Recherche Coopérative sur Programme n° 25

F. Pham

Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 32
« Conférences de : V. Guillemin, A. Douady, P. Lelong et F. Pham », , exp. n° 4, p. 59-72
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__32__59_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CALCUL MICRODIFFERENTIEL COMPLEXE ET METHODE SEMI-CLASSIQUE (*)

F. PHAM

La méthode semi-classique, qui vise à ramener l'étude d'un système quantique à celle du système classique correspondant, est ici abordée dans l'esprit du programme de **Voros**[8] avec l'aide des techniques du calcul microdifférentiel complexe. Après quelques considérations générales à n dimensions on aborde quelques exemples à une dimension : effet tunnel à travers une barrière de potentiel; évaluation du spectre des états liés au fond d'un simple puits, avec une erreur exponentiellement petite comme $\exp(-c/\hbar)$.

The semi-classical method, aiming at reducing the study of a quantum system to the study of the corresponding classical system, is studied here in the spirit of **Voros**'program[8], but using the tools of complex microdifferential calculus. After some general considerations in n dimensions one starts studying some one dimensional examples : tunnelling through a potential barrier; bound-state spectrum near the bottom of a simple well, with exponentially small $\exp(-c/\hbar)$ error.

(*) *Exposé à la 36e rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens (R.C.P. n°25, I.R.M.A. Strasbourg, mai 1983).*

0. Idées générales

Considérons, dans l'espace de phase $\mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_q$, l'hamiltonien

(0) $$H_{Cl}(p,q) = \frac{p^2}{2} + V(q) \qquad (\text{où } p^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2),$$

qui décrit le mouvement classique d'une particule de masse 1 dans un potentiel V qui sera supposé analytique.

Par le principe de correspondance $p \longleftrightarrow i\hbar\,\partial_q$ on en déduit l'hamiltonien quantique

(1) $$H = -\frac{\hbar^2}{2}\partial_q^2 + V(q).$$

L'équation de Schrödinger stationnaire d'énergie E s'écrit :

(2) $$(H - E)\Phi(q,\hbar) = o.$$

La méthode semi-classique «BKW» consiste traditionnellement à essayer de résoudre (2) sous la forme

(3) $$\Phi(q,\hbar) = a\, e^{-\frac{i}{\hbar}S(q)}$$

où l'amplitude $a = \sum_{k=o}^{\infty} a_k(q)\left(\frac{\hbar}{i}\right)^k$ est une série formelle en $\hbar$ (le dénominateur $i = \sqrt{-1}$ a été introduit pour la commodité). En écrivant que (2) s'annule à l'ordre 0 en $\hbar$ on voit que la fonction S(q) doit vérifier l'équation

(4) $$(\partial_q S)^2 = 2(E - V(q))$$

où l'on reconnaît avec émerveillement *l'équation de Hamilton-Jacobi* de la mécanique classique.

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du 1er ordre, et sa solution dépend donc localement d'une fonction arbitraire de n-1 variables ("donnée de Cauchy"). La donnée d'une solution locale S détermine localement dans l'espace de phase une famille à n-1 paramètres de trajectoires classiques qui forment une *variété lagrangienne*

(5) $$L = \{(p,q) \mid p = \partial_q S\},$$

que l'action du flot hamiltonien permet de prolonger globalement comme variété immergée (en général lisse; de plus l'immersion est injective). Inversement, étant donné une variété lagrangienne L, invariante par le flot hamiltonien, l'intégration sur L de la forme différentielle fermée $p \cdot dq$ détermine (sans autre ambiguïté qu'une constante additive) une fonction S sur le revêtement universel de L. En projetant L sur l'espace des q

on peut considérer cette fonction comme fonction ramifiée de q, solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Ses points de ramification (*«points tournants»* ou *«caustiques»*) sont les valeurs critiques de la projection de L sur l'espace des q.

Supposons donc choisie une solution analytique globale (éventuellement ramifiée et multiforme $S(q)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi, ce qui nous permet de considérer le vecteur $p = \partial_q S$ comme une fonction de q (elle aussi ramifiée). En écrivant que (2) s'annule formellement à l'ordre 1,2,... en $\hbar$, on trouve les **équations de transport**

$$(6) \qquad \begin{cases} p\cdot\partial_q a_o + \frac{1}{2}(\partial_q\cdot p)a_o = o \\ \dots\dots\dots \\ p\cdot\partial_q a_k + \frac{1}{2}(\partial_q\cdot p)a_k - \frac{1}{2}\partial_q^2 a_{k-1} = o \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

qui forment un système récurrent d'équations différentielles linéaires du 1er ordre, non singulières en dehors des points tournants, et dont les solutions se propagent donc localement le long du flot du champ de vecteurs p (projection sur l'espace des q du flot hamiltonien).

Tel est, brièvement esquissé, l'essentiel de la méthode BKW, dont les difficultés sont évidentes.

Première difficulté : les séries BKW de puissances de $\hbar$ vont s'avérer non convergentes, ce qui pose le problème de leur resommation; il n'y a peut-être pas là de quoi trop inquiéter les physiciens, que le caractère divergent d'une série n'a jamais empêchés d'en tirer des résultats numériques d'une précision souvent impressionnante.

La seconde difficulté est apparemment plus inquiétante : puisque les développements BKW sont multiformes et se ramifient aux points tournants, comment faut-il choisir les branches locales qui vont donner "la solution physique", et comment se fait le "raccordement" de ces branches aux points tournants ?

Il a fallu aux physiciens de longues années pour mettre au point des règles empiriques permettant (au moins dans le cas n=1) de résoudre cette difficulté. Mais ces règles ont toujours gardé un caractère mystérieux (en tout cas pour moi) jusqu'à l'article de **Voros**[8](1981), le

premier à ma connaissance à en suggérer une voie d'accès à la fois rigoureuse et générale.
S'inspirant d'une idée de **Balian** et **Bloch**[1], Voros postule que la fonction d'onde Φ peut s'écrire exactement sous la forme d'une transformée de Laplace à une variable s (variable conjuguée de $1/\hbar$) :

$$(7) \qquad \Phi(q,\hbar) = \int_\gamma e^{-is/\hbar}\, \psi(q,s)\,ds$$

où ψ est une fonction multiforme dont il montre qu'on peut espérer des propriétés d'analycité tout à fait remarquables.

Avant de chercher à préciser la signification de (7) (propriétés d'analycité de ψ, choix de détermination, choix du contour d'intégration γ, ...) commençons par écrire la traduction formelle (pour ψ) des équations (1) (2) (3). Comme la transformation de Fourier-Laplace change la multiplication par $i/\hbar$ en la dérivation ∂_s, l'équation (3) devient

$$(8) \qquad \psi(q,s) = a(q,\partial_s^{-1})\ \delta(s-S(q))$$

et l'équation de Schrödinger (2) devient :

$$(9) \qquad \begin{cases} (\mathbb{H}-E)\,\psi = o\ , & \text{où} \\ \mathbb{H} = \frac{1}{2}\partial_q^2\,\partial_s^{-2} + V(q)\ . \end{cases}$$

A ce stade de l'exposé le lecteur est invité à ne pas chercher de signification autre que <u>formelle</u> aux équations (8)(9).
La notation $\delta(s-S(q))$ (qui est évidemment censée évoquer la fonction δ de Dirac) désigne «n'importe quoi vérifiant les équations $(s-S(q))\,\delta = o$, $(\partial_q + (\partial_q S)\partial_s)\delta = o$» ; la notation ∂_s^{-1} désigne un "inverse" formel de l'opérateur ∂_s. Le lecteur est alors invité à faire les exercices suivants.

Exercice 0. *A l'aide des règles du jeu ci-dessus, et en notant*

$$(10) \qquad a(q,\partial_s^{-1}) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k(q)\,\partial_s^{-k}\ ,$$

- *déduire de (8) (9) les équations de transport (6).*

Exercice 1. *Montrer que les solutions locales des équations de transport (6) vérifient des majorations*

$$(11) \qquad |a_k| < k!\,C^k$$

pour toutes conditions initiales vérifiant des majorations analogues.

L'exercice 1 n'est pas très facile, car la récurrence fait intervenir des dérivées des termes précédents. Une méthode que je trouve agréable (cf. [6]) consiste à utiliser les inégalités de Cauchy pour construire par récurrence des majorations de $\|a_k\|_\rho$ sur des polydisques de rayons ρ variables, grâce à une technique mise au point par Malgrange dans [5].

Ayant fait cet exercice, le lecteur aura démontré que l'expression (10) peut être considérée comme un « *opérateur microdifférentiel* », de sorte que l'expression (8) peut être considérée comme un générateur d'un « *module microdifférentiel* ». Ce module microdifférentiel est holonome, c'est-à-dire que son support dans l'espace cotangent à l'espace des (q,s) est une variété lagrangienne (conique) :

Λ = ensemble des covecteurs d'origine $(q, s = S(q))$, proportionnels à $ds - pdq$, où $p = \partial_q S$ (c.à.d. $(p,q) \in L$).

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 1 : Au voisinage de tout point simple de $\mathscr{S} = \{q, s \mid s - S(q) = 0\}$ il existe un générateur de module microdifférentiel holonome « simple » (c'est-à-dire de la forme (8)) qui est annulé par l'opérateur (9). Ce générateur « se propage par le flot hamiltonien », c'est-à-dire qu'il est entièrement déterminé, localement, par la donnée de sa restriction à une hypersurface transverse au flot. Son support est la variété lagrangienne Λ.

Dans cet énoncé, nous avons appelé "point simple" de $\mathscr{S}$ un point au voisinage duquel la projection de L sur l'espace des q est un isomorphisme (de sorte que L peut s'écrire sous la forme (5), avec S fonction analytique de q). Mais il est facile de voir qu'au voisinage de tout point lisse de L on peut se ramener à cette situation simple par une transformation canonique linéaire de l'espace (p,q). Après avoir fait subir à l'hamiltonien quantique la transformation correspondante, on en tire des équations de transport un peu plus compliquées que (6) mais de structure analogue, ce qui permet de démontrer le

Théorème 1bis : Les conclusions du théorème 1 sont vraies plus généralement au voisinage de tout point lisse de Λ où le champ hamiltonien est non singulier (c'est-à-dire $p, \partial_q V$ non tous nuls).

(Les spécialistes auront évidemment reconnu dans ce qui précède les principales idées de la démonstration des résultats généraux de Sato-Kawai-Kashiwara sur la structure des systèmes d'équations microdifférentielles à caractéristique simple).

Remarquons que les énoncés ci-dessus sont valables aussi bien dans le domaine complexe que dans le domaine réel.

Exemple : le « simple puits », pour une énergie E supérieure au minimum du potentiel (Fig.1.0)

Les figures 1.1, 1.2, 1.3 représentent respectivement L, Λ, et $\mathcal{S}$ dans le domaine réel. La courbe $\mathcal{S}$ est périodique par rapport à la coordonnée s, de période $\omega = \oint p\,dq$. La situation dans le domaine complexe est beaucoup moins simple, même pour un potentiel polynomial : la courbe $\mathcal{S}$ pourra admettre plusieurs périodes en s (les périodes de la forme différentielle $p\,dq$ sur la courbe algébrique L); si ces périodes sont incommensurables $\mathcal{S}$ pourra être de trace dense dans chacune des droites complexes $q = cte$! Il est donc important de comprendre que le théorème 1bis nous permet seulement de construire un générateur de système holonome « immergé » (et non plongé) dans l'espace des (q,s), dans la mesure où Λ est une variété immergée et non plongée.

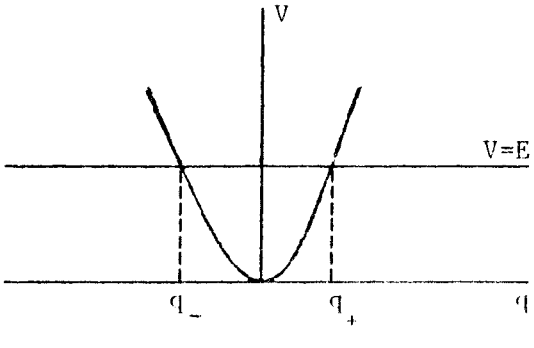

Figure 1.0

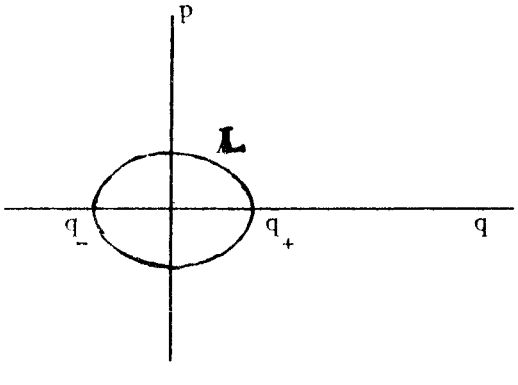

Figure 1.1

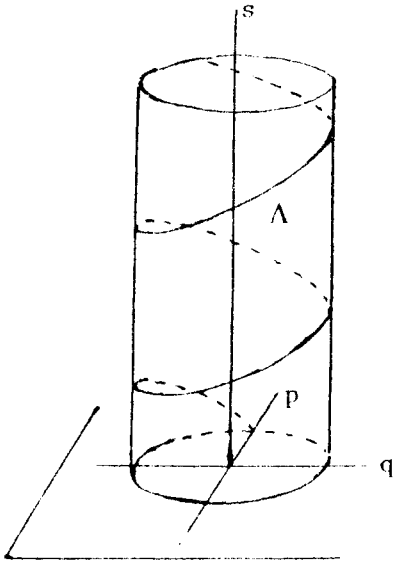

Figure 1.2

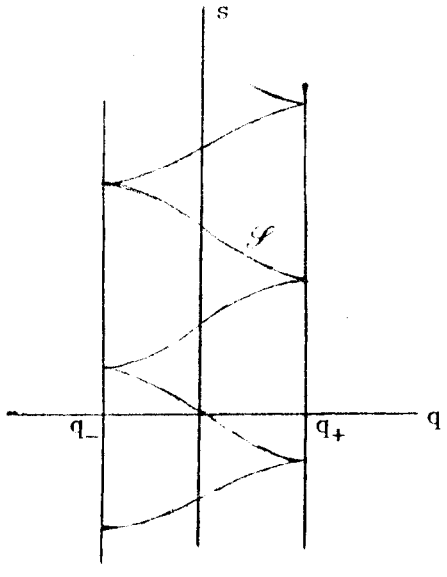

Figure 1.3

Nous pouvons maintenant exposer notre stratégie pour remplir le programme de Voros.

Il s'agira dans une **première étape** de choisir convenablement, selon le type de problème étudié (problème de diffusion, problème d'états liés...) les données initiales de l'équation de Hamilton-Jacobi d'une part, des équations de transport d'autre part, pour déterminer une variété lagrangienne immergée Λ adaptée au problème, et un générateur de module holonome porté par Λ. La donnée de ce générateur pourra être considérée comme une description du type de singularité que l'on attend pour la fonction ψ de (7), en ce sens qu'on demandera à ψ d'être localement microsolution (au sens de [7]) du même système d'équations microdifférentielles que ce générateur.

La **deuxième étape** consistera à préciser la définition de Φ (formule(7)) comme transformée de Laplace d'une microsolution convenable du système d'équations microdifférentielles ainsi construit. Cette dernière étape comporte une partie locale, entièrement résolue dans [7], et une partie globale dont nous allons ébaucher la discussion sur un exemple (dans le cas n=1).

1. Exemple : Transmission et réflexion par une barrière de potentiel simple (pour une énergie E inférieure au maximum du potentiel, cf. Fig.2.0).

La géométrie est analogue à celle du "simple puits" mentionné précédemment : ici aussi on a deux points tournants q_- , q_+ de type *Airy* , mais la période $\omega = \oint p\,dq$ est maintenant imaginaire pure.

Les figures 2.1, 2.2, 2.3 représentent, dans le plan complexe de s, les valeurs de la fonction multiforme S(q) pour les trois types de valeurs de q. Les flèches symbolisent les valeurs correspondantes de $p = \partial_q S$.

Le générateur de module holonome peut être déterminé par la condition asymptotique d'être équivalent à $p^{-\frac{1}{2}}\,\delta(s-S(q))$ quand $q \to +\infty$, le long de la branche S représentée par la flèche épaisse de la figure 2.3; ce choix correspond à un choix de normalisation de l'onde transmise : en effet on va définir Φ, dans la zone $q > q_+$, comme transformée de Laplace (7) d'une microsolution locale correspondant à cette branche.

Par passage à travers le point tournant q_+, on en déduit par les méthodes de [7] que Φ est donnée dans la zone $q_- < q < q_+$ par une transformée de Laplace de microsolution semi-locale, somme de 2 contributions (flèches épaisses de la Fig.2.2) dont le poids relatif se calcule grâce à la matrice de passage du point tournant q_+. De même, après passage du point tournant q_-, ces deux contributions en donnent quatre dans la zone $q < q_-$ (fig.2.1); le sens des flèches indique s'il s'agit de contributions à l'onde incidente (flèches vers la droite) ou à l'onde réfléchie (flèches vers la gauche); les deux contributions situées sur l'axe réel permettent de calculer la partie dominante du coefficient de réflexion (réflexion sur la paroi de gauche de la barrière de potentiel); les deux contributions situées dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, s < o$ en fournissent une correction par effet tunnel (avec réflexion sur la paroi de droite). Pour avoir la valeur exacte du coefficient de réflexion (ainsi que de celui de transmission) il faudrait prolonger jusqu'à l'infini les contours des intégrales de Laplace, mais cela nécessiterait une connaissance globale de la géométrie de tous les points tournants (y compris les points tournants complexes) de façon à bien tenir compte de toutes les éventuelles traversées de lignes de Stokes.

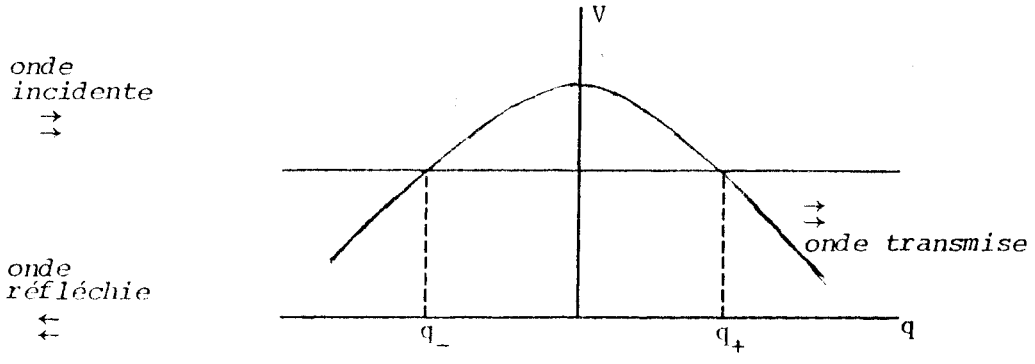

Figure 2.0 : Allure de V pour la « barrière de potentiel simple »

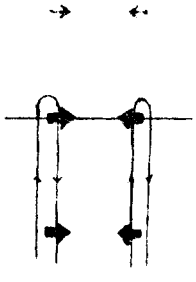

Fig. 2.1: $q<q_-$

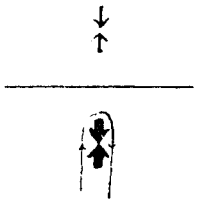

Fig. 2.2 : $q_-<q<q_+$

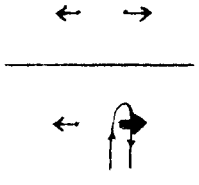

Fig.2.3: $q>q_+$

Remarque : Un travail analogue à celui que nous venons de faire pour la barrière de potentiel pourrait être fait pour le simple puits (Fig.1.0). On pourrait par exemple imposer une condition asymptotique "d'onde évanescente à l'infini" d'un côté (par exemple du côté $q<q_-$), et calculer comme précédemment ce qui se passe de l'autre côté ($q>q_+$), où au lieu de contributions "entrantes" et "sortantes" on devra parler de contributions *évanescentes à l'infini* et *explosives à l'infini*. Mais cette fois on ne saurait se contenter comme précédemment d'un calcul approché par "transformation de Laplace tronquée", car le problème physique qui se pose est celui de savoir si on a affaire à un état lié, c'est-à-dire si la partie "explosive à l'infini" est rigoureusement nulle. C'est ainsi que **Voros** étudie dans [8] le cas de l'oscillateur quartique: pour une énergie E fixée, il applique les méthodes précédentes (dans leur version globale) à l'étude exacte de la "fonction de Jost" $a_E(\hbar)$, coefficient de la partie "explosive à l'infini" de l'onde.

Dans la mesure où l'on peut mener le programme jusqu'au calcul effectif de $a_E(\hbar)$ (dont il s'agit de chercher les zéros), on peut ainsi dire pour quelles valeurs de $\hbar$ une énergie E donnée à l'avance sera une énergie d'état lié.

Notre 2e exemple va maintenant introduire un point de vue un peu différent, plus souple parce qu'il ne cherche pas à être mieux qu'approximatif.

2. Energies des états liés près du fond d'un «simple puits» à une dimension

Nous nous proposons de déterminer de façon approchée, avec erreur exponentiellement petite comme $\exp(-c/\hbar)$, les N premiers états excités (N quelconque) au voisinage d'un minimum quadratique du potentiel, disons pour fixer les idées

$$V(q) = \frac{q^2}{2} + o(q^2).$$

Pour un tel potentiel nous allons construire des fonctions d'ondes concentrées au voisinage du minimum q=o, solutions approchées de l'équation de Schrödinger (2) pour des énergies $E=E(\hbar)$ qui seront maintenant fonctions de $\hbar$ et admettront des développements asymptotiques de la forme

$$(12) \qquad E(\hbar) \propto \sum_{k=1}^{\infty} e_k \hbar^k .$$

En fait les fonctions $E(\hbar)$ seront définies comme transformées de Laplace tronquées

$$(13) \qquad E(\hbar) = \int_\gamma e^{-is/\hbar} \tilde{E}(s)\, ds$$

de «microfonctions» de la forme $E(s)=\mathbb{E}\,\delta(s)$, où $\delta(s)=[-\frac{1}{2\pi i s}]$ est la «microfonction de Dirac», tandis que les $\mathbb{E}$ sont des opérateurs microdifférentiels à coefficients constants

$$(14) \qquad \mathbb{E} = \sum_{k=1} i^k e_k \partial_s^{-k}$$

dont les coefficients e_k (les mêmes que dans (12)) seront construits par récurrence. Le chemin d'intégration γ dans (13) aura la forme indiquée par la Fig.3, avec ses extrémités aussi bas que possible dans le demi-plan $\operatorname{Im} s < o$, tout en restant dans le disque de convergence de la série

$$(15) \qquad \operatorname{Var} \tilde{E} = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{e_k}{(k-1)!} s^{k-1} .$$

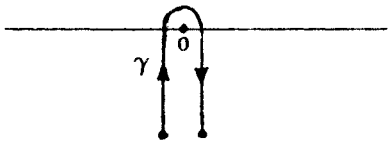

Fig.3

Cette prescription donne à la formule (13) un sens bien précis mod. $\exp(-r/\hbar)$, où r est n'importe quel nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série (15).

Compte tenu du fait que l'énergie E n'est plus une constante mais une fonction de $\hbar$ de la forme (13), l'équation de Schrödinger (2) sera approximativement vérifiée par Φ si la fonction ψ de (7) est microsolution de l'équation microdifférentielle

(16) $\qquad (\mathbb{H}-\mathbb{E})\,\psi = o,$

que l'on peut essayer d'étudier par les méthodes évoquées au §0. Mais comme la limite classique ($\hbar \to 0$) de l'énergie $E(\hbar)$ est nulle, on aura cette fois affaire à des variété lagrangiennes singulières. Les deux déterminations de l'impulsion $p(q) = \pm\, i\sqrt{2V(q)} \sim \pm\, iq$ seront imaginaires pures, et il en sera donc de même de $S(q) \sim \pm\, i\,\frac{q^2}{2}$, de sorte que la courbe $\mathscr{S}$ aura deux branches $\mathscr{S}_+$, $\mathscr{S}_-$ en contact quadratique (cf.Fig.4). Pour que Φ soit négligeable en dehors d'un voisinage de q=o il faudra demander à ψ de n'être singulière que sur la branche $\mathscr{S}_-$ de $\mathscr{S}$. Il est donc naturel

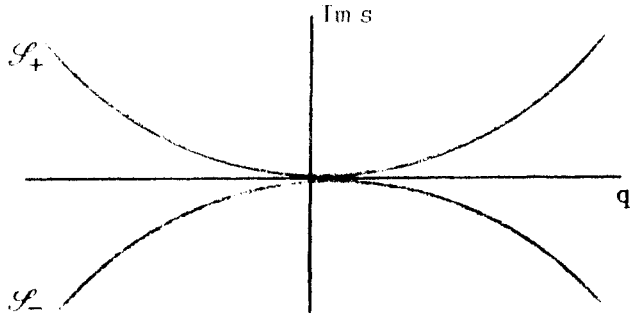

Figure 4

de chercher la singularité de ψ sous la forme (8), *en désignant par* $S(q)$ *celle des deux branches de la fonction* $S(q)$ *qui est équivalente à* $-i\,\frac{q^2}{2}$. En désignant par $p = \partial_q S$ la branche correspondante de la fonction $p(q)$, on déduit de (16) les équations de transport

$$(17)\qquad \begin{cases} p\,a_o' + (\tfrac{1}{2}p' + i\,e_1) = a_o \\ \cdots\cdots \\ p\,a_k' + (\tfrac{1}{2}p' + i\,e_1)\,a_k = \tfrac{1}{2}\,a_{k-1}'' - \sum_{\ell=1}^{k} i^{\ell+1}\, e_{\ell+1}\, a_{k-\ell} \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Comme $p \sim -iq$, ces équations différentielles sont singulières à l'origine. Pour que la première d'entre elles admette une solution a_o holomorphe à l'origine il faut et il suffit que la constante e_1 soit de la forme

(18) $\qquad e_1 = n + \frac{1}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N},$

ce qui correspond à la condition de quantification de l'oscillateur harmonique. La fonction a_o est alors équivalente à q^n quand $q \to 0$. Pour e_1 de la forme (18), la solution générale de l'équation différentielle pour a_k s'écrit :

$$(19) \qquad a_k = a_o \cdot \mathrm{prim}\left(\frac{b_k}{pa_o}\right)$$

où b_k désigne le 2^d membre de l'équation différentielle, et «prim» désigne une primitive. Cette fonction a_k sera holomorphe à l'origine si et seulement si le résidu à l'origine de la fonction à intégrer est nul :

$$\mathrm{Res}\ \frac{b_k}{pa_o} = o \quad , \quad \text{ce qui s'écrit encore}$$

$$(20) \qquad e_{k+1} = \frac{-1}{i^k}\ \mathrm{Res}\ \frac{\tilde{b}_k}{pa_o} \quad ,$$

$$\text{où } \tilde{b}_k = \tfrac{1}{2}\, a''_{k-1} - \sum_{\ell=1}^{k-1} i^{\ell+1}\, e_{\ell+1}\, a_{k-\ell} \ .$$

Les équations (19)(20) permettent de déterminer par récurrence les fonctions a_k et les constantes e_{k+1}, à l'arbitraire près du choix des primitives, arbitraire que l'on pourra lever en convenant de choisir à chaque fois celle des primitives dont le développement de Laurent n'a pas de terme constant. Il est facile de vérifier (par les mêmes méthodes qu'au §0, exercice 1) que les e_k, a_k ainsi construits satisfont aux majorations requises pour être les coefficients d'opérateurs microdifférentiels, bien définis dans un voisinage de ($q=o$, $s=o$). Par transformation de Laplace tronquée (13)(7) nous en déduisons une fonction $E(\hbar)$ (analytique dans un intervalle $o<\hbar<\epsilon$) et une fonction $\Phi(q,\hbar)$ (analytique dans un ouvert $|q|<\delta$, $o<\hbar<\epsilon$), vérifiant une majoration du type

$$(21) \qquad |(H-E(\hbar))\,\Phi(q,\hbar)| < \exp(-r/\hbar), \quad (r>o)$$

<u>De plus la fonction</u> Φ <u>elle-même</u> sera majorée par une exponentielle analogue en dehors d'un voisinage de $q=o$ (par exemple dans $\frac{\delta}{2} < |q| < \delta$, $o<\hbar<\epsilon$). En multipliant Φ par une fonction $\chi(q)$ de classe $\mathscr{C}^2$, égale à 1 dans $|q| < \frac{\delta}{2}$ et à support dans $|q| < \delta$, on obtient donc une fonction à support compact vérifiant encore une majoration du type (21).
De plus il n'est pas difficile de montrer que la norme L_2 de cette fonction n'est pas trop petite, et plus précisément qu'elle est de la forme :

$$(22) \qquad \|\Phi\|_{L^2} \sim \hbar^{\frac{n+1}{2}} .$$

Les relations (21)(22) montrent que **les fonctions $E(\hbar)$ sont des approximations de vraies valeurs propres du hamiltonien avec erreur exponentiellement petite comme** $\exp(-r'/\hbar)$.
Bien entendu les erreurs auront tendance à augmenter avec le "nombre quantique" n de (18), qu'il faudra donc majorer arbitrairement ($n<N$) si l'on veut des évaluations uniformes.

Remarque : Voros m'a signalé que la série (12) pour les énergies d'état liés du simple puits a été étudiée notamment par **Zinn-Justin**[9] d'un point de vue numérique et par **J.M.Combes, P.Duclos, R.Seiler**[3] du point de vue des séries asymptotiques. Mais la resommation (13) avec majoration exponentiellement petite de l'erreur semble être un résultat nouveau. (*)

3. ... A suivre ! ...

Il est clair que je n'ai fait ici qu'effleurer un sujet sur lequel il reste beaucoup à faire. En guise de conclusion provisoire je voudrais insister sur les idées suivantes :
le programme de Voros peut se subdiviser en une partie locale (description des singularités de la fonction ψ de (7), et de la façon dont les singularités se propagent) et une partie globale (phénomènes de "résurgence" constatés dans [8], dont nous n'avons pas parlé ici).
Le calcul microdifférentiel complexe de Sato-Kashiwara-Kawai dans sa version la plus standard (caractéristique simple) est suffisant pour réaliser la partie locale du programme de Voros en dimension quelconque pour tous les problèmes dont la limite classique est décrite par une immersion lagrangienne lisse (problèmes de diffusion pour presque toutes les valeurs de l'énergie, problèmes d'états liés dans les cas complètement intégrables, pour presque toutes les valeurs des constantes du

(*) *Après avoir rédigé cet exposé, j'ai appris que C.HELLFER et J.SJÖSTRAND venaient d'obtenir un résultat équivalent, par une méthode différente.*

mouvement). Par contre le problème global ouvre un champ d'investigation très neuf, dans lequel il semble évident que les concepts forgés par **Ecalle**[4] auront un rôle important à jouer. En outre j'ai l'impression que même l'étude du problème local, dans des situations à variétés lagrangiennes singulières, va nous réserver des surprises : par exemple dans une situation où la géométrie locale est celle du §2 mais où l'énergie ne vérifie pas les conditions de quantification (18)(20) (par exemple pour E=o) on peut voir apparaître des phénomènes de non holonomie curieusement analogues à ceux découverts par **Bros** et **Pesenti** dans un autre contexte [2]. Je soupçonne que ces phénomènes sont le reflet local, dans une situation singulière, des phénomènes de résurgence constatés dans la situation globale non singulière.

•

• *Remerciements. De stimulantes discussions avec J.C.Nosmas m'ont beaucoup aidé à dégager les idées exposées ici.*

Références

[1] **Balian,R., & C.Bloch,** *Solution of the Schrödinger Equation in Terms of Classical Paths,* Ann. of Physics 85,(1974), 514-545

[2] **Bros,J., & D.Pesenti,** *Fredholm resolvents of meromorphic kernels with complex parameters: a Landau singularity [...] in a non-holonomic case,* Preprint C.E.N. Saclay 1981, à paraître au J.de Math.Pures & Appliquées

[3] **Combes,J.M., P.Duclos & R.Seiler,** *The Born-Oppenheimer approximation,* in Rigorous Atomic and Molecular Physics Proceedings (1980), Wightman, Velo Edts., Plenum Press,(1981)

[4] **Ecalle,J.,** *Les fonctions résurgentes,* Publ.Math. Univ. Paris-Sud(1981)

[5] **Malgrange,B.,** *Frobenius avec singularités I,* Publ.Math., IHES, n°46 (1976)

[6] **Pham,F.,** *Caustiques, phase stationnaire et microfonctions,* Acta Mathematica Vietnamica 2, 2 (1977), 35-101

[7] **Pham,F.,** *Transformées de Laplace des microsolutions de systèmes holonomes,* preprint, Nice (mai 1983), soumis à l'Enseignement Mathématique

[8] **Voros,A.,** *The return of the quartic oscillator,* preprint, CEN Saclay 1981, soumis aux Ann.Inst. Henri Poincaré, (série A)

[9] **Zinn-Justin,D.,** *Expansion around instantons in quantum mechanics,* J.Math.Phys. 22 (3),(1981), 511.

•
• •

FP/da
06.83

Université de Nice
Mathématiques
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX