été découverte par Witten (9) en ajoutant au Lagrangien usuel dumodèle. σ :

$$S[g] = -\frac{k}{16\pi} \int_S (\dot{g}^i \partial_\sigma g)^{\alpha\beta} (\dot{g}^i \partial_\tau g). \quad (1-5)$$

le terme topologique,

$$W.Z[g] = \frac{k}{24\pi} \int_Q \omega_\lambda \omega_\lambda \omega \quad ; \quad \omega = \dot{g}^i dg. \quad (1-6)$$

où Q est une 3-variété dont S est la frontière, $S = \partial Q$.

Dans la jauge unitaire, les composantes T_{++} et T_{--} du tenseur impulsion-énergie de la corde engendrent deux algèbres de Virasoro commutantes L_n et \bar{L}_n . L'opérateur $(L_0 + \bar{L}_0)$ est l'Hamiltonien du système. Il décrit l'évolution de la corde dans la direction τ . L'opérateur $(L_0 - \bar{L}_0)$ engendre les déplacements le long de la direction σ . Une corde fermée ne possède pas d'origine préférée. L'opérateur $(L_0 - \bar{L}_0)$ engendre donc une symétrie de la théorie, et doit s'annuler sur les états physiques.

(iii) L'équation de couche de masse.

C'est à dire que nous supposons que l'impulsion transverse du centre de masse de la corde, \vec{p} , intervient dans les générateurs de Virasoro, L_0 et \bar{L}_0 , sous la forme,

$$L_0 = \frac{\vec{p}^2}{8} + M_D^2 \quad ; \quad \bar{L}_0 = \frac{\vec{p}^2}{8} + M_G^2 \quad (1-7)$$

Les opérateurs M_D et M_G sont les opérateurs de masse de la théorie.

Si nous appelons hélice droite (gauche), l'ensemble des champs ne dépendant que de \mathcal{F}_+ (\mathcal{F}_-), la corde fermée apparaît donc comme une double hélice. Seule l'invariance par rotation impose que les états de

l'hélice droite soient opposés aux états de l'hélice gauche de même masse.

La fonction de partition des modèles de cordes fermées s'écrit donc:

$$X(z, \bar{z}) = \text{Tr} \left\{ e^{i2\pi z L_0} \cdot e^{-i2\pi \bar{z} \bar{L}_0} \mathcal{P} \right\} \quad (1-8)$$

où \mathcal{P} projète les états du secteur droit sur les états du secteur gauche, en accord avec l'invariance par rotation le long de σ . Dans le cas des cordes fermioniques, la fonction $X(z, \bar{z})$ est la super-fonction de partition et l'opérateur \mathcal{P} assigne un signe (+ ou -) suivant la nature tensorielle ou spinorielle des états.

2-COVARIANCE MODULAIRE.

Le but de cette étude est de classer les fonctions de partitions acceptables, et de construire si possible les modèles de théories des cordes correspondants. Les conditions imposées à la fonction de partition proviennent de l'étude des amplitudes à une boucle.

Considérons l'amplitude A associée à un diagramme du vide à une boucle d'une corde fermée, (la corde décrit un tore T) (10;11),

$$A(T) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dz d\bar{z}}{(\text{Im}z)^2} X(z, \bar{z}) \quad (2-1)$$

Le tore T peut être décrit (12) comme le quotient $T=C/L$, où L est le réseau de périodes w_1, w_2 . L'orientation est choisie de sorte que le paramètre modulaire $z = (w_2/w_1)$ appartienne au demi-plan complexe supérieur

$$H = \{ z \in \mathbb{C} ; \text{Im}z > 0 \} \quad (2-2)$$

Lors d'un changement de vecteur de base de L , le paramètre se transforme selon,

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + e} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \quad (2-3)$$

Ces transformations forment le groupe modulaire $\Gamma \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ qui est engendré par les deux transformations élémentaires T et S ,

$$\begin{aligned} T : z &\rightarrow z' = z + 1 \\ S : z &\rightarrow z' = -1/z \end{aligned} \quad (2-4)$$

Le domaine fondamentale \mathcal{D} , sur lequel porte l'intégrale, est choisie traditionnellement comme étant,

$$\mathcal{D} = H/\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \geq 1 ; \text{Im}z > 0 \right. \\ \left. ; -\frac{1}{2} \leq \text{Re}z \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (2-5)$$

La mesure $d^2z/(\text{Im}z)^2$ étant invariante modulaire, l'amplitude A sera invariante modulaire (absence d'anomalie globale) si et seulement si la fonction de partition $X(z, \bar{z})$ est invariante modulaire.

Dans cette fonction de partition, la trace sur les moments transverses \vec{p} est une gaussienne qui s'évalue facilement. Cette intégrale conduit à,

$$X(z, \bar{z}) = (\text{Im}z)^{-d/2} X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) \quad (2-6)$$

où la fonction spectrale $X_{\text{masse}}(z, \bar{z})$ est,

$$X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = \text{Tr} \left\{ e^{i2\pi z M_D^2} e^{-i2\pi \bar{z} M_G^2} \right\} \quad (2-7)$$

La fonction $(1/\text{Im}z)$ se transforme sous une transformation modulaire selon,

$$\frac{1}{\text{Im}z'} = (cz+e)(c\bar{z}+e) \frac{1}{\text{Im}z} \quad (2-8)$$

La fonction spectrale doit donc être covariante modulaire de poids $(d/2)$, i.e.:

$$X_{\text{masse}}(z', \bar{z}') = (cz+e)^{-d/2} (c\bar{z}+e)^{-d/2} X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) \quad (2-9)$$

L'invariance de $X_{\text{masse}}(z, \bar{z})$ sous la translation $T: z'=z+1$, est une conséquence directe de la contrainte,

$$M_D^2 = M_G^2 \quad (2-10)$$

imposée sur les états physiques. Seule l'inversion $S: z'=-1/z$, impose des restrictions non-triviales aux modèles duaux.

3-CLASSIFICATION DES CORDES BOSONIQUES FACTORIZABLES.

Dans cette section, nous faisons l'hypothèse restrictive que les secteurs gauche et droit sont indépendants. La fonction spectrale se factorise sous la forme:

$$X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = X_{\mathcal{D}}(z) \cdot X_{\mathcal{G}}(\bar{z}) \quad (3-1)$$

Les fonctions spectrales gauche et droite sont séparément covariantes modulaires

$$X_{\mathcal{D}}(z') = (cz + e)^{-d/2} X_{\mathcal{D}}(z) \quad (3-2)$$

$$X_{\mathcal{G}}(\bar{z}') = (c\bar{z} + e)^{-d/2} X_{\mathcal{G}}(\bar{z})$$

La classification de ces modèles est donc une conséquence directe de la classification bien connue des fonctions modulaires (12).

Rappelons que

a) Toute fonction modulaire peut s'écrire comme le rapport de deux formes modulaires (fonction modulaire holomorphe sur D)

b) Les séries d'Eisenstein

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{q^n}{1-q^n} \quad (3-3)$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \frac{q^n}{1-q^n} \quad (3-4)$$

$q = \exp(i2\pi z)$

sont des formes modulaires de poids respectif 4 et 6.

c) Toutes les formes modulaires appartiennent à l'anneau engendré par E_4 et E_6 . Il s'ensuit que:

d) Il n'y a qu'une seule forme modulaire de poids 8: E_4^2 , et de poids 10: $E_4 \cdot E_6$.

e) La forme modulaire de plus bas poids s'annulant en $q=0$ (forme parabolique) est la forme de poids 12,

$$\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \quad (3-5)$$

Par unicité, cette forme est égale au produit infini,

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \gamma(q)^{24} \quad (3-6)$$

où $\gamma(q)$ est la fonction de Dedekind.

f) Enfin, le réseau des racines de l'algèbre de Lie E_6 est pair et self-dual. La fonction thêta de ce réseau est donc une forme modulaire de poids 4, et donc, par unicité :

$$\Theta_{E_6}(z) = E_4(z) \quad (3-7)$$

En revanche, on ne connaît pas d'interprétation algébrique de la forme E_6 .

La classification des modèles de cordes découle de ces remarques. On restreint d'abord le choix des fonctions spectrales par les deux conditions physiques suivantes:

i) Les états doivent se regrouper en représentations unitaires du petit groupe du groupe de Poincaré $ISO(1, d+1)$, ($SO(d)$ si $m^2=0$, $SO(d+1)$ si $m^2 > 0$, $ISO(d-1, 1)$ si $m^2 < 0$). En particulier, ceci implique que les seuls tachyons ($m^2 < 0$) admissibles sont des scalaires.

ii) Le modèle décrit des états stables. Le spectre de masse des résonances est donc réel. La fonction spectrale ne possède donc des pôles que sur l'axe réel.

De manière à satisfaire ces deux conditions, nous recherchons des fonctions spectrales à priori sous la forme qui suit:

$$\chi(z) = \frac{F(z)}{\Delta(z)} \quad (3-8)$$

où $F(z)$ est une forme modulaire de poids $(24-d)/2$.

Cas par cas, on trouve les différentes possibilités suivantes:

a) d=24; (D=26).

$$X_{24}(z) = \left(\frac{1}{\eta(z)} \right)^{24} \quad (3-9)$$

Ce spectre est évidemment celui du modèle de Veneziano. Il correspond à la fonction de partition de 24 champs bosoniques libres. En langage algébrique, il correspond à la représentation de base de l'algèbre affine $[U(1)^{24}]^{(1)}$. L'intercept ($\alpha_0' = 1$) est directement donné par les propriétés modulaires. Il vaut $(-c/24)$ où c est la charge centrale de l'algèbre de Virasoro associée à l'algèbre affine $[U(1)^{24}]^{(1)}$.

b) d=16; (D=18).

$$X_{16}(z) = \left[\frac{1}{\eta(z)} \right] \times \frac{E_4(z)}{\eta^8(z)} \quad (3-10)$$

Ce spectre correspond au caractère de la représentation de base de l'algèbre affine $(U(1)^{16} \cdot E_8)^{(1)}$. L'intercept est toujours donné par la charge centrale de l'algèbre de Virasoro associée. Ce modèle contient un tachyon ($m^2 = -1$), et au niveau $m^2 = 0$, un vecteur et 248 scalaires à valeur dans la représentation adjointe de E_8 . En combinant les secteurs gauche et droit ainsi compactifiés, on obtient une théorie ayant un tachyon ($m^2 = -2$), et un spectre de masse nulle contenant un graviton, un tenseur antisymétrique, un scalaire, et enfin, des scalaires et des vecteurs de Yang-Mills, tous, à valeur dans la représentation adjointe de $E_8 \cdot E_8$.

c) d=8; (D=10).

$$X_8(z) = \left[\frac{1}{\eta(z)} \right]^8 \cdot \frac{E_4(z) \cdot E_4(z)}{\eta^{16}(z)} \quad (3-11)$$

Ce spectre possède deux interprétations algébriques. La fonction $E_4(z)$ est la fonction thêta du réseau $E_8 \cdot E_8$, mais aussi celle du réseau ${}^{\dagger}D_{16} = \Lambda(D_{16}) \cup (s + \Lambda(D_{16}))$ où $\Lambda(D_{16})$ est le réseau de D_{16} et s un poids spinoriel de D_{16} . $X_8(z)$ est donc la q -dimension de la représentation de base de l'algèbre $(U(1)^8 \cdot E_8 \cdot E_8)^{(1)}$, mais aussi de la

représentation basique et spinorielle de $(U(1)^8 \cdot D_{16})^{(4)}$. Ce caractère est celui du secteur gauche de la corde hétérotique de Princeton (3).

d) $d=0$; $(D=2)$.

$$X_0(z) = \frac{E_4^3(z) - k \Delta(z)}{\Delta(z)} = j(z) - k. \quad (3-12)$$

Les fonctions thétas des 23 réseaux pairs et self-duaux de dimension 24 (réseaux de Niemeier) sont toutes de la forme $(E_4^3 - k \Delta)$. Ces réseaux sont construits sur les algèbres de Lie semi-simples, A , de rang 24, et dont les composantes simples sont simplement lacés et ont même nombre de Coxeter (13). Les 23 spectres $X_0(z)$ associés aux 23 réseaux de Niemeier sont les q -dimensions de représentations des algèbres $A^{(4)}$.

La fonction $(E_4^3(z) - 720 \Delta(z))$ est aussi la fonction thêta d'un réseau pair et self-dual de dimension 24: le réseau de Leech. Ce réseau n'a aucun point à distance-carré deux de l'origine. Les 196560 plus proches voisins de l'origine sont à distance-carré quatre. Ce spectre de théorie des cordes pourrait être relié à l'algèbre associative, non-commutative de Griess. En effet, Frenkel, Lepowski et Meurman (7) ont montré que l'on pouvait représenter l'algèbre de Griess à l'aide de champs bosoniques twistés (i.e. n'ayant que des modes impairs), compactifiés sur le réseau de Leech. L'algèbre de Griess, complétée d'un élément central, est de dimension 196884. Elle se représente par les 196560 opérateurs vertex à distance-carré quatre, complétés par un tenseur symétrique et un vecteur de $SO(24)$.

Tous ces modèles peuvent être construits, soit en compactifiant le modèle de Veneziano sur un tore T_{24-d} , transformé de Fourier d'un des réseaux pairs et self-duaux, à la manière indiquée par Gross, Harvey, Martinec et Rohm (3); soit en envoyant la surface S sur le produit $R \times G$, où G est un groupe de Lie, simplement lacé, et de rang $(26-D)$, à la manière de Duff, Nilsson et Pope (14).

D'autres modèles pourraient être construits à l'aide de la forme modulaire $E_6(z)$ si l'on savait en donner une interprétation algébrique simple. Ainsi,

$$X_{12}(z) = \left[\frac{1}{\eta(z)} \right]^{12} \frac{E_6(z)}{\eta^{12}(z)} \quad \text{et} \quad X_4(z) = \left[\frac{1}{\eta(z)} \right]^4 \frac{E_4(z)E_6(z)}{\eta^{20}(z)}. \quad (3-13)$$

Cependant, les coefficients négatifs de $E_6(z)$ obligent à associer les champs à des spineurs d'espace-temps. Un module de ce genre a été proposé par Schellekens (15) en compactifiant le modèle à D=18 dimensions sur la variété K_3 . Il en résulte un modèle en D=14 (d=12), sans anomalie, qui possède la symétrie E_7 . Mais ce modèle n'est pas factorisable et sort du cadre de cette section.

Les modèles étudiés ici ont été découverts initialement par Nahm (2), et interprétés en tant que q-dimension d'algèbre de Kac-Moody par Marcus et Thierry-Mieg (16). Récemment, ils ont été redécouverts par Veneziano et par Ardanal et Arfaei (17).

4-CLASSIFICATION DES CORDES BOSONIQUES POLYGENIQUES.

En considérant des secteurs droit et gauche non indépendants, Neveu et Englert (18) ont complété cette classification, ils ont ainsi obtenu des théories compactifiées en dimension quelconque <26 . Leurs modèles possèdent, comme algèbre de symétrie interne, une algèbre g_L simplement lacée de rang L . Ils correspondent à la compactification du modèle de Veneziano sur les réseaux des poids des algèbres g_L . La consistance de ces modèles impose que, à l'approximation en arbre, la dimension d satisfasse $(d+L)=24$. Les secteurs droit et gauche supportent des représentations de niveau un de la même algèbre affine $(U(1)^d \cdot g_L)^{(1)}$. A l'approximation d'une boucle, la condition d'invariance modulaire indique la manière dont doivent être couplés les modules de $(U(1)^d \cdot g_L)^{(1)}$ des secteurs gauche et droit. Ce couplage est le plus simple possible: on couple la représentation de secteur droit ayant $\vec{\omega}_0$ pour plus haut poids, avec la représentation du secteur gauche ayant même plus haut poids $\vec{\omega}_0$. Les fonctions de spectre de masse de ces modèles sont donc:

$$X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = \eta^{-d}(z) \cdot \eta^{-d}(\bar{z}) \cdot \sum_{\vec{\omega}_0} \frac{\mathcal{O}_{\vec{\omega}_0 + \Lambda}(z)}{\eta^{+L}(z)} \cdot \frac{\mathcal{O}_{\vec{\omega}_0 + \Lambda}(\bar{z})}{\eta^L(\bar{z})} \quad (4-1)$$

où $\sum_{\vec{\omega}_0}$ est une somme sur les poids fondamentaux de g_L . Λ est le réseau des racine de g_L . $X(z, \bar{z})$ est évidemment invariant sous la translation $(z \rightarrow z+1)$. Sous l'effet de l'inversion $(z \rightarrow -1/z)$, $X(z, \bar{z})$ se transforme en (voir appendix A):

$$X_{\text{masse}}(-1/z, -1/\bar{z}) = (z, \bar{z})^{-d/2} \cdot \eta^{-d-L}(z) \cdot \eta^{-d-L}(\bar{z}) \cdot \sum_{\vec{\omega}, \vec{p} \in \Lambda^*} e^{i\pi \vec{\omega} \cdot z + i\pi \vec{p} \cdot \bar{z}} \delta_{\vec{\omega}, \vec{p}} \quad (4-2)$$

où

$$\delta_{\vec{\omega}, \vec{p}} = \frac{1}{|z|} \sum_{\vec{\omega}_0} e^{i\pi \vec{\omega}_0 \cdot (\vec{\omega} - \vec{p})} = \begin{cases} 0 & \text{si } (\vec{\omega} - \vec{p}) \notin \Lambda \\ 1 & \text{si } (\vec{\omega} - \vec{p}) \in \Lambda \end{cases} \quad (4-3)$$

La dernière égalité, qui porte sur $\delta_{\vec{\omega}; \vec{p}}$, force les poids $\vec{\omega}, \vec{p}$ de la double somme (équ.4-2), à appartenir à la même classe d'équivalence de Λ^*/Λ . Ceci prouve la covariance modulaire de $X(z, \bar{z})$. Les modèles de Neveu et Englert sont des modèles construits sur $(U(1)^d, \mathfrak{g}_L)^{(1)}$. Ils sont consistents, à l'approximation à une boucle, en toute dimension transverse d .

Notons que la covariance modulaire du spectre de masse (4-1) est en fait une conséquence du caractère self-dual du réseau Lorentzien pair de dimension $2L$

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{\omega_0} (\vec{\omega}_0 + \Lambda, \vec{\omega}_0 + \Lambda) \quad (4-4)$$

muni de la métrique $(++ \dots +, -- \dots -)$. Les modèles de Narain (19) généralisent cette construction en couplant les secteurs gauche et droit de la corde hétérotique compactifiée. Leurs propriétés modulaires sont reliées à la nature paire et self-duale du réseau Lorentzien, utilisé lors de la compactification.

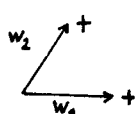
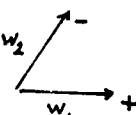
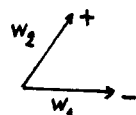
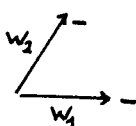
L'interprétation de ces caractères, en terme de modules de Kac-Moody, donne immédiatement la construction de ces théories. Sans faire référence aux possibles compactifications déjà mentionnées, la théorie décrit d champs bosoniques transverses (dans le formalisme du cône de lumière, ou bien $(D=d+2)$ champs bosoniques dans le formalisme covariant) complétés par $\dim(\mathfrak{g})$ courants $J^a(z)$ qui engendrent l'algèbre affine de Kac-Moody $\mathfrak{g}^{(1)}$. Ces courants $J^a(z)$ agissent sur les différents modules de Kac-Moody qui interviennent dans les modèles décrits. En fonction des champs associés aux directions compactifiées, ces courants sont évidemment les opérateurs vertex de Frenkel et Kac (20). Ces théories sont, par construction, consistantes à l'approximation de zero boucle. Dans le formalisme covariant, la nilpotence de la charge B.R.S., associée à l'invariance par reparamétrisation locale, suffit à l'absence de fantôme parmi les états physiques. Cette condition, qui est équivalente à celle existant dans le formalisme transverse, impose à la charge centrale d'être égale à 26,

$$C^{\text{Totale}} \equiv D + \frac{k \dim(\mathfrak{g})}{k + h^\vee(\mathfrak{g})} = 26 \quad (4-5)$$

où $h^\vee(\mathfrak{g})$ est le nombre Coxeter dual de \mathfrak{g} , et K , le niveau du module de Kac-Moody. La cohomologie B.R.S., qui définit les états physiques, se résout de la même façon, que ce soit en absence (22) ou en présence (23) de courants de Kac-Moody. Cette résolution montre que, une fois la dégénérescence du vide des fantômes levée, l'espace des états physiques est défini positif. La forme des courants $J^a(z)$, ainsi que la spécification de l'algèbre \mathfrak{g} , ne sont pas nécessaires à cette résolution. Seule la condition (4-5) est critique. Ceci indique que l'on peut réduire les théories des cordes de la dimension 26 à une dimension inférieure D , en complétant l'algèbre transverse $(U(1)^d)^{(4)}$ par une quelconque algèbre affine non-twistés. L'invariance modulaire à une boucle indique comment les différents modules de Kac-Moody doivent être couplés (23).

5-CLASSIFICATION DES SUPER-CORDES FACTORISABLES.

Les modèles (8) de Neveu-Schwarz et de Ramond peuvent être également retrouvés par l'analyse du groupe modulaire; ils ont aussi une interprétation algébrique simple. En plus des champs bosoniques libres, ils introduisent des champs deux-fermioniques. A chaque champ fermionique, correspond une structure fermionique sur le tore (24;25) qui spécifie la phase qui apparaît lors d'un transport parallèle des fermions le long de l'une ou l'autre des directions fondamentales, w_1 ou w_2 . Cette phase est nécessairement (± 1), puisque les fermions satisfont une statistique d'ordre deux. Le choix d'une structure complexe correspond donc à la donnée de deux signes (γ_1 et γ_2) dans les deux directions fondamentales. Il y a quatre structures complexes inéquivalentes qui ne sont évidemment pas toutes invariantes sous le groupe des transformations modulaires. Elles possèdent chacune un groupe d'invariance, sous-groupe de Γ , et s'échangent l'une l'autre sous l'action des transformations de Γ . Ces structures, et leur groupe d'invariance sont:

$(\gamma_1 ; \gamma_2)$	//	groupe d'invariance
a) $(+ ; +)$:		$\Gamma \equiv$ le groupe modulaire
b) $(+ ; -)$:		$\Gamma_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}); c \equiv 0[2] \right\}$
c) $(- ; +)$:		$\Gamma^0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}); b \equiv 0[2] \right\}$
d) $(- ; -)$:		$\Gamma_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z}); ab+ce \equiv 0[2] \right\}$

Les groupes $\Gamma_0(2)$, $\Gamma^0(2)$ et Γ_θ sont d'index trois dans Γ . Leurs formes modulaires, de poids le plus bas, sont de poids 8, et, sont engendrées par E_4 et par les nouvelles formes:

$$\Gamma_0(2) : \quad \frac{1}{R(z)} = 2 \gamma^{12}(q) \Theta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]^{-4}(q) = \frac{1}{8} \prod_n \left(\frac{1-q^n}{1+q^n} \right)^8 \quad (5-1)$$

$$\Gamma^0(2) : \quad \frac{1}{S(z)} = 2 \gamma^{12}(q) \Theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right]^{-4}(q) = 2q^{1/2} \prod_n \left(\frac{1-q^n}{1-q^{n+1/2}} \right)^8 \quad (5-2)$$

$$\Gamma_\theta : \quad \frac{1}{N(z)} = 2 \gamma^{12}(q) \Theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]^{-4}(q) = 2q^{1/2} \prod_n \left(\frac{1-q^n}{1+q^{n+1/2}} \right)^8 \quad (5-3)$$

Les fonctions N, S et R sont invariantes sous le sous-groupe . Par ailleurs, appelons n, s et r les transformations suivantes:

$$\begin{aligned} n : z &\rightarrow z' = -1/z && ; n \in \Gamma_\theta \\ s : z &\rightarrow z' = z/(z+1) && ; s \in \Gamma^0(2) \\ r : z &\rightarrow z' = z+1 && ; r \in \Gamma_0(2) \end{aligned} \quad (5-4)$$

Sous ces transformations, les fonctions N, S et R s'échangent:

$$n : \begin{cases} N \rightarrow N \\ S \rightarrow R \\ R \rightarrow S \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} N \rightarrow -R \\ S \rightarrow S \\ R \rightarrow -N \end{cases} ; \quad r : \begin{cases} N \rightarrow -S \\ S \rightarrow -N \\ R \rightarrow R \end{cases} \quad (5-5)$$

Les combinaisons $(N.S.R)$, $(N-S-R)$, $(N^2+S^2+R^2)$ et $(N^3-S^3-R^3)$ sont invariantes modulaires. Par unicité, on a:

$$\begin{aligned} N.S.R. &= 2/\Delta && ; \quad N^2 + S^2 + R^2 = E_4/2\Delta \\ N-S-R &= 0 && ; \quad N^3 - S^3 - R^3 = 6/\Delta \end{aligned} \quad (5-6)$$

Il est maintenant facile de construire une corde fermionique.

En dimension d=8, nous avons le modèle de Neveu-Schwarz dont la fonction spectrale est $(N-S)$. Ce caractère est invariant sous $\Gamma_0(2)$. Il correspond à la représentation vectorielle de l'algèbre affine Poincaré(8) $= (SO(8).U(1)^8)^{(4)}$. Nous avons aussi le modèle de Ramond qui a R pour fonction spectrale, et, qui correspond à la représentation spinorielle chirale de Poincaré(8). Pour respecter le principe spin-statistique, on attribue une statistique négative aux spineurs. La super-fonction spectrale du modèle de N-S-R est :

$$X_{NSR} = (N - S - R) = 0 \quad (5-7)$$

Elle est, par conséquent, invariante modulaire. Cette identité est bien-sûr une conséquence directe de la triallité de $SO(8)$.

En dimension d=16, la seule combinaison invariante modulaire est $(N^2 + S^2 + R^2)$. Ce modèle s'identifie donc au modèle bosonique de la section trois. Le modèle $(N^2 + S^2 - R^2)$ proposé dans la référence (26) n'est pas invariant modulaire.

En dimension d=24, il semble possible de construire un modèle de super-corde respectant le principe spin-statistique, dont la fonction spectrale $6(N^3 - S^3 - R^3)$ correspond à la différence des q-dimensions des modules vectoriel et spinoriel de Poincaré(24). Le défaut est l'apparition d'un tachyon vectoriel et de ses résonances, comme le montre la formule suivante:

$$6(N^3 - S^3 - R^3) = \frac{24}{\Delta} \quad (5-8)$$

Les super-cordes factorisables s'obtiennent en appariant deux hélices invariantes modulaires et de chiralité opposée. On obtient ainsi:

*En dimension d=24, un modèle nouveau, la super-corde géante, par appariement du modèle de Veneziano au modèle $6(N^3 - S^3 - R^3)$. Il semble possible de négliger le tachyon de la super-hélice et ses résonances pour les trois raisons suivantes:

- i) les états restants sont super-symétriques
- ii) le modèle résultant est sans anomalie
- iii) enfin, dans leur construction du monstre qui présente de nombreuses analogies avec notre modèle, Frenkel, Lepowski et Meurman (7) ont réussi à soustraire 24 au développement du caractère (Leech/ Δ).

Nous estimons donc possible l'existence, en dimension d=24, d'une corde super-symétrique, sans tachyon, qui serait associée au gentil monstre de Fisher-Griess.

*En dimension d=8, on obtient les modèles de types II \mathbf{A} (II \mathbf{B}) en appariant deux hélices (N-S-R), tel que leurs vides de Ramond soient de chiralité égale (opposée) (8).

*En même dimension critique, on obtient les modèles hétérotiques(3) en appariant une hélice (N-S-R) à une hélice bosonique $E_4 \cdot 2 / \Delta$. Le groupe de symétrie interne est alors $E_6 \times E_8$ ou D_{16} .

*En dimension d=0, on obtient 23 modèles de Neimeier en appariant l'une de ces hélices bosoniques aux modèles $\sigma, N=2$ super-symétriques.

6-CLASSIFICATION DES SUPER-CORDES POLYGENIQUES.

Les super-cordes polygéniques, ou modèles twistés (25;27), s'obtiennent en mélangeant les résultats des sections 4 et 5.

Nous cherchons à écrire une fonction spectrale de la forme:

$$X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = \left[\sum_{a, b} X_b(\bar{z}) M_{ba} X_a(z) \right] \cdot \eta^{-d}(z) \cdot \bar{\eta}^{-d}(\bar{z}) \quad (6-1)$$

qui soit covariante modulaire. Nous supposons que l'ensemble des fonctions $X_a(z)$, indexées par les éléments a d'un ensemble fini A , est un espace vectoriel fermé sous les transformations de Γ . Il existe un sous-groupe normal $\Gamma(N)$ de Γ qui laisse invariant chacune des fonctions $X_a(z)$. L'ensemble $A = \{a\}$ porte une représentation de $\Gamma/\Gamma(N)$.

Pour construire une corde fermée invariante sous Γ , il suffit de trouver deux ensembles $B = \{X_b(\bar{z})\}$ et $A = \{X_a(z)\}$, formés de fonctions invariantes sous le même sous-groupe $\Gamma(N)$ de Γ , tel que le produit $A \times B$ contienne la représentation triviale de $\Gamma/\Gamma(N)$.

La théorie des algèbres de Kac-Moody s'avère ici extrêmement utile. En effet, Kac et Peterson ont montré que l'ensemble des q -dimensions des représentations de même niveau d'une algèbre affine est fermé sous Γ . Par exemple, dans le cas des représentations de niveau un des algèbres $A_L^{(4)}$, $D_L^{(4)}$ et $E_L^{(4)}$, les fonctions cordes étant toutes égales à $\eta^{-L}(q)$, cet énoncé est la simple traduction de l'identité de Jacobi appliquée aux fonctions thétas de ces algèbres de Lie (voir appendix A et B).

L'ensemble des fonctions $X_a(z)$ peut donc être choisi comme étant formé de q -dimensions de modules d'algèbres affines. Les modèles polygéniques décrits dans la section 4 sont effectivement de ce type. Nous montrons ici que les modèles twistés (25;27) s'inscrivent dans ce cadre. Par exemple, considérons le modèle bosonique $d=16$ (équ. 3.10; sect. 3), vu comme module de Poincaré(16), dont l'hélice gauche s'écrit

$$X_G^{(16)}(z) = \frac{E_4(z)}{\eta^{24}(z)} = \eta^{-16}(z) \cdot \left[B_{D_{16}}(z) + S_{D_{16}}(z) \right] \quad (6-2)$$

où $B_{D_{16}}$ et $S_{D_{16}}$ sont les q -dimensions des représentations basiques et spinorielles de D_{16} ⁽¹⁾. Ainsi, la double hélice (E_8, E_8) s'écrit:

$$X_{E_8, E_8}(z, \bar{z}) = \gamma(z)^{-16} \gamma(\bar{z})^{-16} \left[B_{D_8}(z) + S_{D_8}(z) \right] \cdot \left[B_{D_8}(\bar{z}) + S_{D_8}(\bar{z}) \right] \quad (6-3)$$

D'autre part, la fonction spectrale de modèle $D_8 \cdot D_8$ d'Englert et Neveu est:

$$X_{D_8, D_8}(z, \bar{z}) = \gamma(z)^{-16} \gamma(\bar{z})^{-16} \left[B_{D_8}(z) \cdot B_{D_8}(\bar{z}) + V_{D_8}(z) V_{D_8}(\bar{z}) + S_{D_8}(z) S_{D_8}(\bar{z}) + \bar{S}_{D_8}(z) \bar{S}_{D_8}(\bar{z}) \right] \quad (6-4)$$

Par soustraction, nous obtenons une théorie invariante modulaire:

$$X_{II_B}^{(16)}(z, \bar{z}) = \gamma(z)^{-16} \gamma(\bar{z})^{-16} \left[V_{D_8}(z) V_{D_8}(\bar{z}) + S_{D_8}(z) S_{D_8}(\bar{z}) - \bar{S}_{D_8}(z) B_{D_8}(\bar{z}) - B_{D_8}(z) \bar{S}_{D_8}(\bar{z}) \right] \quad (6-5)$$

Pour conserver le principe spin-statistique, nous devons identifier les groupes $SO(16)$ gauche et droit au groupe de Lorentz transverse. Les états chiraux de masse nulle sont deux états spinoriels (χ_R et ψ_L), de chiralité opposée, provenant de $(BS+SB)$, et d'un champ antiself-dual provenant de $S\bar{S}$. Ce modèle est sans anomalie gravitationnelle (26). Cette nouvelle construction explique le signe inattendu de la référence 26. Ce modèle, qui possède des tachyons mais pas de graviton, ni de champs vectoriel n'est pas intéressant.

Une construction plus astucieuse a été récemment proposée par plusieurs groupes de la côte Est (25;27).

Considérons le modèle de Neveu-Schwarz-Ramond, ou plus exactement, considérons l'algèbre affine D_4 ⁽¹⁾: leurs modules de niveau un sont:

$$B_{D_4} ; V_{D_4} ; S_{D_4} ; \bar{S}_{D_4} \quad (6-6)$$

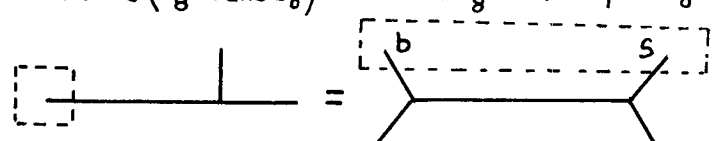
Comme nous l'avons vu à la section précédente, leurs q -dimensions sont invariantes sous $\Gamma(2)$. Le centre de D_4 est $Z_2 \times Z_2$, et il est naturellement associé au choix d'une structure spinorielle. Le principe de ces modèles consiste à associer les automorphismes de D_4 avec les transformations d'ordre deux agissant sur le secteur gauche de la corde hétérotique. Ces transformations sont définies par les automorphismes d'ordre deux des algèbres $E_8 \times E_8$ et D_{16} .

Un module de Kac-Moody peut se décomposer de deux façons différentes vis à vis d'une sous-algèbre définie par un automorphisme d'ordre deux. Ces deux décompositions correspondent à deux graduations différentes de l'algèbre affine (1).

Considérons par exemple l'algèbre $E_g^{(1)}$. La graduation homogène, d_0 , centralise une algèbre E_g dite horizontale

$$[d_0, E_g] = 0 \quad (6-7)$$

Cette algèbre horizontale E_g contient une sous-algèbre D_g définie par un automorphisme d'ordre 2 de E_g . Le module de base de $E_g^{(1)}$ se décompose par rapport à l'algèbre affine $D_g^{(1)}$ comme

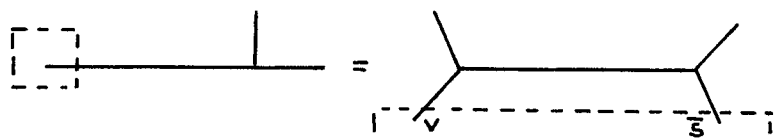
$$\text{Basic}(E_g^{(1)} \text{ dans } d_0) = \text{Basic } D_g^{(1)} + \text{Spin } D_g^{(1)} \quad (6-8)$$


Remarquons que $D_g^{(1)}$ est ici considérée dans sa graduation homogène puisque d_0 commute avec D_g .

Considérons maintenant la graduation twistée de $E_g^{(1)}$, d_1 , qui centralise une nouvelle algèbre \tilde{D}_g ,

$$[d_1, \tilde{D}_g] = 0 \quad (6-9)$$

Dans cette graduation twistée, le module de base de $E_g^{(1)}$ se décompose en module de l'algèbre affine $\tilde{D}_g^{(1)}$ selon:

$$\text{Basic}(E_g^{(1)} \text{ dans } d_1) = \text{Vect } \tilde{D}_g^{(1)} + \overline{\text{Spin}} \tilde{D}_g^{(1)} \quad (6-10)$$


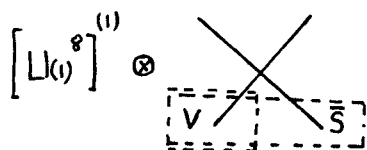
Notons que les représentations de $\tilde{D}_g^{(1)}$ sont considérées dans leur graduation homogène puisque, par définition, d_1 commute avec \tilde{D}_g .

Les modèles twistés peuvent être construits en décomposant, suivant ce schéma, le secteur gauche de la corde hétérotique. Les modules de Kac-Moody obtenus par cette décomposition sont recouplés au secteur droit dans une combinaison invariante modulaire.

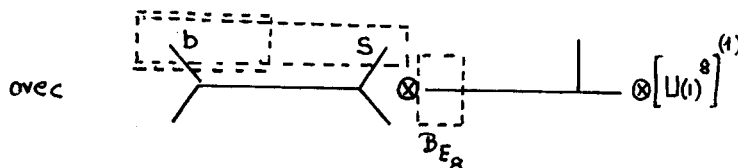
Modèle $D_8 \times E_8$:

Le plus simple de ces modèles twistés coorespond à ne décomposer qu'un seul des E_8 de la corde hétérotique construite sur $E \times E$. Le secteur droit contient toujours 8 champs bosoniques et 8 champs fermioniques formant une représentation de $(U(1)^8, D_4)^{(1)}$. Le secteur gauche contient le même spectre de champ que la corde hétérotique, mais l'un des E_8 est décomposé sur D_8 . On couple les deux secteurs de la façon suivante

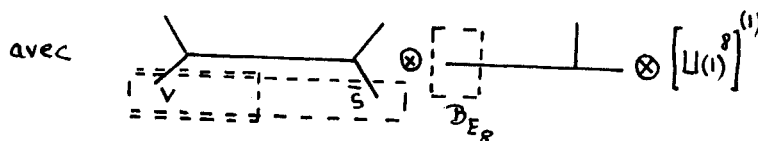
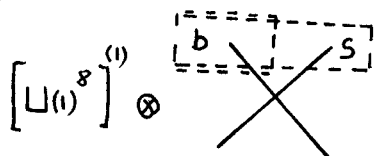
secteur droit



secteur gauche



et



Le super-spectre de masse de la théorie est donc:

$$\begin{aligned}
 X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = & \tilde{\eta}^{-8}(z) \tilde{\eta}^{-8}(\bar{z}) \cdot B_{E_8}(\bar{z}) \cdot \left\{ V_{D_4}(z) B_{D_8}(\bar{z}) - \bar{S}_{D_4}(z) \cdot S_{D_8}(\bar{z}) \right. \\
 & \left. + B_{D_4}(z) V_{D_8}(\bar{z}) - S_{D_4}(z) \cdot \bar{S}_{D_8}(\bar{z}) \right\} \quad (6-11)
 \end{aligned}$$

On note $B_{E_g}(q)$ la q -dimension de la représentation de base de $E_g^{(4)}$. Et on note respectivement par $B_{D_L}(z)$, $V_{D_L}(z)$, $S_{D_L}(z)$, les q -dimensions des représentations basique, vectorielle et spinorielle de $D_L^{(4)}$; (toutes ces représentations sont considérées dans leur graduation homogène). Cette écriture de $X(z, \bar{z})$ montre comment sont recouplés les secteurs droit et gauche. Par exemple, la représentation vectorielle de $D_4^{(4)}$ du secteur droit est couplée avec la représentation basique de $D_8^{(4)}$ du secteur gauche, et ainsi de suite...

Ce modèle possède 8 tachyons scalaires à valeur dans la représentation vectorielle de D_8 . Son spectre de masse nulle est constitué d'un graviton $g_{\mu\nu}$, d'un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$, d'un scalaire, d'un spineur droit (gauche), à valeur dans spin (D_8) (dans $\overline{\text{spin}}(D_8)$) et d'un vecteur de Yang-Mills à valeur dans l'adjointe de $D_8 * E_8$.

Modèle $D_8 * D_8$:

Ce modèle procède de la même démarche. Nous décomposons les deux modules de $E_g^{(4)}$. On couple les modules droit et gauche issus de cette décomposition, de sorte que le super-spectre de masse soit donné par

$$\begin{aligned}
 X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = \gamma(z) \gamma(\bar{z}) \cdot \left\{ \right. & V_{D_4}(z) \left[B_{D_8}(\bar{z}) B'_{D_8}(\bar{z}) + S_{D_8}(\bar{z}) S'_{D_8}(\bar{z}) \right] \\
 & - \bar{S}_{D_4}(z) \left[B_{D_8}(\bar{z}) S'_{D_8}(\bar{z}) + B'_{D_8}(\bar{z}) S_{D_8}(\bar{z}) \right] \\
 & + B_{D_4}(z) \left[V_{D_8}(\bar{z}) \bar{S}'_{D_8}(\bar{z}) + \bar{S}_{D_8}(\bar{z}) V'_{D_8}(\bar{z}) \right] \\
 & \left. - S_{D_4}(z) \left[V_{D_8}(\bar{z}) V'_{D_8}(\bar{z}) + \bar{S}_{D_8}(\bar{z}) \bar{S}'_{D_8}(\bar{z}) \right] \right\} \quad (6-12)
 \end{aligned}$$

La théorie ne possède pas de tachyon (à cause de la condition $M_D = M_G$), le spectre de masse nulle est formé d'un graviton, d'un tenseur antisymétrique et d'un scalaire, d'un vecteur de Yang-Mills à valeur dans l'adjointe de $(D_8 * D_8)$, et de deux spineurs de chiralité opposée, à valeur dans les représentations (vecteur, vecteur) et (spineur, scalaire)+(scalaire, spineur). La théorie n'est pas super-symétrique.

Modèle $(A_1 \times E_7)^2$.

La seconde sous-algèbre de E centralisée par un automorphisme d'ordre 2 est $(A_1 \times E_7)$. Il est impossible de pratiquer la décomposition sur un seul des deux modules de $E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ car la condition $M_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{G}}$ ne pourrait pas être satisfaite. On décompose donc les deux modules de $E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$. Dans la graduation homogène, qui centralise $E_{\mathfrak{g}}$, le module de base de $E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ se décompose comme:

Basic $(E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ dans d_0) = (Basic $A_1^{(1)}$, Basic $E_7^{(1)}$) + (Spin $A_1^{(1)}$, ϕ de $E_7^{(1)}$)
où ϕ est la représentation 56 de E_7 .

En revanche, dans la graduation twistée d_1 , qui centralise $(A_1 \times E_7)$, le module de base de $E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ se décompose en :

Basic $(E_{\mathfrak{g}}^{(1)}$ dans d_1) = (Spin $A_1^{(1)}$, Basic $E_7^{(1)}$) + (Basic $A_1^{(1)}$, ϕ de $E_7^{(1)}$)

On couple les différents secteurs suivant la méthode utilisée dans les deux modèles précédents. Le spectre de masse s'écrit:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = \eta(z) \eta(\bar{z})^{-8} \cdot \left\{ V_{\mathfrak{D}_4}(z) \left[\left(B_{E_7}(z) B_{A_1}(z) \right)^2 + \left(\phi_{E_7}(z) S_{A_1}(z) \right)^2 \right] \right. \\ \left. - S_{\mathfrak{D}_4}(z) \left[2 B_{E_7}(z) B_{A_1}(z) \phi_{E_7}(z) S_{A_1}(z) \right] \right. \\ \left. + B_{\mathfrak{D}_4}(z) \left[\left(S_{A_1}(z) B_{E_7}(z) \right)^2 + \left(B_{A_1}(z) \phi_{E_7}(z) \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \bar{S}_{\mathfrak{D}_4}(z) \left[2 S_{A_1}(z) B_{E_7}(z) \phi_{E_7}(z) B_{A_1}(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6-13)$$

Nous avons adopté la même notation que précédemment, en donnant le nom de la représentation à la q-dimension du module correspondant (par exemple: $\phi_{E_7}(q)$ correspond à la q-dimension du module 56 de $E_7^{(1)}$).

La théorie possède un tachyon de masse 2 $(-1/2)$. Le secteur de masse nulle est composé d'un graviton, d'un tenseur antisymétrique, d'un scalaire, d'un vecteur de Yang-Mills à valeur dans l'adjointe de $(A_1 \times E_7)^2$ et de deux spineurs de chiralité opposée à valeur dans les représentation:

$((1, 1; 2, 56) + (2, 56; 1, 1))$ et $((2, 1; 1, 56) + (1, 56; 2, 1))$ de $A_1 \times E_7; A_1 \times E_7$.

Ce sont les seules théories que l'on peut construire à partir du modèle hétérotique $E_8 \times E_8$. Les autres théories sont construites sur le modèle hétérotique ayant D_{16} comme groupe de jauge. Les sous-algèbres $D_4 \times D_{12}$ de D_{16} sont centralisées par des automorphismes d'ordre deux de D_{16} .

Mais seule la sous-algèbre $(D_4 \times D_{12})$ permet de construire une nouvelle théorie. Pour les autres sous-algèbres de ce type, la condition $M_G = M_D$ ne peut jamais être satisfaite.

Modèle $D_4 \times D_{12}$:

On décompose donc D_{16} sur $D_4 \times D_{12}$. On modifie légèrement la méthode précédente de couplage des secteurs gauche et droit, de manière à préserver l'existence d'un champ de Yang-Mills parmi les états de masse nulle. La fonction est :

$$\begin{aligned}
 X_{\text{masse}}(z, \bar{z}) = & \bar{\gamma}(z) \cdot \bar{\gamma}(\bar{z}) \cdot \left\{ V_{D_4}(z) \left[B_{D_4}(\bar{z}) B_{D_{12}}(\bar{z}) + S_{D_4}(\bar{z}) S_{D_{12}}(\bar{z}) \right] \right. \\
 & + B_{D_4}(z) \left[B_{D_4}(\bar{z}) S_{D_{12}}(\bar{z}) + S_{D_4}(\bar{z}) B_{D_{12}}(\bar{z}) \right] \\
 & - S_{D_4}(z) \left[V_{D_4}(\bar{z}) V_{D_{12}}(\bar{z}) + \bar{S}_{D_4}(\bar{z}) \bar{S}_{D_{12}}(\bar{z}) \right] \\
 & \left. - \bar{S}_{D_4}(z) \left[V_{D_4}(\bar{z}) \bar{S}_{D_{12}}(\bar{z}) + \bar{S}_{D_4}(\bar{z}) V_{D_{12}}(\bar{z}) \right] \right\} \quad (6-14)
 \end{aligned}$$

Cette théorie possède des tachyons scalaires à valeur dans la représentation $(\text{Spin}, 1) + (1, \text{Spin})$ de $D_4 \times D_{12}$. Les états de masse nulle sont un graviton, un tenseur antisymétrique, un scalaire, un vecteur de Yang-Mills dans l'adjointe de $D_4 \times D_{12}$ et deux spineurs de chiralité opposée dans les représentations, $(\text{vecteur}, \text{vecteur})$ et $(\text{spin}, \text{vecteur})$.

Enfin, les automorphismes d'ordre 2, qui centralisent $(U(1) \times D_{15})$ et $(U(1) \times A_{15})$ dans D_{16} , fournissent deux nouvelles théories. Par exemple, la théorie fondée sur $(D_{16} \times U(1))$, se recombine pour former une nouvelle

théorie ayant pour groupe de jauge D_{16} . Elle correspond à la fonction spectrale suivante:

Modèle D_{16} :

$$X_{\text{mass}^e}(z, \bar{z}) = \bar{\eta}^{-8}(z) \cdot \bar{\eta}^{-8}(\bar{z}) \cdot \left\{ V_{D_4}(z) \bar{B}_{D_{16}}(\bar{z}) - \bar{S}_{D_4}(z) S_{D_{16}}(\bar{z}) \right. \\ \left. + \bar{B}_{D_4}(z) V_{D_{16}}(\bar{z}) - S_{D_4}(z) \bar{S}_{D_{16}}(\bar{z}) \right\} \quad (6.15)$$

La théorie possède des tachyons à valeur dans la valeur de D_{16} et les états de masse nulle sont formés d'un graviton, d'un tenseur antisymétrique, d'un scalaire et d'un vecteur de Yang-Mills à valeur dans l'adjointe de D_{16} . Il n'y a pas de fermions parmi les états de masse nulle.

CONCLUSION

Nous avons donc montré comment tous les modèles de théories des cordes connus (usuels, hétérotiques et hétérotiques twistés) possédaient une interprétation simple en termes de modules de Kac-Moody.

Il est intéressant de noter que tous ces modèles sont issus d'une simple extension de l'argument de Neveu . La cohérence à une boucle de ces théories est assurée par le couplage des modules de Kac-Moody gauches et droits en une combinaison invariante modulaire. L'analyse des automorphismes des algèbres affines fournit une classification de ces fonctions invariantes modulaires, et, donc une classification de ces modèles de cordes.

Enfin, il serait intéressant de trouver le lien entre ces différents modèles. Ils semble correspondre à différents choix du vide d'une même théorie, car, dans les algèbres affines, le choix d'un vide correspond au choix d'une graduation. Ces modèles pourraient donc être des représentations, non-unitairement équivalentes, d'une même théorie. La condition de Narain, qui relie les théories hétérotiques compactifiées aux réseaux Lorentziens self-duaux, semble indiquer que ces théories seraient liées aux algèbres Lorentziennes.

A-PROPRIETES MODULAIRES DES FONCTIONS THETAS

Dans cet appendix, nous rappelons quelques propriétés modulaires des fonctions thétas des réseaux pairs, et des fonctions $\Theta \begin{bmatrix} \sigma \\ \phi \end{bmatrix}$ définies ci-contre (équations A.4 et A.7).

Soit, $\Lambda = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \vec{\alpha}_i$, un réseau engendré par les n vecteurs indépendants $\vec{\alpha}_i$. Λ est un réseau pair si $\forall \alpha \in \Lambda, \alpha^2 \in 2\mathbb{Z}$. Pour tout réseau pair, on définit la fonction thêta de Λ , par:

$$\Theta_{\Lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{\lambda^2/2} \quad ; \quad q = e^{i2\pi z} \quad (A-1)$$

$\Theta_{\Lambda}(z)$ est évidemment holomorphe dans le demi-plan complexe supérieur. Evidemment, comme Λ est un réseau pair, $\Theta_{\Lambda}(z)$ est invariant sous la translation ($z \rightarrow z+1$)

$$\Theta_{\Lambda}(z+1) = \Theta_{\Lambda}(z) \quad (A-1)$$

La loi de transformation de $\Theta_{\Lambda}(z)$ sous l'inversion ($z \rightarrow -1/z$) se déduit de la formule de Poisson:

$$\Theta_{\Lambda}(-1/z) = \frac{1}{\sqrt{z}} (-iz)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(z) \quad (A-3)$$

où Λ^* est le réseau dual de Λ , et où, $Z = \text{Det}(\vec{\alpha}_i \vec{\alpha}_j)$ est le volume de la cellule élémentaire de Λ .

En particulier, si Λ est pair et self-dual, Θ_{Λ} est une forme modulaire de poids $(n/2)$. D'après les propriétés des formes modulaires, rappelées dans la section 3. Il s'ensuit qu'en dimension $n < 24$, les réseaux pairs et self-duaux ont une dimension $n \equiv 0 \pmod{8}$. Par exemple, la fonction du réseau de E_8 est une forme modulaire de poids 4, et, elle s'identifie donc avec la série d'Eisenstein $E_4(z)$.

Plus généralement, on définit la fonction thêta d'un réseau pair translaté d'un vecteur v appartenant au réseau dual,

$$\theta_{v+\Lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{(v+\lambda)^2/2} \quad (\text{A-4})$$

La loi de transformation de $\theta_{v+\Lambda}$, sous l'effet de la translation ($z \rightarrow z+1$) dépend évidemment de la norme de v :

$$\theta_{v+\Lambda}(z+1) = e^{i\pi v^2} \theta_{v+\Lambda}(z) \quad (\text{A-5})$$

Sous l'effet de l'autre transformation modulaire élémentaire ($z \rightarrow -1/z$), (A-4) se transforme en:

$$\theta_{v+\Lambda}(-1/z) = \frac{1}{\sqrt{z}} (-iz)^{n/2} \sum_{\omega \in \Lambda^*} e^{i2\pi \omega^2 z} e^{i2\pi \omega \cdot v} \quad (\text{A-6})$$

Ces lois de transformations suffisent à démontrer la consistance de la compactification à la Neveu et Englert, (section 4).

D'autre part, définissons les fonctions $\Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}$ par:

$$\begin{aligned} \Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}(z) &= \sum_n e^{i\pi(n+\theta)^2 z} e^{i2\pi(n+\theta)\phi} \\ &= \sum_n e^{i2\pi(n+\theta)\phi} q^{(n+\theta)^2/2} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Les propriétés modulaires de ces fonctions sont:

$$\Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}(z+1) = e^{-i\pi\theta(\theta+1)} \Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi+\theta+1/2 \end{bmatrix}(z) \quad (\text{A-8})$$

et

$$\Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}(-1/z) = e^{-i2\pi\theta\phi} (-z)^{1/2} \Theta \begin{bmatrix} \phi \\ -\theta \end{bmatrix}(z) \quad (\text{A-9})$$

Les fonctions $\Theta \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}$, avec $\theta, \phi = 0$ ou $1/2$, forment un ensemble fermé sous les transformations modulaires. Elles sont aussi des fonctions propres

des différents sous-groupes $\Gamma_0(2)$, $\Gamma^0(2)$ et Γ_θ de Γ . Plus particulièrement, on a

$$\begin{aligned}\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z) &= \sum_n q^{n^2/2} = \prod_n (1+q^{n+1/2})^2 (1-q^n) \\ \Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right](z) &= \sum_n (-1)^n q^{n^2/2} = \prod_n (1-q^{n+1/2})^2 (1-q^n) \\ \Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z) &= \sum_n q^{(n+1/2)^2/2} = 2 q^{1/8} \prod_n (1+q^n)^2 (1-q^n)\end{aligned}\tag{A-10}$$

La fonction $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right](z)$ est identiquement nulle. Sous la transformation modulaire ($z \rightarrow z+1$), les fonctions $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ et $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right]$ s'échangent; en revanche, $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ est invariante à un terme de phase près. Sous la transformation modulaire ($z \rightarrow -1/z$), la fonction $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ est de poids modulaire défini.

$$\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](-1/z) = (-iz)^{1/2} \Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z)\tag{A-11}$$

alors que les fonctions $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right]$ et $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ s'échangent:

$$\begin{aligned}\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right](-1/z) &= (-iz)^{1/2} \Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z) \\ \Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](-1/z) &= (-iz)^{1/2} \Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right](z)\end{aligned}\tag{A-12}$$

Les sous-groupes d'invariance à une phase près des fonctions $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right]$ et $\Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ sont respectivement Γ_θ , $\Gamma^0(2)$ et $\Gamma_0(2)$.

De ces propriétés de transformation, on peut déduire les lois de transformation de la fonction $\eta(z)$ de Dedekind

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_n (1-q^n)\tag{A-13}$$

En effet

$$2^3 \eta^3(z) = \Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z) \cdot \Theta\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z) \cdot \Theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right](z)\tag{A-14}$$

Ainsi, $\eta^3(z)$ est une forme modulaire à un terme de phase (racine 24^{e} de l'unité) près: $\eta^3(z)$ est donc une forme modulaire de poids 12.

De ces propriétés, on peut aussi retrouver que les fonctions thêtas de E_8 et $+(D_{16}) \cong \Lambda(D_{16}) + (S + \Lambda(D_{16}))$ sont des formes modulaires. En

effet, par rapport à sa sous-algèbre régulière D_8 , l'algèbre E_8 se décompose en

$$\text{Adj}(E_8) = \text{Adj}(D_8) + \text{Spin}(D_8) \quad (\text{A-15})$$

La fonction thêta de E_8 s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \theta_{E_8}(z) &= \theta_{D_8}(z) + \theta_{S+D_8}(z) \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^8(z) + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}^8(z) \right] + \frac{1}{2} \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}^8(z) \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

Cette fonction est une forme modulaire d'après les relations (A.11;A.12). D'ailleurs, par unicité de la forme modulaire de poids 4, on aurait pu faire le raisonnement inverse, et ainsi, montrer la dernière égalité entre les fonctions $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \end{bmatrix}^8$ et la fonction thêta de E_8 . De même, en dimension 16:

$$\begin{aligned} \theta_{+(D_{16})}(z) &= \theta_{D_{16}}(z) + \theta_{S+D_{16}}(z) \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{16}(z) + \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}^{16}(z) \right] + \frac{1}{2} \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}^{16}(z) \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

est aussi une forme modulaire de poids 8. Ce qui montre que $+(D_{16})$ est un réseau pair et self-dual.

B-QUELQUES FORMULES DE CARACTERES

La démonstration, du caractère covariant modulaire des spectres de masse des modèles décrits dans les sections précédentes, utilise explicitement l'expression des q-dimensions des modèles de Kac-Moody. Sans entrer dans les détails (1;28), nous rappelons ici l'expression de ces q-dimensions. Pour les algèbres affines, le générateur L_0 , de l'algèbre de Virasoro associée, s'identifie avec la dérivation de l'algèbre affine. Ces opérateurs dépendent effectivement de la graduation. La q-dimension d'un module V est définie par :

$$chV(z) = \text{Tr}_V \left[q^{L_0 - c/24} \right] \quad (B-1)$$

où c est la charge centrale de l'algèbre de Virasoro associée. L'expression exacte de ces q-dimensions peuvent s'obtenir via l'étude de leur propriétés modulaire ou, via une construction explicite de ces modules. Les q-dimensions des représentations de niveau un des algèbres affines $A_L^{(1)}, D_L^{(1)}, E_L^{(1)}$, qui ont pour plus haut poids h , se factorisent, dans la graduation homogène, sous la forme:

$$chV_h(z) = \eta^{-L}(z) \cdot Q_{h+\Lambda}(z) \quad (B-2)$$

où

$$Q_{h+\Lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{(\lambda+h)/2}$$

Λ dénote le réseau des racines de l'algèbre de Lie g .

*) $E_g^{(1)}$ n'a qu'une représentation de niveau un: la représentation basique pour laquelle $h=0$. Sa q-dimension est:

$$B_{E_g}(z) = E_4(z) / \eta^8(z) \quad (B-3)$$

*) Les algèbres $D_L^{(1)}$ ont quatre représentations de niveau un: les représentations basique ($h=0$), vectorielle ($h=$ le plus haut poids de la représentation vectorielle de D_L) et spinorielles ($h=$ le plus haut

poids de l'une des représentations spinorielles de D_L). Leurs q -dimensions sont:

$$\begin{aligned} B_{D_L}(z) &= \frac{1}{2} \left[\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^L(z) + \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}^L(z) \right] \cdot \bar{\eta}^L(z) \\ V_{D_L}(z) &= \frac{1}{2} \left[\Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^L(z) - \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}^L(z) \right] \cdot \bar{\eta}^L(z) \\ S_{D_L}(z) &= \bar{S}_{D_L}(z) = \frac{1}{2} \cdot \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}^L(z) \cdot \bar{\eta}^L(z) \end{aligned} \quad (B-4)$$

*) Pour l'analyse modulaire des fonctions spectrales, nous avons aussi besoin des q -dimensions des modules de niveau un de $A_1^{(1)}$ et $E_7^{(1)}$. Elles sont évidemment données par la formule (B-2). L'algèbre n'a que deux représentations de niveau un: la basique et la spinorielle, dont les q -dimensions sont:

$$\begin{aligned} B_{A_1}(z) &= \bar{\eta}^{-1}(z) \cdot \left(\sum_n q^{n^2} \right) \\ S_{A_1}(z) &= \bar{\eta}^{-1}(z) \cdot \left(\sum_n q^{(n+1/2)^2} \right) \end{aligned} \quad (B-5)$$

Ces fonctions satisfont les relations suivantes:

$$\begin{aligned} B_{A_1}^2(z) - S_{A_1}^2(z) &= \bar{\eta}^{-2}(z) \cdot \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}^2(z) \\ B_{A_1}^2(z) + S_{A_1}^2(z) &= \bar{\eta}^{-2}(z) \cdot \Theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^2(z) \\ 2 B_{A_1}^2(z) S_{A_1}^2(z) &= \bar{\eta}^{-2}(z) \cdot \Theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}^2(z) \end{aligned} \quad (B-6)$$

Des propriétés modulaires de ces fonctions, ainsi que de la décomposition de $E_8 \times E_8$ sur $(A_1 \times E_7)^2$, ont déduit facilement la covariance modulaire de la fonction spectrale du modèle $(A_1 E_7)^2$.

REFERENCES:

- 0- F.J. DYSON, Missed Opportunities in Bull. of the Amer. Math. Soc. 78, (1972), 635.
- 1- V.G. KAC, Infinite Dimensional Lie Algebras, Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- 2- W. NAHM, Mass spectra of dual string, Nucl. Phys. B114, (1976), 174
A classification of open string models, Commun. Math. Phys. 105, (1986), 1
- 3- D.J. GROSS, J.A. HARVEY, E. MARTINEC, R. ROHM, Heterotic string theory..., Nucl. Phys. B256, (1985), 253
- 4- V.G. KAC, Infinite Dimensional Lie Algebras and Dedekind's function, Func. Ana. P., 8, (1974), 77
- 5- A.J. BEINGOLD, J. LEPOWSKI, The Weyl-Kac formulae and power series identities, Adv. in Math. 29, (1978), 271
- 7- I. Frenkel, J. LEPOWSKI, A. MEURMAN, A natural representation of the Fisher-Griess monster..., Proc. N. Acad. Sci., 81, (1984), 3256
An E approach to F, Contemp. Math. 45, (1985), 99
- 8- J. SCHWARZ ed: Superstrings, the first fifteen years, World Scientific (1985)
- 9- E. WITTEN, Non-abelian bosonisation in two dimension, Commun. Math. 92, (1984), 455
- 10- S. MANDELSTAM, Phys. Reports, 13, (1974), 259
- 11- J. SCHWARZ, Phys. Reports, 89, (1982), 223
- 12- J.P. SERRE, Cours d'arithmétique, P.U.F., Paris 1970
- 13- H. NIEMEIER, J. Number Th. 5, (1973), 142
- 14- M. DUFF, B. NILSSON, C. POPE, Kaluza-Klein approach to the heterotic string, Phys. Letters, 163B, (1985), 343
- 15- A. SCHELLEKENS, Anomaly cancelations in ten dimensions and beyond, Phys. Letters, 175B, (1986), 41
- 16- N. MARCUS, J. THIERRY-MIEG, Modular covariance of string characters, unpublished

- 17- G. VENEZIANO, Gauge Ward identities of the compactified bosonic strings, Phys. Letters, 169B, (1986), 177
F. ARDALAN, H. ARFAEI, Critical dimensions from loops in a string sigma model, Phys. Letters, 175B, (1986), 164
- 18_ F. ENGLERT, A. NEVEU, Non-abelien compactification of the interacting bosonic string. Phys. Letters, 163B, (1985), 349
- 19- K. NARAIN, New heterotic string theory in uncompactified dimensions <10 , Phys. Letters, 169B, (1986), 41
- 20- I. FRENKEL, V.G. KAC, Basics representations of affine Lie algebras and dual resonance models, Inv. Math. 62, (1980), 23
- 21- M. KATO, K. OGAWA, Nucl. Phys. B212, (1983) 443
- 22- M. FREEMAN, D. OLIVE, BRS cohomology in string theory..., Phys. Letters, 175B, (1986) 151
- 23- D. BERNARD, J. THIERRY-MIEG, Bosonic Kac-Moody string theory, Meudon Preprint, 1986
- 24- L. ALVAREZ-GAUME, G. MOORE, C. VAFA, Thetas functions, modular invariance and strings, Commun. Math. 106, (1986), 1
- 25- N. SEIBERG, E. WITTEN, Spin Structures in string theory, Nucl. Phys. B276, (1986), 272
- 26- J. THIERRY-MIEG, Anomaly cancelation and fermionisation in 10, 18 and 26 dimensional superstrings, Phys. Letters, 171B, (1986), 163
- 27- L. ALVAREZ-GAUME, P. GINSPARG, G. MOORE, C. VAFA, An $O(16)*O(16)$ heterotic string theory, Phys. Letters 171B, (1986), 155
L. DIXON, J. HARVEY, String in ten dimension with out spacetime supersymmetry, Princeton preprint 1986
- 28- D. BERNARD, J. THIERRY-MIEG, Level one representation of affine Kac-Moody algebras in their homogeneous gradation, Meudon Preprint 1986