A. DOUADY
J. H. HUBBARD

Dynamique des applications à allure polynomiale

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 32
« Conférences de : V. Guillemin, A. Douady, P. Lelong et F. Pham », , exp. nº 2, p. 17-39
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__32__17_0>

DYNAMIQUE DES APPLICATIONS A ALLURE POLYNOMIALE

par

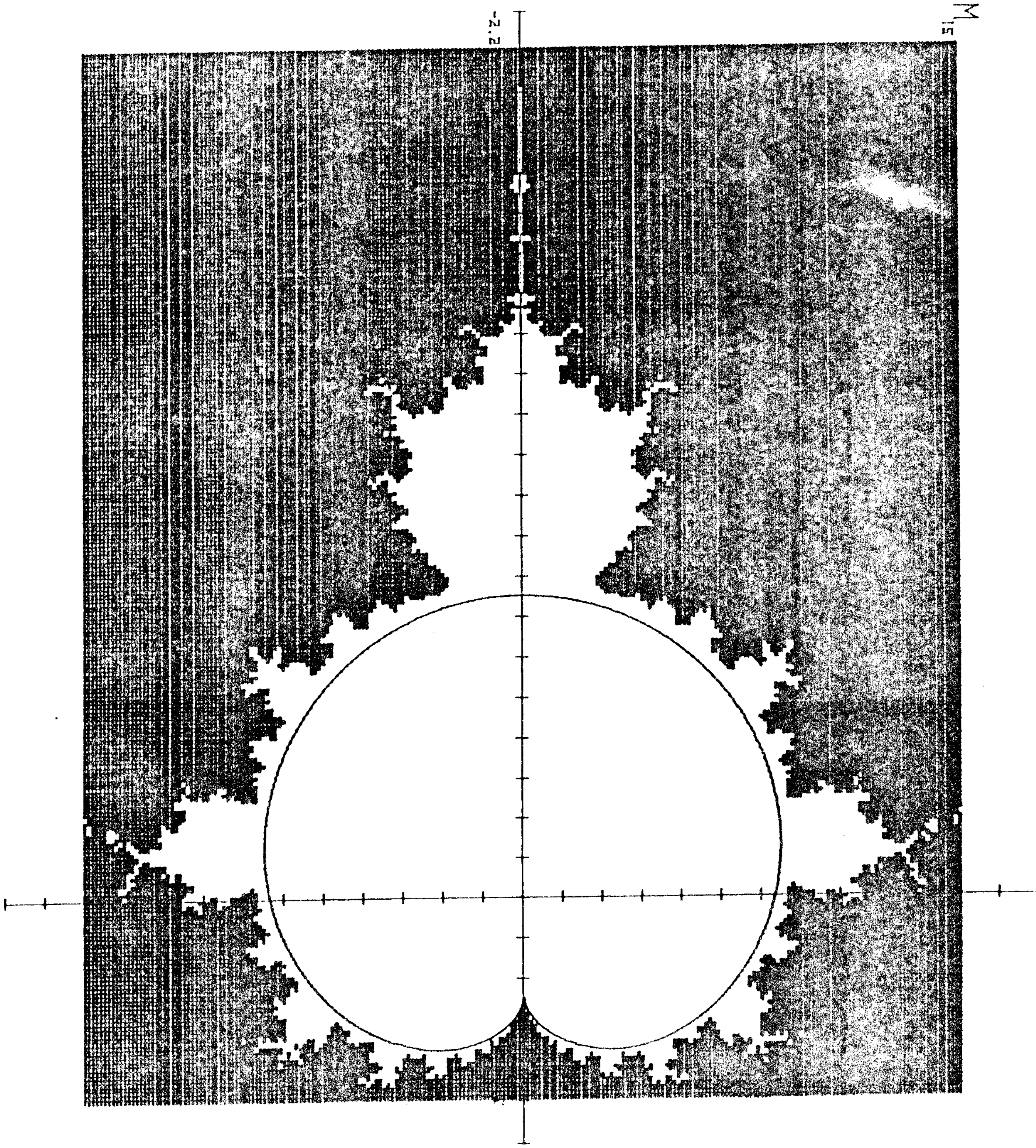
A. DOUADY et J.H. HUBBARD

Ce texte est un extrait d'un article à paraître de A. Douady et J.H. Hubbard, couvrant et développant une partie de l'exposé fait par A. Douady à Strasbourg en novembre 1982.

0 . INTRODUCTION

La figure 1 représente l'ensemble de Mandelbrot standard M. Il est défini de la façon suivante à partir de la famille de fonctions $P_c : z \mapsto z^2 + c$. Pour chaque $c \in \mathbb{C}$, on note K_c l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $P_c^n(z) = P_c(P_c(\ldots(z)\ldots))$ reste borné quand n tend vers ∞. On sait depuis 1919 (Fatou, Julia) que K_c est connexe si $0 \in K_c$, et est un Cantor sinon (le point 0 joue un rôle particulier car c'est le point critique). L'ensemble M est l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles K_c est connexe.

Figure 1 :



Quand on étudie une famille quelconque (f_λ) de polynômes ou de fractions rationnelles, de degré constant arbitraire, dépendant analytiquement d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, et que l'on classifie les valeurs de λ suivant les propriétés dynamiques de f, souvent on voit apparaître une copie de M. L'ensemble M lui-même contient une infinité de petites copies de lui-même, comme B. Mandelbrot - il aime à le rappeler - l'a observé. Le but de ce travail est d'essayer de comprendre ce phénomène.

I . APPLICATIONS A ALLURE POLYNOMIALE

1. Définition .

De même qu'une grande partie des résultats obtenus pour les polynômes $x \longmapsto x^2 + c$ avec c réel s'étendent aux fonctions convexes à dérivée schwarzienne négative, de même on est frappé, quand on étudie d'un point de vue dynamique les polynômes ou fractions rationnelles complexes, de voir que si on utilise à chaque instant les propriétés des fonctions holomorphes, on utilise fort peu la rigidité des polynômes (sauf pour la démonstration de la non-errance de Sullivan). On a donc cherché un cadre plus "mou".

Soient $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme de degré d et $U = D_R$ un disque de rayon assez grand. Alors $U' = P^{-1}(U)$ est relativement compact dans U et homéomorphe à un disque, et P induit une application analytique, propre de degré d, de U' sur U.

DÉFINITION.— *On appelle* application à allure polynomiale de degré d *un triplet* (U,U',f) *où* U *et* U' *sont des ouverts de* $\mathbb{C}$ *isomorphes au disque, avec* U' *relativement compact dans* U *, et* f *une application holomorphe, propre de degré* d *, de* U' *dans* U .

Si $\underline{f} = (U,U',f)$ est une application à allure polynomiale, on note $K_{\underline{f}}$ ou simplement K_f l'ensemble des $z \in U'$ tels que $f^n(z)$ soit défini et appartienne à U' pour tout n .

De nombreuses propriétés dynamiques s'étendent aux applications à allure polynomiale. Souvent, la démonstration peut se recopier dans ce cadre. C'est le cas pour les propriétés suivantes, dûes dans le cas des polynômes à Fatou ou Julia :

Proposition 1.- Tout cycle attractif a au moins un point critique dans son bassin immédiat.

Proposition 2.– Si tous les points critiques appartiennent à K_f , l'ensemble K_f est connexe. Si aucun point critique n'appartient à K_f , c'est un Cantor.

Proposition 3.– Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout point critique de f appartenant à K_f est attiré par un cycle attractif ;

(ii) Il existe une métrique riemannienne sur un voisinage de $J_f=\partial K_f$ et un $\lambda>1$ tels que, pour tout $x\in J_f$ et tout vecteur tangent t en x , on ait $\|T_x f(t)\|_{f(x)}\geq\lambda\|t\|_x$.

Le procédé qui consiste à copier la démonstration du cas des polynômes échoue pour étendre les deux résultats suivants :

a) La densité des points périodiques répulsifs dans J_f , démontrée pour les polynômes et les fractions rationnelles par Fatou, en utilisant le théorème de Picard ;

b) La non errance des composantes connexes de $\mathring{K}_f$, démontrée par Sullivan en utilisant le fait qu'un polynôme (ou une fraction rationnelle) ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Le Théorème 1 ci-dessous permet d'"accrocher la casserole au clou" , de déduire certaines propriétés dynamiques des applications à allure polynomiale des propriétés similaires des polynômes. Ceci s'applique notamment aux deux énoncés (a) et (b) ci-dessus.

2. Le théorème de redressement .

Soient $f : U' \longrightarrow U$ et $g : V' \longrightarrow V$ des applications à allure polynomiale. On dit que f et g sont topologiquement équivalentes et on écrit $f \underset{top}{\sim} g$ s'il existe un homéomorphisme φ d'un voisinage de K_f sur un voisinage de K_g tel que $\varphi\circ f = g\circ\varphi$ au voisinage de K_f . Si φ est quasi-conforme (resp. holomorphe), on écrit $f \underset{qc}{\sim} g$ (resp. $f \underset{hol}{\sim} g$). Nous dirons que f et g sont hybridement équivalents et nous écrirons $f \underset{hb}{\sim} g$ si φ est quasi-conforme avec $\bar\partial\varphi=0$ presque partout sur K_f . On a donc $f \underset{hol}{\sim} g \Rightarrow f \underset{hb}{\sim} g \Rightarrow f \underset{qc}{\sim} g \Rightarrow f \underset{top}{\sim} g$. Si $J_f = \partial K_f$ est de mesure nulle (et on ignore s'il y a des f pour lesquelles ce n'est pas le cas), la condition $\bar{\partial}\varphi = 0$ p.p. sur K_f équivaut à dire que φ est holomorphe sur $\mathring{K}_f$.

THEOREME 1 - a) <u>Toute application à allure polynomiale</u> f <u>de degré</u> d <u>est hybridement équivalente à un polynôme</u> P <u>de degré</u> d .

b) <u>Si</u> K_f <u>est connexe,</u> P <u>est unique à conjugaison affine près</u> .

<u>Démonstration de la partie (a)</u> :

Soit $A \subset U$ une pièce à bord C^1 , homéomorphe à $\bar{D}$, telle que $K_f \subset \mathring{A}$, que $A' = f^{-1}(A)$ soit homéomorphe à $\bar{D}$ et $A' \subset \mathring{A}$. Soit $r > 1$, posons $Q = A - \mathring{A}'$, $Q_r = \bar{D}_{r^d} - D_r$ et soit ψ un difféomorphisme de Q sur Q_r tel que $\psi(f(z)) = (\psi(z))^d$ pour $z \in \partial A'$. Notons σ_0 la structure complexe standard sur $\underline{\underline{C}}$ et σ la structure $\psi^*\sigma_0$ sur Q . Prolongeons σ à $\bigcup f^{-n}(Q) = A - K_f$ en la transportant par f , et à A par σ_0 sur K_f . On obtient sur $\mathring{A}$ une structure presque-complexe, quasi conforme à σ_0 , donc intégrable et vérifiant $f^*\sigma = \sigma$. En collant $(\mathring{A},\sigma)$ et $\Sigma - D_r$ suivant ψ , on obtient une surface de Riemann X ; l'application f et $z \mapsto z^d$ se recollent en une application analytique $g : X \to X$, avec $g^{-1}(\infty) = \infty$. Il existe un isomorphisme $\varphi : X \to \Sigma$ tel que $\varphi(\infty) = \infty$. Alors $P = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ est un polynôme de degré d et la restriction de φ à $\mathring{A}$ est une équivalence de f sur ce polynôme, cqfd.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de la partie (b), mais nous en indiquons deux variantes en degré 2 :

Proposition 4.- <u>Soient</u> c_1 <u>et</u> c_2 <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}$ <u>avec</u> $c_1 \in \partial M$. <u>Si les polynômes</u> $z^2 + c_1$ <u>et</u> $z^2 + c_2$ <u>sont quasi-conformément équivalents, on a</u> $c_1 = c_2$.

Proposition 5.- <u>Soient</u> $f : U' \to U$ <u>et</u> $g : V' \to V$ <u>deux applications à allure polynomiale de degré</u> 2 . <u>On suppose que</u> $f \underset{hb}{\sim} g$, <u>que</u> K_f <u>et</u> K_g <u>sont connexes, et qu'il existe un isomorphisme</u> $\underline{\underline{C}}$<u>-analytique</u> φ <u>de</u> $U-K_f$ <u>sur</u> $V-K_g$ <u>tel que</u> $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ <u>sur</u> $U' - K_f$. <u>Alors</u> f <u>et</u> g <u>sont holomorphiquement équivalentes</u> .

II Redressement avec paramètres.

1. Familles analytiques d'applications à allure polynomiale.

Une famille analytique, paramétrée par une variété Λ , d'applications à allure polynomiale est un triplet $(\underline{U},\underline{U}',f)$ où $\underline{U}$ et $\underline{U}'$ sont des ouverts de $\Lambda \times \underline{\underline{C}}$ homéomorphes au-dessus de Λ à $\Lambda \times D$, avec $\underline{U}' \cap (L \times \underline{\underline{C}})$ relativement compact dans $\underline{U}$ pour tout compact L de Λ , et $f : \underline{U}' \longrightarrow \underline{U}$ application au-dessus de Λ , analytique et propre.

Etant donné une telle famille, le degré d de f_λ est indépendant de λ si Λ est connexe. On note $\underline{K}$ l'ensemble des (λ,z) tels que $z \in K_\lambda = K_{f_\lambda}$; la projection $\pi : \underline{K} \longrightarrow \Lambda$ est propre. On note M_f l'ensemble des λ pour lesquels K_λ est connexe.

En vertu du Théorème 1 , pour chaque λ on peut trouver un polynôme P de degré d et un homéomorphisme $\varphi_\lambda : V_\lambda \longrightarrow W_\lambda$,où V_λ et W_λ sont des voisinages de K_λ et K_{P_λ} respectivement, définissant une équivalence hybride entre f_λ et P_λ . La question de savoir si on peut choisir P_λ et φ_λ dépendant continûment de λ est l'objet de ce paragraphe.

PROPOSITION 6.- <u>On suppose</u> Λ <u>contractile. On peut trouver dans</u> $\underline{U}$ <u>une pièce</u> $\underline{A}$ <u>difféomorphe au dessus de</u> Λ <u>à</u> $\Lambda \times \overline{D}$ <u>, telle que</u> $\underline{K} \subset \mathring{\underline{A}}$, $\underline{A}' = f^{-1}(\underline{A}) \subset \mathring{\underline{A}}$ <u>et</u> A' <u>difféomorphe au dessus de</u> Λ <u>à</u> $\Lambda \times \overline{D}$ <u>, et un difféomorphisme</u> ψ <u>de</u> $\underline{Q} = \underline{A} - \mathring{\underline{A}}'$ <u>sur</u> $\Lambda \times Q_r$ <u>au dessus de</u> Λ <u>, tel que</u> $\psi_\lambda(f_\lambda(z)) = (\psi_\lambda(z))^d$ <u>pour</u> $(\lambda,z) \in \partial\underline{A}'$.

<u>Remarque</u>: en utilisant un théorème de Cerf, on peut remplacer l'hypothèse " Λ contractile" par " Λ simplement connexe" , et même la supprimer si $d = 2$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de cette proposition.

Etant donné un difféomorphisme ψ satisfaisant aux conditions de la Prop. 6 , on peut pour chaque λ effectuer la construction décrite dans la démonstration du Th. 1 du § I . Jusqu'au n° 4, pour chaque λ on notera P_λ et φ_λ le polynôme et l'équivalence hybride ainsi obtenus.

2. La décomposition de Sullivan-Sad-Mane.

On dit que f_{λ_0} a en x_0 un point périodique indifférent persistant s'il existe une application analytique $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ définie au voisinage de λ_0 telle que $x(\lambda)$ soit un point périodique indifférent de f_λ pour tout λ et $x(\lambda_0) = x_0$. Notons $\underline{I}$ l'ensemble des λ pour lesquels f_λ admet un point périodique indifférent non persistant, $\underline{F}$ son adhérence et $\underline{R}$ l'ouvert $\Lambda - \underline{F}$.

PROPOSITION 7.- a) L'ouvert $\underline{R}$ est dense dans Λ .

b) Soit $\lambda_0 \in \underline{R}$. Il existe un voisinage W de λ_0 dans $\underline{R}$, un voisinage V_0 de K_{λ_0} dans U_{λ_0} et un plongement τ de $W \times (V_0 - \overset{\circ}{K}_{\lambda_0})$ dans $\underline{U}$ au dessus de W , vérifiant les propriétés suivantes:

(i) $\tau(\lambda, z)$ est holomorphe en λ , et quasi-conforme en z avec rapport d'ellipticité borné indépendamment de λ .

(ii) L'image de τ est de la forme $\underline{V} - \underline{K}_{|W}$, où $\underline{V}$ est un voisinage de $\underline{K}_{|W}$ dans $\underline{U}_{|W}$.

Il s'agit de résultats de Sullivan-Sad-Mañe, qui s'adaptent avec leur démonstration au cadre des applications à allure polynomiale.

PROPOSITION 8.- Supposons Λ contractile. Alors φ_λ et P_λ dépendent continûment de λ sur l'ouvert $\underline{R}$.

Pour chaque λ ,

<u>Démonstration:</u>/soit μ_λ la forme de Beltrami définissant la structure complexe σ_λ intervenant dans la démonstration du Th. 1 . Il est clair que $\|\mu_\lambda\|_\infty$ est bornée sur tout compact de Λ par une constante < 1 . En vertu des théorèmes de dépendance par rapport à un paramètre dans le théorème de Morrey-Ahlfors-Bers, il s'agit de montrer que μ_λ dépend de façon coninue de λ sur $\underline{R}$ pour la norme L^1 .

Posons $A_{n,\lambda} = f_\lambda^{-n}(A_\lambda)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $\mu_\lambda = \lim \hat{\mu}_{n,\lambda}$, où $\hat{\mu}_{n,\lambda} = \mu_\lambda$ sur $A_\lambda - A_{n+1,\lambda}$ et 0 sur $A_{n+1,\lambda}$. Il est clair que pour chaque n la forme $\hat{\mu}_{n,\lambda}$ dépend continûment de λ pour la norme L^1 . Il suffit donc de montrer que $\hat{\mu}_{n,\lambda}$ converge vers μ_λ en norme L^1 uniformément sur tout compact de $\underline{R}$, autrement dit que l'aire $\underline{m}_n(\lambda)$ de $A_{n,\lambda} - K_\lambda$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $\underline{R}$.

Remarquons que c'est faux au voisinage des points de $\underline{F}$. En effet l'aire de $A_{n,\lambda}$ dépend continûment de λ pour chaque n , mais pas celle de K_λ .

La propriété à démontrer ne dépend pas du choix de $\underline{A}$. Au voisinage d'un point donné de $\underline{R}$, on peut prendre les A_λ constants dans la trivialisation de Sullivan-Sad-Mane, d'où un homéomorphisme quasi-conforme $\tau : A_{\lambda_0} - K_{\lambda_0} \longrightarrow A_\lambda - K_\lambda$ dépendant de façon holomorphe de λ . On a

$$\underline{m}_n(\lambda) = \int_{A_{n,\lambda_0} - K_{\lambda_0}} \mathrm{Jac}\,(\tau_\lambda) \quad ;$$

posons

$$\underline{n}_n(\ ) = \int_{A_{n,\lambda_0} - K_{\lambda_0}} \| D\,\tau_\lambda \|^2 \quad .$$

Les fonctions $\underline{n}_n$ forment une suite décroissante de fonctions pluri-sous-harmoniques. Sur un compact contenu dans une composante connexe de $\underline{R}$, on a des inégalités $a\underline{n}_n(\lambda) \le m_n(\lambda) \le b\underline{n}_n(\lambda)$ avec a et b indépendants de λ et de n et $a > 0$. Par suite

$$\underline{m}_n(\lambda) \xrightarrow[\text{simpt}]{} 0 \Rightarrow \underline{n}_n(\lambda) \xrightarrow[\text{simpt}]{} 0 \Longrightarrow \underline{n}_n(\lambda) \xrightarrow[\text{unift}]{} 0 \Longrightarrow \underline{m}_n(\lambda) \xrightarrow[\text{unift}]{} 0$$

cqfd.

3. Limites quand λ tend vers un point de $\underline{F}$.

PROPOSITION 9.– *Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. De toute suite (λ_n) dans Λ tendant vers λ_0 on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $P_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers un polynôme $\tilde{P}$ et que les $\varphi_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers une équivalence quasi-conforme $\tilde{\varphi}$ de f_{λ_0} avec $\tilde{P}$.*

Remarques: 1) Si $\lambda_0 \in \underline{R}$, la conclusion de la Prop. 9 est contenue dans celle de la Prop. 8 .

2) Pour $\lambda_0 \in \underline{F}$, on n'a pas nécessairement $\bar{\partial}\tilde{\varphi} = 0$ sur K_{λ_0} , et si $d \geq 3$ le polynôme $\tilde{P}$ n'est pas nécessairement hybridement équivalent à f_{λ_0} . Nous verrons des exemples.

Démonstration de la Prop. 9: Les φ_{λ_n} sont quasi-conformes, avec un rapport d'ellipticité indépendant de n . Ils forment donc une famille équicontinue. La proposition résulte alors du Théorème d'Ascoli.

4. Continuité de $\lambda \longmapsto P_\lambda$ en degré 2 .

THEOREME 2.– *Supposons $d = 2$ et mettons P_λ sous la forme* $z \longmapsto z^2 + \chi(\lambda)$.

a) *La fonction $\chi : \Lambda \to \underline{C}$ est continue.*

b) *Elle est holomorphe sur $\chi^{-1}(\mathring{M})$* .

<u>Démonstration:</u> a): La continuité sur $\underline{R}$ résulte de la Prop. 8 . Il suffit donc de montrer que, pour $\lambda_0 \in \underline{F}$, de toute suite (λ_n) de points de Λ tendant vers λ_0 on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $\chi(\lambda_{n_k})$ tendent vers $\chi(\lambda_0)$. Mettons P_{λ_0} sous la forme $z \mapsto z^2+c_0$ et montrons d'abord que $c_0 \in \partial M$. Soit (λ'_n) une suite de points de $\underline{I}$ tendant vers λ_0 . D'après la Prop. 9 on peut en extraire une suite $(\lambda'_{n'_k})$ telle que les $P_{\lambda'_{n'_k}}$ tendent vers un $\tilde{P}' = (z \mapsto z^2+\tilde{c}')$ quasi-conformément conjugué à P_{λ_0} . Pour tout n , le point $c'_n = \chi(\lambda'_n)$ appartient à ∂M car $f_{\lambda'_n}$ admet un point périodique indifférent; par suite $\tilde{c}' = \lim c'_n \in \partial M$. On a $c_0 = \tilde{c}'$ en vertu de la Prop. 4 , d'où $c_0 \in \partial M$.

Soit maintenant (λ_n) une suite quelconque de points de Λ tendant vers λ_0 . D'après la Prop. 9 on peut en extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $P_{\lambda_{n_k}}$ tendent vers un $\tilde{P}$ de la forme $z \mapsto z^2+\tilde{c}$ quasi-conformément conjugué à P_{λ_0} . On a alors $\tilde{c} = c_0$ d'après la Prop. 4 , autrement dit $\chi(\lambda_{n_k}) \longrightarrow \chi(\lambda_0)$.

b) L'ouvert $\overset{\circ}{M}$ est réunion de deux ouverts disjoints (dont l'un est vrisemblablement vide) M' et M'' :

– L'ouvert M' est l'ensemble des c tels que $z \mapsto z^2+c$ ait un cycle attractif . Ses composantes connexes sont appelées les <u>composantes hyperboliques</u> de $\overset{\circ}{M}$.

– L'ouvert M'' , vraisemblablement vide, est la réunion des composantes non hyperboliques, ou composantes farfelues, de $\overset{\circ}{M}$. On sait montrer que, pour $c \in M''$, le compact K_c est d'intérieur vide et de mesure > 0 .

Soit $\lambda_0 \in \chi^{-1}(\overset{\circ}{M})$. Nous allons montrer que χ est holomorphe au voisinage de λ_0 en donnant des démonstrations différentes suivant que $c_0 = \chi(\lambda_0)$ appartien à M' ou à M'' .

$\alpha)$ $\lambda_0 \in M'$: Soit W un voisinage connexe de c_0 dans M' et posons $W' = \chi^{-1}(W)$. Pour $c \in W$ notons $\rho(c)$ la valeur propre du cycle attractif de $z \longmapsto z^2 + c$. On définit ainsi une application holomorphe $\rho : W \longrightarrow D$. Pour $\lambda \in W'$, la valeur propre du cycle attractif de f_λ est $\rho(\chi(\lambda))$ puisque la conjugante φ_λ est holomorphe au voisinage de ce cycle. Par suite $\rho \circ \chi$ est holomorphe sur W' . Comme ρ est holomorphe non constante et que χ est continue, χ est holomorphe.

$\beta)$ $\lambda_0 \in M''$: Soit W (resp. W') un voisinage connexe de c_0 (resp. λ_0) dans M'' admettant une trivialisation de Sullivan-Sad-Mane τ (resp τ'). On suppose que $W' \subset \chi^{-1}(W)$. Pour $\lambda \in W'$, posons $c = \chi(\lambda)$ et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_0' & \xrightarrow{\tau_\lambda'} & V' \\ {\scriptstyle \varphi_{\lambda_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\lambda} \\ V_0 & \xrightarrow{\tau_c} & V \end{array}$$

où V_0 et V_0' sont des voisinages de K_{c_0} et K_{λ_0} respectivement (ici $\mathring{K}_{c_0}$ et $\mathring{K}_{\lambda_0}$ sont vides). Ce diagramme est commutatif sur les points périodiques de f_{λ_0} puisque ces points ne peuvent aller que sur des points périodiques de même période, que W' est connexe et que la commutativité a leu pour $\lambda = \lambda_0$. Par suite il est commutatif sur K_{λ_0} . Comme les applications de ce diagramme sont quasi-conformes et que $\bar\partial \varphi_\lambda = 0$ sur K_λ , la forme de Beltrami $\theta_\lambda' = \bar\partial \tau_\lambda' / \partial \tau_\lambda'$ coïncide presque partout sur K_{λ_0} avec $\varphi_{\lambda_0}^* \theta_c$ où $\theta_c = \bar\partial \tau_c / \partial \tau_c$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \lambda & & \\ {\scriptstyle \chi}\downarrow & \searrow & \\ c & \longmapsto & \varphi_{\lambda_0}^* \theta_c |_{K_0} \end{array}$$

la flèche horizontale est holomorphe non constante et la flèche oblique est holomorphe, comme χ est continue il en résulte que χ est holomorphe, cqfd.

5. Non-continuité de $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ **en degré** 2 .

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 . On suppose que Λ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et que U'_λ et U_λ sont symétriques par rapport à $\mathbb{R}$ avec $f_\lambda(\bar z) = \overline{f_\lambda(z)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On choisit pour tout λ une équivalence hybride $\varphi_\lambda : V_\lambda \to \mathbb{C}$, de f_λ avec un polynôme $P_\lambda : z \mapsto z^2 + \chi(\lambda)$, de façon que les φ_λ soient quasi-conformes avec un rapport borné au voisinage de 0 , que V_λ contienne un voisinage fixe de K_0 pour λ voisin de 0 , avec V_λ symétrique par rapport à $\mathbb{R}$ et $\varphi_\lambda(\bar z) = \overline{\varphi_\lambda(z)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ici on ne suppose pas nécessairement les φ_λ obtenus par applications de la Proposition 6). De toute suite (λ_n) tendant vers 0 , on peut extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $\varphi_{\lambda_{n_k}}$ aient une limite $\tilde\varphi$,équivalence quasi-conforme de f_0 avec un polynôme $\tilde P : z \mapsto z^2 + \tilde c$.

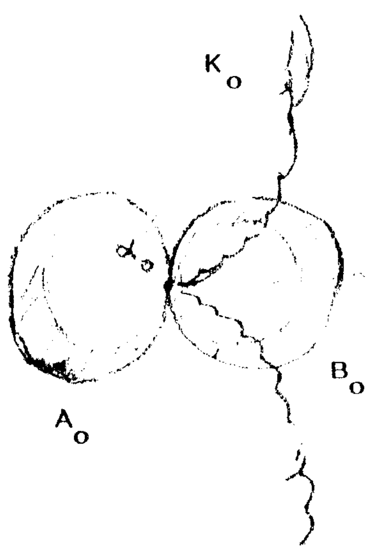
On suppose que f_0 a un point fixe α_0 avec $f'_0(\alpha_0) = 1$, et que pour $\lambda > 0$ l'application f admet 2 points fixes conjugués α_λ et $\bar\alpha_\lambda$, nécessairement répulsifs. Alors $\chi(0) = 1/4$, $\chi(\lambda) > 1/4$ pour $\lambda > 0$, et $\tilde c = 1/4$ d'après la Prop. 4 .

PROPOSITION 10.- <u>Dans les conditions ci-dessus, on a $\tilde\varphi \neq \varphi_0$ si $\lambda_n > 0$ pour tout n , à moins que f_0 ne soit holomorphiquement équivalente à $z \mapsto z^2 + 1/4$.</u>

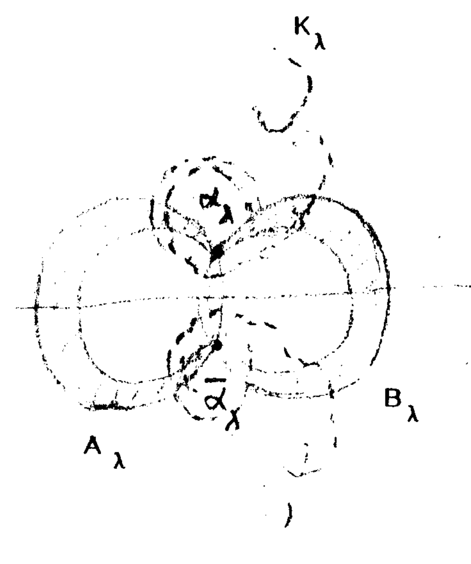
<u>Démonstration</u>: Si $A \subset U_\lambda$ est un ouvert, on notera A/f_λ le quotient de A par la relation d'équivalence identifiant x à $f_\lambda(x)$ si x et $f_\lambda(x)$ appartiennent à A . Soit $u > 0$. Pour $\lambda \geq 0$, notons A_λ (resp. B_λ) le disque ouvert centré en $\mathrm{Ré}(\alpha_\lambda) - u$ (resp. $\mathrm{Ré}(\alpha_\lambda) + u$) dont le bord passe par α_λ et $\bar\alpha_\lambda$, posons $X_\lambda = A_\lambda/f_\lambda$ et $Y_\lambda = B_\lambda/f_\lambda$. Si u et λ sont assez petits, X_λ et Y_λ sont isomorphes au cylindre $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Pour $\lambda > 0$, on peut identifier X_λ et Y_λ à $(A_\lambda \cup B_\lambda)/f_\lambda$, d'où un isomorphisme $E_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ commutant avec la conjugaison. Il n'y a pas de E_0 , mais si (λ_n) est une suite de nombres > 0 tendant vers 0 , on peut en extraire une suite (λ_{n_k}) telle que les $E_{\lambda_{n_k}}$ donnent par passage à la

limite un isomorphisme $\tilde{E} : X_o \longrightarrow Y_o$.

Pour tout λ , la forme de Beltrami $\mu_\lambda = \bar{\partial}\varphi_\lambda/\partial\varphi_\lambda$ est invariante par f_λ , d'où pour $\lambda \geq 0$ des formes de Beltrami μ^X_λ et μ^Y_λ sur X_λ et Y_λ respectivement. Pour $\lambda > 0$, on a $\mu^X_\lambda = E^*_\lambda \mu^Y_\lambda$. Il en résulte que, si (λ_n) est une suite telle que (φ_{λ_n}) et (E_{λ_n}) aient des limites $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{E}$, en posant $\tilde{\mu} = \bar{\partial}\tilde{\varphi}/\partial\tilde{\varphi}$, on a $\tilde{\mu}^X = \tilde{E}^*\tilde{\mu}^Y$. Si $\tilde{\varphi} = \varphi_o$, on a donc $\mu^X_o = \tilde{E}^*\mu^Y_o$. Mais $\mu^X_o = 0$, du moins si $\omega_o < \alpha_o$ (en notant ω_o le point critique de f_o) et u assez petit , ce qu'on peut supposer, car alors $A_o \subset \mathring{K}_o$. On a alors aussi $\mu^Y_o = 0$, d'où $\mu_o = 0$ sur B_o . Or l'ensemble $K_o \cup B_o$ est un voisinage de α_o . On a donc $\mu_o = 0$ au voisinage de α_o , et comme μ_o est invariante par f_o on en déduit que $\mu_o = 0$ sur un voisinage de K_o . Autrement dit φ_o est une équivalence holomorphe de f_o avec P_o , cqfd .



$\lambda = 0$



$\lambda > 0$

6. <u>Non-continuité de</u> $\lambda \longmapsto P_\lambda$ <u>en degré</u> 3 .

Nous indiquons comment construire un exemple comportant une famille analytique $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications à allure polynomiale de degré 3 , une suite (λ_n) de points de $M_{\underline{f}}$ tendant vers un point λ_0 , avec $f_{\lambda_n} \sim_{hb} P_n$, $f_{\lambda_0} \sim_{hb} P_0$, la suite (P_n) ayant pour limite un polynome $\widetilde{P}$ non affinement conjugué à P_0 .

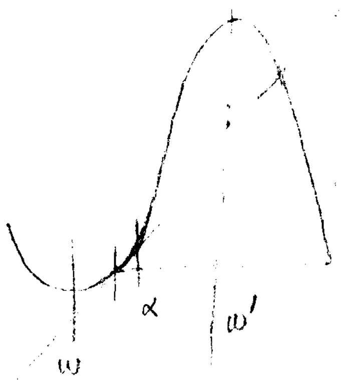
Soit $f: U' \longrightarrow U$ une application à allure polynomiale satisfaisant aux propriétés suivantes:

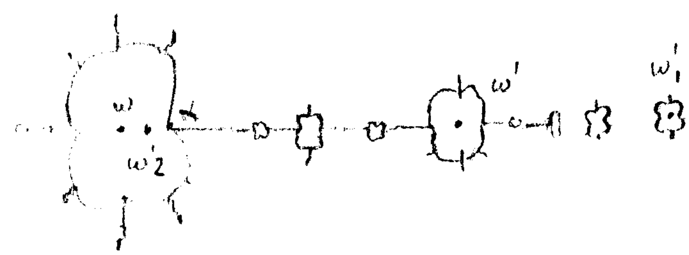
(i) U et U' sont symétriques par rapport à $\mathbb{R}$ et $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$;

(ii) f admet un point fixe $\alpha \in U' \cap \mathbb{R}$ avec $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) > 0$;

(iii) f admet deux points critiques ω et ω' dans $U' \cap \mathbb{R}$, avec $\omega < f^2(\omega') < \alpha < \omega'$.

Le graphe de $f|_{\mathbb{R}}$ et K_f ont alors l'allure suivante:





(exemple: $z \longmapsto z + z^2 - 0.29\, z^3$)

Soient A et B deux disques ouverts de rayon u petit, centrés en $\alpha - u$ et $\alpha + u$ respectivement. Alors A est contenu dans la composante connexe V de $\overset{\circ}{K}$ contenant ω , et les quotients $X = A/f$ et $Y = B/f$ sont isomorphes au cylindre $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Les orbites directes de ω et ω' définissent des points $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ de X . Soit ψ un isomorphisme $\mathbb{C}$-analytique de X sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, commutant avec la conjugaison et à dérivée > 0 . On note $\theta(f)$ l'élément $\psi(\hat{\omega}') - \psi(\hat{\omega})$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; cet élément ne dépend pas du choix de ψ .

Si $f \underset{hb}{\sim} P$, on a $\theta(P) = \theta(f)$ puisque la conjugante est holomorphe sur $\mathring{K}$ et $A \subset \mathring{K}$. Si μ est une forme de Beltrami sur V invariante par f , on définit à partir de μ une forme μ^X sur X , et on pose $\theta_\mu(f) = \Psi_\mu(\hat{\omega})$ où $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ est un difféomorphisme tel que $\bar{\partial}\Psi_\mu/\partial\Psi_\mu = \mu^X$.

Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 3 . On suppose que Λ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que f_0 vérifie (i) , (ii) et (iii) , que f_λ vérifie (i) pour λ réel, et que pour $\lambda > 0$ l'application f_λ a deux points fixes conjugués α_λ et $\bar{\alpha}_\lambda$ voisins de α_0 . Pour λ réel voisin de 0 , on a $\lambda \in M_{\underline{f}}$. En effet, pour $\lambda = 0$, en posant $I = [\omega', f(\omega')]$, on a $\omega' \in \mathring{I}$ et $f(I) \subset \mathring{I}$; ces propriétés subsistent pour λ voisin de 0 et elles entrainent que $\lambda \in M_{\underline{f}}$.

Pour $\lambda > 0$, on peut définir X_λ , Y_λ et $E_\lambda : X_\lambda \xrightarrow{\approx} Y_\lambda$ comme au n° précédent. A l'aide de la Prop. 6 , construisons pour chaque λ une équivalence hybride φ_λ de f_λ sur un polynôme P_λ . Soit (λ_n) une suite de réels 0 tendant vers 0 telle que les suites (φ_{λ_n}) et (E_{λ_n}) aient des limites $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{E}$. L'application $\tilde{\varphi}$ est une équivalence quasi-conforme de f_0 sur $\tilde{P} = \lim P_{\lambda_n}$, et $\tilde{\mu} = \bar{\partial}\tilde{\varphi}/\partial\tilde{\varphi}$ vérifie $\tilde{\mu}^X = \tilde{E}^*\tilde{\mu}^Y$. On a $\theta(P_0) = \theta(f_0)$ et $\theta(\tilde{P}) = \theta_{\tilde{\mu}}(f_0)$. On a $\tilde{\mu}^Y = \mu_0^Y$ sur l'image dans Y de $B \cap (\mathbb{C} - K_{f_0})$, et on peut montrer – c'est assez délicat – que l'on peut choisir f_0 de façon que cela assure que $\theta(f_0) \neq \theta_{\tilde{\mu}}(f_0)$. On a alors $\tilde{P} \neq P_0$, cqfd.

7. Non-holomorphie de $\lambda \longmapsto P_\lambda$ en degré 2 .

Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 . On note ω_λ le point critique de f_λ , on suppose que Λ est un voisinage de 0 dans $\underline{\underline{C}}$, qu'on a une fonction analytique $\lambda \longmapsto \alpha_\lambda$ telle que α_λ soit point fixe répulsif de f_λ pour tout λ , et que $f_0^k(\omega_0) = \alpha_0$. Posons $\rho(\lambda) = f'_\lambda(\alpha_\lambda)$, et soit g_λ un inverse de f_λ au voisinage de α_λ avec $g_\lambda(\alpha_\lambda) = \alpha_\lambda$. Choisissons des $\alpha_{0,n}$ tels que $\alpha_{0,0} = \alpha_0$, $\alpha_{0,n+1} \in f_0^{-1}(\alpha_{0,n})$, $\alpha_{0,n} \neq \omega_0$ pour tout n et $\alpha_{0,n+1} = g_0(\alpha_{0,n})$ pour n assez grand. Pour λ voisin de 0 , on peut définir des $\alpha_{\lambda,n}$ avec $\alpha_{\lambda,0} = \alpha_\lambda$, $\alpha_{\lambda,n+1} \in f_\lambda^{-1}(\alpha_{\lambda,n})$, dépendant continûment – donc analytiquement – de λ . On a encore $\alpha_{\lambda,n+1} = g_\lambda(\alpha_{\lambda,n})$ pour n grand. Si le zéro de $\lambda \longmapsto f_\lambda^k(\omega_\lambda) - \alpha_\lambda$ en 0 est simple, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq n_0}$ tendant vers 0 , telle que $f_{\lambda_n}^k(\omega_{\lambda_n}) = \alpha_{\lambda_n,n}$; le rapport λ_{n+1}/λ_n tend vers $1/\rho(0)$.

Avec les notations du n° 4 , posons $c_0 = \chi(0)$, $a_{c_0} = \varphi_0(\alpha_0)$ et $a_{c_0,n} = \varphi_0(\alpha_{0,n})$. Pour c voisin de c_0 , le polynôme $P_c : z \longmapsto z^2 + c$ a un point fixe répulsif a_c voisin de a_{c_0} et on peut définir des $a_{c,n}$ tels que $a_{c,0} = a_c$, $a_{c,n+1} \in P_c^{-1}(a_{c,n})$, dépendant analytiquement de c . Si le zéro de $c \longmapsto P_c^k(0) - a_c$ en c_0 est simple (en fait, on peut montrer que c'est toujours le cas), il existe une suite $(c_n)_{n\geq n_1}$ tendant vers c_0 telle que $P_{c_n}^k(0) = a_{c_n,n}$; le rapport $(c_{n+1} - c_0)/(c_n - c_0)$ a pour limite $1/P'_{c_0}(a_{c_0})$. Il existe un voisinage V de c_0 tel que c_n soit pour $n \geq n_1$ le seul point de V vérifiant $P_{c_n}^k(0) = a_{c_n,n}$, par suite $\chi(\lambda_n) = c_n$ pour n assez grand. Si $\rho(0) = f'_0(\alpha_0) \neq P'_{c_0}(a_{c_0})$, les rapports λ_{n+1}/λ_n et $(c_{n+1} - c_0)/(c_n - c_0)$ ont des limites différentes, il en résulte que χ n'est pas holomorphe au voisinage de 0 .

8. Analyticité de $\chi^{-1}(c)$ pour $c \in M$.

PROPOSITION 11.– Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 . Pour tout $c \in M$, l'ensemble $\chi^{-1}(c)$ est un sous-ensemble $\underline{\underline{C}}$-analytique de Λ .

En vertu du Th. 2 , (a) , l'ensemble $\chi^{-1}(c)$ est fermé. Si $c \in \mathring{M}$, le résultat découle du Th. 2 , (b) . Le résultat dans le cas général, (donc essentiellement quand $c \in \partial M$), est une conséquence immédiate des 3 lemmes ci-dessous.

Notons P_c le polynôme $z \mapsto z^2 + c$, soit A_c un disque fermé de rayon R grand, posons $A'_c = P_c^{-1}(A_c)$ et $Q_c = A_c - \mathring{A}'_c$ (on suppose R assez grand pour que Q_c soit homéomorphe à une couronne fermée).

LEMME 1.– Pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$, il existe un voisinage Λ' de λ_0 dans Λ, un voisinage V de Q_c dans c et un plongement $\Psi : \Lambda \times V \to \underline{U}$ de classe C^∞, au dessus de Λ , vérifiant:

(i) $\Psi_\lambda(P_c(w)) = f_\lambda(\Psi_\lambda(w))$ pour w voisin de $\partial A'_c$;

(ii) pour tout $w \in V$, l'application partielle $\lambda \mapsto \Psi(\lambda, w)$ est analytique.

Posons alors $\mu^0_\lambda = \bar\partial \psi_\lambda / \partial \psi_\lambda$ sur Q_c , $\mu^k_\lambda = (P^k_c)^* \mu^0_\lambda$ sur $P_c^{-k}(Q_c)$, et définissons μ_λ sur A en recollant les μ^k_λ et en prolongeant par 0 sur K_c .

LEMME 2.– Pour $\lambda \in \Lambda'$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\chi(\lambda) = c$;

(ii) il existe un plongement $\Psi' : A_c \to U_\lambda$ prolongeant Ψ_λ , vérifiant $\bar\partial\Psi'/\partial\Psi' = \mu_\lambda$ et $\Psi' \circ f_\lambda = P_c \circ \Psi'$ sur A'_c ;

(iii) il existe une fonction $\Psi' : A_c \to \underline{\underline{C}}$ prolongeant Ψ_λ et vérifiant $\bar\partial\Psi'/\partial\Psi' = \mu_\lambda$.

LEMME 3.- *Dans* $\mathbb{C}$, *soit* $Q = A - \overset{\circ}{A'}$, *où* A *et* A' *sont homéomorphes à* $\bar{D}$ *et* $A' \subset \overset{\circ}{A}$. *Soient* Λ *une variété* $\mathbb{C}$ *-analytique,* $\lambda \longmapsto \mu_\lambda$ *une application analytique de* Λ *dans une boule de* $L^\infty(A)$ *de rayon* $k<1$ *et* $\lambda \longmapsto \Psi_\lambda$ *une application analytique de* Λ *dans* $H^1(Q)$ *vérifiant* $\partial\Psi_\lambda/\partial\bar{z} = \mu_\lambda \partial\Psi_\lambda/\partial z$ *sur* Q . *Notons* X *l'ensemble des* λ *pour lesquels* Ψ_λ *admet un prolongement* Ψ *vérifiant* $\partial\Psi/\partial\bar{z} = \mu_\lambda \partial\Psi/\partial z$ *sur* A . *Alors* X *est un sous-ensemble analytique de* Λ .

III. DESCRIPTION DE M_f EN DEGRE 2 AVEC $\Lambda \approx D$.

1. Applications topologiquement holomorphes.

Soient X et Y des surfaces topologiques orientée et $\varphi : Y \to X$ une application continue. Si y est un point de Y qui soit isolé dans sa fibre $\varphi^{-1}(\varphi(y))$, on définit le degré local $i_y(\varphi)$ de φ en y de la façon suivante : posons $x = \varphi(y)$, soient U et V des voisinages de x et y dans X et Y respectivement homéomorphes à D et tels que $\varphi^{-1}(x)=\{y\}$ et $\varphi(V) \subset U$, et γ un lacet dans $V - \{y\}$ d'indice 1 par rapport à y . Le degré local $i_y(\varphi)$ est alors l'indice par rapport à x du lacet $\varphi(\gamma)$.

Soit M un fermé de X et posons $P = \varphi^{-1}(M)$. Nous dirons que φ est topologiquement holomorphe sur P si, pour tout $y \in P$, le point y est isolé dans sa fibre et $i_y(\varphi) > 0$. Les points de P où le degré local de φ est >1 forment alors un fermé discret ; ils sont appelés points de ramification de φ dans P .

La proposition qui suit peut être considérée comme une variante du principe du maximum :

Proposition 12.- Avec les notations ci-dessus, supposons Y connexe, P non vide et φ topologiquement holomorphe sur P . Si X - M n'a pas de composante connexe relativement compacte, il en est de même de Y - P .

Nous ne donnons pas la démonstration ici .

Nous dirons que P , muni de φ , est un revêtement ramifié fini de M si φ est topologiquement holomorphe sur P et induit une application propre de P dans M . dans ce cas, les images dans M des points de ramification de φ dans P forment un fermé discret T , et $P - \varphi^{-1}(T)$ est un revêtement fini de M - T . Si M est connexe, ce revêtement a un degré δ . Si M est connexe, compact, et si sa caractéristique d'Euler-Poincaré EP(M) est définie, celle de P l'est aussi et elle est donnée par la formule de Riemann-Hurwicz :

$$EP(P) = \delta . EP(M) - \Sigma (i_y(\varphi) - 1) ,$$

la somme étant prise sur les points de ramification de φ dans P .

2 . Caractère topologiquement holomorphe de χ .

THEOREME 3 .- Soit $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille $\underline{\mathbb{C}}$-analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 , avec $\Lambda \approx D$. L'application $\chi : \Lambda \to \underline{\mathbb{C}}$ est topologiquement holomorphe sur $M_f = \chi^{-1}(M)$ si elle n'est pas constante.

D'après la Prop. 11 , si χ n'est pas constante, $\chi^{-1}(c)$ est discret pour tout $c \in M$. Reste à montrer qu'alors $i_\lambda(\chi) > 0$ pour tout $\lambda \in M_{\underline{f}}$. Soient $\lambda \in M_{\underline{f}}$ et $c = \chi(\lambda)$; Notons $\underline{R}$ et $\underline{F}$ l'ouvert et le fermé complémentaire de la décomposition de Sullivan-Sad-Mane de Λ , et ditinguons suivant que $\lambda \in \underline{R}$ ou $\lambda \in \underline{F}$, et que $c \in \overset{\circ}{M}$ ou $c \in \partial M$. Mais $c \in \overset{\circ}{M} \Longrightarrow \lambda \in \underline{R}$; il reste donc 3 cas à considérer:

- $\lambda \in \underline{R}$, $c \in \overset{\circ}{M}$: alors χ est holomorphe au voisinage de λ d'après le Th. 2 , (b) .
- $\lambda \in \underline{R}$, $c \in \partial M$: pour λ' voisin de λ , l'application $f_{\lambda'}$ est quasi-conformément équivalente à f_λ d'après la Prop. 7 , donc hybridement d'après la Prop. 4 , et χ est constante au voisinage de λ . Ceci n'est possible que si χ est constante.
- $\lambda \in \underline{F}$, $c \in \partial M$: soit Δ un disque dans Λ contenant λ et ne contenant aucun autre point de $\chi^{-1}(c)$; posons $\gamma = \partial\Delta$ et $i = i_\lambda(\chi)$. Par définition de $\underline{F}$, on peut trouver dans $\overset{\circ}{\Delta}$ un point λ' , suffisamment voisin de λ pour que $\chi(\gamma)$ soit d'indice i par rapport à $c' = \chi(\lambda')$, et tel que $f_{\lambda'}$ ait un point périodique indifférent non persistant. On peut alors trouver un point $\lambda'' \in \overset{\circ}{\Delta}$, suffisamment voisin de λ' pour que $\chi(\gamma)$ soit d'indice i par rapport à $c'' = \chi(\lambda'')$, et tel que $f_{\lambda''}$ ait un point périodique attractif, d'où $c'' \in \overset{\circ}{M}$. Alors i est la somme des $i_\mu(\chi)$ pour $\mu \in \Delta \cap \chi^{-1}(c'')$; on a $i_\mu(\chi) > 0$ pour un tel μ puisque χ est holomorphe en μ (Th. 2, (b)) et il y a au moins un terme dans la somme, pour $\mu = \lambda''$. Par suite $i > 0$,

cqfd.

3. <u>Cas où</u> $M_{\underline{f}}$ <u>est compact</u>.

Avec les hypothèses du Théorème 3 , supposons $M_{\underline{f}}$ compact. Alors $M_{\underline{f}}$ muni de χ est un revêtement ramifié de M , et comme M est connexe ([1]). on peut définir le degré δ de ce revêtement, que nous appellerons <u>degré paramétrique</u> de la famille (f_λ) , par opposition au degré en variable qui est ici 2 . En notant ω_λ le point critique de f_λ pour $\lambda \in \Lambda$, le degré paramétrique δ est le nombre de valeurs de λ pour lesquelles $f_\lambda(\omega_\lambda) = \omega_\lambda$, comptées avec leur multiplicité comme zéro de $\lambda \longmapsto f_\lambda(\omega_\lambda) - \omega_\lambda$. En effet, ces valeurs sont les points de $\chi^{-1}(0)$, et on peut vérifier que les multiplicités sont les mêmes. Le degré paramétrique δ est également le nombre de tours que $f_\lambda(\omega_\lambda) - \omega_\lambda$ fait autour de 0 quand λ parcourt le bord d'une pièce $A \subset \Lambda$, homéomorphe à $\overline{D}$ et contenant $M_{\underline{f}}$ dans son intérieur.

Le nombre $b_0(M_{\underline{f}})$ des composantes connexes de $M_{\underline{f}}$ est donné par

$$b_0(M_{\underline{f}}) = \delta - \sum (i_{\lambda_j}(\chi) - 1)$$

où les λ_j sont les points de ramification de χ dans $M_{\underline{f}}$. C'est la formule de Riemann-Hurwicz, compte tenu du fait que, en vertu de la Prop. 12 , on a $H^1(M_{\underline{f}}) = 0$ en cohomologie de Čech .

Si $\delta = 1$, l'application χ induit un homéomorphisme de $M_{\underline{f}}$ sur M .

Si $\delta = 0$, l'ensemble $M_{\underline{f}}$ est vide .

<u>Remarque</u>: L'hypothèse que $M_{\underline{f}}$ est compact est satisfaite notamment s'il existe un compact $A \subset \Lambda$ tel que $f_\lambda(\omega_\lambda) \notin U_\lambda - U'_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda - A$.

4. Propriétés de quasi-conformité de χ .

Soit $\underline{f} = (f_\lambda : U'_\lambda \longrightarrow U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille $\underline{\underline{C}}$-analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 , et pour tout λ notons ω_λ le point critique de f_λ . On suppose que U est un ouvert convexe de $\underline{\underline{C}}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, que Λ est isomorphe à D et qu'il existe un compact A dans Λ tel que $f_\lambda(\omega_\lambda)$ n'appartienne pas à l'enveloppe convexe de U'_λ pour $\lambda \in \Lambda - A$. Ceci assure que $M_{\underline{f}}$ est compact, donc permet de définir le degré paramétrique δ de $\underline{f}$. On suppose que ce degré est 1 . L'application χ induit alors un homéomorphisme de $M_{\underline{f}}$ sur M .

PROPOSITION 13.- Dans les conditions ci-dessus, l'homéomorphisme $\chi: M_{\underline{f}} \longrightarrow M$ est quasi-conforme au sens de Mane-~~Sad~~-Sullivan.

Démonstration: Par un changement de variable affine pour chaque λ , on se ramène au cas où où pour tout λ on a $\omega_\lambda = 0$ et $f''(\omega_\lambda) = 2$, autrement dit $f_\lambda(z) = z^2 + c(\lambda) + O(z^3)$. La fonction $c: \Lambda \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ a un zéro simple en un point λ_0 . On peut identifier Λ à un ouvert de $\underline{\underline{C}}$ de façon que $\lambda_0 = 0$ et $c'(0) = 1$. On a alors $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda + O(|z|^3 + |\lambda|^2)$. Quitte à rétrécir légèrement Λ, on peut enfin supposer que la distance de U' au complémentaire de U est minorée par un nombre $m > 0$ indépendant de λ .

Pour $s \in \underline{\underline{C}}^*$, posons $\Lambda_s = \frac{1}{s^2} \Lambda$, et pour $\lambda \in \Lambda_s$ posons $U'_{s,\lambda} = \frac{1}{s} U'_{s^2\lambda}$ et $U_{s,\lambda} = \frac{1}{s^2} U_{s^2\lambda}$. Définissons $f_{s,\lambda}: U'_{s,\lambda} \longrightarrow U_{s,\lambda}$ par

$$f_{s,\lambda}(z) = \frac{1}{s^2} f_{s^2\lambda}(sz) \quad .$$

On pose $f_{0,\lambda}(z) = z^2 + \lambda$. L'application $(s,\lambda,z) \longmapsto f_{s,\lambda}(z)$ ainsi prolongée est définie et analytique sur un ouvert de $\underline{\underline{C}}^3$ contenant $\{0\} \times \underline{\underline{C}}^2$.

On vérifie alors qu'il existe un voisinage/ouvert connexe W de $[0,1]$ dans $\underline{\underline{C}}$ tel que, pour $\lambda \in W - \{0\}$ la famille $\underline{f}_s = (f_{s,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_s}$ soit une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 avec $M_s = M_{\underline{f}_s}$ compact, de degré paramétrique 1 , d'où un homéomorphisme $\chi_s : M_s \longrightarrow M$. Pour $s = 0$, posons $M_0 = M$ et $\chi_0 = \mathrm{id}$. Il résulte du Th. 2 (b) et du Théorème des fonctions implicites que, pour tout $x \in \overset{\circ}{M}$, là fonction $s \longmapsto \chi_s^{-1}(x)$ est holomorphe sur W . (c'est d'ailleurs le cas pour tout $x \in M$ en vertu de la Prop. 11). Ces fonctions sont évidemment à graphes disjoints. On peut donc appliquer le lemme qui figure dans l'article de Sullivan-Sad-Mane sous le nom de "λ- lemma" (bien qu'ici le paramètre soit s et λ la variable): pour tout s l'application $\chi_s^{-1} : M_0 \longrightarrow M_s$ est quasi-conforme au sens donné dans cet article. Comme $M_1 = M_{\underline{f}}$, la Proposition en résulte, cqfd.

CONJECTURE: <u>Pour toute famille $\underline{\underline{C}}$-analytique $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications à allure polynomiale de degré 2 , avec $\Lambda \simeq D$, on peut trouver un homéomorphisme quasi-conforme ρ de Λ sur D et une application analytique $\pi : D \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ tels que χ coïncide avec $\pi \circ \rho$ sur $M_{\underline{f}}$.</u>

Dans cette direction, signalons le résultat suivant: si $\underline{f} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille analytique d'applications à allure polynomiale de degré 2 avec $\Lambda \simeq D$, pour tout $\lambda_0 \in M_{\underline{f}}$ on peut trouver un voisinage Λ' de λ_0 dans Λ et choisir ψ au dessus de Λ' dans la Prop. 6 de façon que l'application $\chi : \Lambda' \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ construite à partir de ψ soit quasi-conforme sur $\Lambda' - M_{\underline{f}}$. Il suffit pour cela de choisir ψ telle que $\lambda \longmapsto \psi^{-1}(\lambda, x)$ soit analytique sur Λ' pour tout $x \in Q_r$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY, J.H. HUBBARD.- Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.A.S., t. 294 (18 janvier 1982).

[2] A. DOUADY.- Systèmes dynamiques holomorphes. Séminaire Bourbaki n° 599 (novembre 1982).

[3] R. MANE, P. SAD et D. SULLIVAN.- On the dynamics of rational maps. A paraître aux Annales de l'E.N.S.

Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05