Recherche Coopérative sur Programme n° 25

B. Malgrange

Déformations isomonodromiques des singularités régulières

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 31
« Conférences de : B. Malgrange, B. Souillard, M. Duneau, C.-E. Pfister », , exp. n° 1, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__31__1_0>

DEFORMATIONS ISOMONODROMIQUES DES SINGULARITES REGULIERES

*par B. MALGRANGE**

1. CONNEXIONS A POLES LOGARITHMIQUES.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, Y une hypersurface lisse de X, et E un fibré vectoriel de rang p sur X ; on notera $\underline{E}$ le faisceau des sections de E.

Soit ∇ une connexion intégrable sur $E|X-Y$, et soit $\Omega \in \Gamma\left(X-Y, \underline{\mathrm{End}}(E)\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ la forme de connexion correspondante *dans une base locale de E*.

DEFINITION 1.1. -

i) <u>On dit que</u> ∇ <u>est méromorphe sur</u> Y <u>si</u> Ω <u>est méromorphe sur</u> Y.

ii) <u>On dit que</u> ∇ <u>est "à pôle logarithmique sur</u> Y " <u>si, dans un système de coordonnées locales</u> $(x_1, \ldots, x_n)$, <u>avec</u> Y <u>défini par</u> $\{x_1 = 0\}$, <u>on a</u> $\Omega = M_1 \frac{dx_1}{x_1} + M_2 dx_2 + \ldots + M_n dx_n$, <u>les</u> M_i <u>étant holomorphes sur</u> Y.

Il est immédiat de vérifier que cette définition est indépendante du choix des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$; d'autre part, on prendra garde au fait qu'elle est plus précise que la définition habituelle (Deligne [D]), des "connexions sur $E|X-Y$, à singularités régulières sur Y", dans laquelle on travaille à équivalence près de prolongements méromorphes de $E|X-Y$; c'est en fait, avec une terminologie différente, la vieille distinction entre "singularités de 1ère espèce" et "singularités régulières" (voir par exemple [I]), qu'on reprend ici.

Institut Fourier B P 116 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS - Tél. (76) 54 81 45

point base $z^o = (a_1^o, \ldots, a_m^o)$. L'espace $\mathbb{P} \times \tilde{Z}$ est muni de $m+1$ hypersurfaces lisses $Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty$ définies ainsi : si p_μ est la projection $\tilde{Z} \to \mathbb{C}$ provenant de la projection $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto a_\mu$ de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{C}$, Y_μ est l'ensemble des $(x,z) \in \mathbb{C} \times \tilde{Z}$ qui vérifient $x = p_\mu(z)$, et Y_∞ est l'ensemble $\{(\infty, z) | z \in \tilde{Z}\}$.

Notons i l'injection $\mathbb{P} \to \mathbb{P} \times \tilde{Z}$ définie par $i(x) = (x, z_o)$. Le résultat est alors le suivant :

THEOREME 2.1. - Il existe un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P} \times \tilde{Z}$, muni d'une connexion ∇ à pôles logarithmiques sur $Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty$ et d'un isomorphisme $i^*(E, \nabla) \xrightarrow{j} (E^o, \nabla^o)$. De plus, l'ensemble des données (E, ∇, j) est unique, à isomorphisme unique près.

On a affaire ici à une variante du théorème d'existence pour le problème de Riemann, tel qu'il est démontré dans [G] et [D] ; toutefois, le fait que l'on se soit déjà donné la restriction de (E, ∇) à $\mathbb{P} \times \{z^o\}$ va permettre d'éliminer les restrictions habituelles sur les différences des valeurs propres des résidus de la connexion aux pôles.

a) Déterminons d'abord (E, ∇) en dehors des hypersurfaces $Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty$. Comme la donnée d'un vectoriel muni d'une connexion intégrable sur $P \times \tilde{Z} - (Y_1 \cup \ldots \cup Y_\infty)$ est équivalente à la donnée du système local de ses sections horizontales, et que cette dernière donnée équivaut à la donnée d'une représentation du groupe fondamental de $\mathbb{P} \times \tilde{Z} - (Y_1 \cup \ldots \cup Y_\infty)$, il suffit d'établir le lemme suivant :

LEMME 2.2. - Soit $b \in \mathbb{C}$, $b \neq a_1, \ldots, a_m$; alors l'application $\pi_1(\mathbb{P} - \{a_1^o, \ldots, a_m^o, \infty\}, b) \xrightarrow{i} \pi_1(\mathbb{P} \times \tilde{Z} - \{Y_1, \ldots, Y_\infty\}, (b, z^o))$ est bijective.

Ceci résulte immédiatement de la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés et du fait que $\pi_1(\tilde{Z}, z^o)$ et $\pi_2(\tilde{Z}, z_o)$ sont nuls (ce dernier point résulte a fortiori du fait que $\tilde{Z}$ est contractile ; voir [F-M1]).

b) Reste à prolonger (E,∇) à $Y_1,\dots,Y_m$ et Y_∞ , et à démontrer l'unicité des prolongements obtenus. Traitons par exemple le cas de Y_1 (pour $Y_2,\dots,Y_m$, c'est pareil ; pour Y_∞ , on s'y ramène par le changement de variable $x \mapsto 1/x$). Le changement de variable $x' = x - p_1(z)$ nous ramène au cas où $Y_1 = \{0\} \times \tilde{Z}$.

Soit alors f la projection $\mathbb{P} \times \tilde{Z} \to \mathbb{P}$ définie par $f(x',z) = x'$; soit D un disque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}$ ne contenant aucun des point $a^o_\mu - a^o_1$ $(\mu = 2,\dots,m)$, et soit U un voisinage tubulaire de $\{0\} \times \tilde{Z}$ dans $\mathbb{P} \times \tilde{Z}$ contenu dans $f^{-1}(D)$, vérifiant $i^{-1}(U) = D$, et ne rencontrant pas $Y_2,\dots,Y_m$; par exemple, on peut prendre pour U l'ouvert $\{(x',z) \mid x' \in D \text{ et } |x'| < \inf_\mu(|p_\mu(z) - p_1(z)|)\}$. Il est clair que $(f^* E^o, f^* \nabla^o) \underset{\text{déf}}{=} (E',\nabla')$ est un fibré vectoriel trivial sur U , muni d'une connexion à pôle logarithmique sur Y_1 , et que son image réciproque par i est égale à $(E^o,\nabla^o) \mid D$. Pour terminer la démonstration, il suffit donc de voir les deux résultats suivants :

i) L'application identique $(E^o,\nabla^o) \mid D - \{0\}$ s'étend d'une manière unique en un isomorphisme $(E',\nabla') \mid U - Y_1 \xrightarrow{\sim} (E,\nabla) \mid U - Y_1$; pour voir ce point, il suffit de trouver cet isomorphisme au niveau de système local des sections horizontales de nos deux connexions, ce qui est immédiat.

ii) (E',∇') est l'unique extension de $(E^o,\nabla^o) \mid D$ en un fibré vectoriel sur U muni d'une connexion à pôle logarithmique sur Y_1 (i.e. l'unique, à isomorphisme unique près).

Soit (E'',∇'') une autre extension possédant ces propriétés ; en raisonnant comme en i), on a un isomorphisme $(E',\nabla') \simeq (E'',\nabla'')$ en-dehors de Y_1 , d'où une section horizontale v de $\underline{\mathrm{Hom}}(E',E'')$ sur $U - Y_1$; il suffit de voir que v et v^{-1} se prolongent en des sections de $\underline{\mathrm{Hom}}(E',E'')$ sur U .

Comme Y_1 est connexe, il suffit, par un argument de type Hartogs, de voir que v et v^{-1} sont holomorphes au voisinage de $(0, z_o)$; pour cela, on peut remplacer Z par un polydisque Q de centre z^o : $|a_\mu - a_\mu^o| < \rho$; on peut supposer que E^o (resp. E'') est le fibré trivial $\mathbb{C}^p$ sur D (resp. $D \times Q$). Alors, si $\Omega^o = M(x')\frac{dx'}{x'}$ est la forme de la connexion ∇^o , avec M holomorphe sur D à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p)$, la forme de ∇' sera $\Omega' = M(x')\frac{dx'}{x'}$ et celle de ∇'' sera $\Omega'' = N(x', a_1, \ldots, a_m)\frac{dx'}{x'} + \Sigma R_\mu(x', a_1, \ldots, a_\mu) da_\mu$, avec $N(x', a_1^o, \ldots, a_m^o) = M(x')$; ici, N et les R_μ sont holomorphes sur $D \times Q$, à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p)$; la matrice V correspondant à v sera donc holomorphe sur $(D - \{0\}) \times Q$, à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p)$, et elle vérifiera $V(x', a_1^o, \ldots, a_m^o) = \mathrm{id}$, $\frac{\partial V}{\partial a_\mu} + R_\mu V = 0$; les conditions d'intégrabilité de Ω'' , jointes au théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles montrent que V se prolonge holomorphiquement à $D \times Q$. On opère de même avec v^{-1} , ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 2.3.</u> - Le prolongement de ∇^o qui vient d'être construit est universel au sens suivant : soit T une variété analytique complexe 1-connexe, et soit $t^o \in T$; supposons données m applications holomorphes $a_1, \ldots, a_m$: $T \to \mathbb{C}$, avec $a_\mu(t) \neq a_\nu(t)$ pour tout $t \in T$ et $\mu \neq \nu$, et $a_\mu(t^o) = a_\mu^o$; appelons S_μ l'hypersurface de $\mathbb{P} \times T$ définie par $x = a_\mu(t)$, et posons $S_\infty = \{\infty\} \times T$. Alors, il existe un fibré vectoriel E_T sur $\mathbb{P} \times T$ muni d'une connexion ∇_T à pôles logarithmiques sur $S_1, \ldots, S_m, S_\infty$, et d'un isomorphisme $(E_T, \nabla_T)|_{\mathbb{P} \times \{t_o\}} \simeq (E^o, \nabla^o)$; de plus l'ensemble de ces données est unique.

En effet, l'application $T \to Z$ définie par $(a_1, \ldots, a_m)$ se relève de manière unique en une application $\tilde{a} : T \to \tilde{Z}$, avec $\tilde{a}(t^o) = z^o$. Soit A l'application $(\mathrm{id}, \tilde{a}) : \mathbb{P} \times T \to \mathbb{P} \times \tilde{Z}$; on aura une solution du problème en prenant $(E_T, \nabla_T) = A^*(E, \nabla)$.

Pour voir l'unicité de (E_T, ∇_T) sur $\mathbb{P} \times T - S_\mu$, on considère le diagramme commutatif de suites exactes d'homotopie (notations de 2.2)

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_2(T,t^o) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}-\cup\{a^o_\mu\},b) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}\times T-\cup S_\mu,(b,t^o)) & \longrightarrow & \pi_1(T,t_o)=\{e\} \\
\downarrow \tilde{a} & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow A & & \downarrow \tilde{a} \\
0=\pi_2(\tilde{Z},z^o) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}-\cup\{a^o_\mu\},b) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{P}\times\tilde{Z}-\cup Y_\mu,(b,z^o)) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{Z},z^o)=\{e\}
\end{array}$$

(on a posé ici $a^o_{m+1}=\infty$) ; ce diagramme montre que l'application

$$\pi_1(\mathbb{P}-\cup\{a^o_\mu\},b) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}\times T-\cup S_\mu,(b,t^o))$$

est bijective, ce qui entraîne le résultat cherché.

On montre alors l'unicité de (E_T,∇_T) au voisinage des S_μ en raisonnant comme en (2.2.b).

Remarque 2.4. - On aurait un résultat analogue au précédent en se donnant $m+1$ applications holomorphes $a_1,\dots,a_{m+1} : T \to \mathbb{P}$, avec $a_\mu(t) \neq a_\nu(t)$, $t\in T$, $\mu\neq\nu$, et $a_\mu(t^o) = a^o_\mu$, $\mu=1,\dots,m$, $a_{m+1}(t^o)=\infty$, pourvu qu'on ait $m\geq 2$ (on se ramène au cas précédent par la transformation conforme qui envoie a_1 en 0 , a_2 en 1 , et a_{m+1} à l'infini).

3. L'EQUATION DE SCHLESINGER, ET LA PROPRIETE DE PAINLEVE.

Le théorème 2.1 est particulièrement intéressant dans le cas où l'on suppose que E^o est trivial ; dans toute la suite, on fera cette hypothèse, et on fixera une fois pour toutes une base $(e^o_1,\dots,e^o_p)$ de E^o , i.e. un isomorphisme $\mathbb{C}^p \simeq E^o$.

Soit U une petite boule de $\tilde{Z}$ (ou Z) de centre z^o ; on sait qu'alors $E|U$ est trivial, E étant le fibré fabriqué en (2.1) ; voir les rappels du § 4. Relevons $(e^o_1,\dots,e^o_p)$ en une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E ; dans cette base, la forme Ω de ∇ s'écrira $\Omega = Mdx + \Sigma N_\mu da_\mu$ (les notations sont différentes ici de celles du § 1).

Au voisinage de $x = a_\mu$, on doit avoir $\Omega = A_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$ + holomorphe ; au voisinage de $x = \infty$, on doit avoir $\Omega = C\frac{dx}{x} + \Sigma B_\mu da_\mu$, C et B_μ étant holomorphes. Il résulte aussitôt de là que l'on a $\Omega = \Sigma A_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu} + \Sigma B_\mu da_\mu$, les A_μ et les B_μ étant des fonctions holomorphes des seules variables $(a_1,\dots,a_m)$.

La forme précédent dépend du choix de la base $(e_1,\dots,e_p)$; un choix canonique, une fois $(e_1^o,\dots,e_p^o)$ choisi, consiste à choisir les e_i de manière à ce que $e_i|_{\{\infty\}\times U}$ soit une section horizontale de la connexion induite par ∇ sur $E|\{\infty\}\times U$ (voir fin du § 1 ; on prend ici $f = 1/x$) ; on vérifie facilement que ceci a lieu si et seulement si, dans l'expression de Ω , on a $B_1 = \dots = B_m = 0$. Une manière plus élémentaire de dire la même chose consiste à faire un changement de base $(e_1,\dots,e_m) = (f_1,\dots,f_m)S$, avec $S(a_1^o,\dots,a_m^o) = id$; ce changement de base transforme Ω en $\Omega' = \Sigma A'_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu} + \Sigma B'_\mu da_\mu$, avec $\Omega' = S\Omega S^{-1} - dS.S^{-1}$; pour avoir $B'_1 = \dots = B'_m = 0$, il faut et il suffit donc de résoudre le système différentiel $S^{-1}dS = \Sigma B_\mu da_\mu$, avec la condition initiale $S(a_\mu^o) = id$, ce qui est possible à cause de l'intégrabilité de Ω .

La construction précédente donne donc une forme bien déterminée $\Omega = \Sigma A_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$; sa restriction à $a_\mu = a_\mu^o$ est la forme $\Omega^o = \Sigma A_\mu^o \frac{dx}{x-a_\mu^o}$ de ∇^o . D'autre part, on vérifie facilement que la condition d'intégrabilité $d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega,\Omega] = 0$ s'écrit explicitement ainsi

$$\text{(S)} \qquad dA_\mu = - \sum_{\nu\neq\mu} [A_\mu , A_\nu] \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu} \qquad \text{("Equation de Schlesinger").}$$

Les résultats du § 2 disent donc, entre autres, que l'équation (S), avec les conditions initiales $A_\mu(a_1^o,\dots,a_m^o) = A_\mu^o$, admet une et une seule solution holomorphe au voisinage de $(a_\mu) = (a_\mu^o)$. Ce résultat s'obtient aussi classiquement de la manière suivante.

THEOREME 3.1. (Schlesinger) - L'équation (S) est complétement intégrable.

Soit $\mathcal{J}$ l'idéal différentiel engendré (dans l'espace des variables (a_μ, A_μ)) par les formes $\omega_\mu = dA_\mu + \sum_{\nu\neq\mu} [A_\mu, A_\nu] \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}$; il suffit de vérifier qu'on a $d\omega_\mu \equiv 0(\mathcal{J})$, ou plus explicitement

$$\sum_{\nu,\nu\neq\mu} d[A_\mu, A_\nu] \wedge \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu} \equiv 0(\mathcal{J}) .$$

Modulo $\mathcal{J}$, le premier membre de cette formule vaut :

$$- \sum_{\nu,\sigma} [[A_\mu, A_\sigma], A_\nu] \frac{d(a_\mu - a_\sigma)}{a_\mu - a_\sigma} \wedge \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}$$

$$- \sum_{\nu,\sigma} [A_\mu, [A_\nu, A_\sigma]] \frac{d(a_\nu - a_\sigma)}{a_\nu - a_\sigma} \wedge \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}$$

(la première somme, resp. la seconde, étant étendue aux $\nu \neq \mu$ et $\sigma \neq \mu$, resp. $\nu \neq \mu$ et $\sigma \neq \nu$) ; on vérifie alors facilement, à l'aide de l'identité de Jacobi, que la somme précédente est nulle ; je laisse les détails du calcul au lecteur.

Le résultat essentiel de cet article est alors le suivant :

THEOREME 3.2. - La solution locale de (S) , avec les conditions initiales $A_\mu(a_1^o, \dots, a_m^o) = A_\mu^o$ $(\mu = 1, \dots, m)$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\tilde{Z}$.

Ce théorème exprime la "propriété de Painlevé" ou "absence de points critiques mobiles" pour les solutions de l'équation de Schlesinger. Il a été démontré indépendamment par Miwa [M], avec quelques restrictions sur les valeurs propres des A_μ^o , par une méthode assez différente de celle qui est employée ici, au moins en apparence : la méthode de Miwa repose sur la résolution du problème de Riemann à l'aide de champs de fermions développée par Sato-Jimbo-Miwa ; voir un exposé d'ensemble de leurs travaux dans [S-J-M] (1).

(1) Une opinion répandue chez certains spécialistes donne ce théorème comme essentiellement bien connu, voire démontré par Schlesinger. J'avoue n'avoir pas réussi à me convaincre de l'exactitude de cette opinion.

Il est bien connu d'autre part que l'équation (S) contient comme cas particulier la 6e équation de Painlevé, les autres équations de Painlevé étant des cas particuliers d'une extension de (S) à des équations à singularités irrégulières. Voir à ce sujet [J-M] et les références qui s'y trouvent aux travaux antérieurs de Schlesinger et Garnier.

Démonstration. - Considérons le fibré (E, ∇) construit en (2.1) à partir des conditions initiales (E^o, ∇^o), avec ici E^o muni d'une trivialisation $(e_1^o, \ldots, e_p^o)$. Soit $\Theta \subset \tilde{Z}$ l'ensemble des points z tels que $E | \mathbb{P} \times \{z\}$ ne soit pas trivial ; alors Θ est une hypersurface de $\tilde{Z}$, éventuellement vide (cf. § 4).

On voit que la trivialisation canonique de $E | \mathbb{P} \times U$ considérée au début de ce paragraphe s'étend d'une manière unique en une trivialisation de $E | \mathbb{P} \times (\tilde{Z} - \Theta)$; pour cela, remarquons d'abord que $E | \{\infty\} \times \tilde{Z}$ est trivial, et même trivialisé canoniquement par la base $(e_1, \ldots, e_m)$ constitué des sections horizontales de $\nabla | \{\infty\} \times \tilde{Z}$ qui coïncident avec $(e_1^o, \ldots, e_m^o)$ au point (∞, z^o). D'autre part, pour tout point $z \notin \Theta$, $E | \mathbb{P} \times \{z\}$ est trivial, donc il existe un voisinage ouvert V_z de z tel que $E | \mathbb{P} \times V_z$ soit trivial ; la base $(e_1, \ldots, e_p) | \{\infty\} \times V_z$ s'étend donc d'une manière unique en une base de $E | \mathbb{P} \times V_z$, et ces bases se recollent lorsqu'on change z ; cela prouve l'assertion annoncée.

En écrivant la forme de la connexion ∇ dans cette base, on trouve que les A_μ se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\tilde{Z} - \Theta$. Reste à montrer qu'elles sont méromorphes le long de Θ. Pour établir ce point, prenons un $z \in \Theta$; soient V une petite boule de centre z, ρ_1 et ρ_2 deux nombres > 0, avec $\rho_1 < \rho_2$, et posons $D' = \{x \in \mathbb{C}, |x| < \rho_2\}$, D'' le complémentaire dans $\mathbb{P}$ de l'ensemble $|x| \leq \rho_1$; alors E se trivialise sur $D' \times V$ et sur $D'' \times V$; prenons une base quelconque $(e'_1, \ldots, e'_p)$ de $E | D' \times V$, et une base $(e''_1, \ldots, e''_p)$ de $E | D'' \times V$ qui coïncide à l'infini avec la base $(e_1, \ldots, e_p)$; soit S la matrice de passage $(D' \cap D'') \times V \to G\ell(p, \mathbb{C})$ définie par

$(e'_1,\dots,e'_p) = (e''_1,\dots,e''_p)S$; sur $(D'\cap D'')\times(V-\Theta)$ on peut écrire d'une manière et d'une seule $S = \Sigma''\Sigma'^{-1}$, avec Σ'' holomorphe inversible sur $D''\times(V-\Theta)$, Σ' holomorphe inversible sur $D'\times(V-\Theta)$, et $\Sigma''(\infty,z) = \mathrm{id}$; de plus, (cf. §4) Σ' et Σ'' ainsi que leurs inverses sont méromorphes le long de Θ , respectivement dans $D'\times V$ et $D''\times V$; alors, sur $D'\times(V-\Theta)$ (resp. $D''\times(V-\Theta)$) , la base $(e_1,\dots,e_p)$ est égale à $(e'_1,\dots,e'_p)\Sigma'$ (resp. $(e''_1,\dots,e''_p)\Sigma''$) ; soient Ω' et Ω'' les formes de ∇ dans les bases (e') et (e'') respectivement ; Ω' et Ω'' sont respectivement méromorphes dans $D'\times V$ et $D''\times V$, avec pôles dans $Y_1,\dots,Y_m,Y_\infty$, et l'on a

$$\begin{aligned}\Omega &= \Sigma'^{-1}\Omega'\Sigma' + \Sigma'^{-1}d\Sigma' \quad \text{dans } D'\times(V-\Theta)\\ &= \Sigma''^{-1}\Omega''\Sigma'' + \Sigma''^{-1}d\Sigma'' \quad \text{dans } D''\times(V-\Theta)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que Ω est méromorphe sur $\mathbb{P}\times V$, avec pôles sur $Y_1,\dots,Y_m,Y_\infty$ et $\mathbb{P}\times\Theta$; comme, en dehors de $\mathbb{P}\times\Theta$, on a $\Omega = \Sigma A_\mu \dfrac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$, l'assertion relative à la méromorphie des A_μ le long de Θ s'ensuit.

4. RAPPELS SUR LES FAMILLES DE FIBRES SUR $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soient, comme au paragraphe précédent, $\rho_1 < \rho_2$ deux nombres >0 ; on pose $D' = \{x\in\mathbb{C} ; |x|<\rho_2\}$ et D'' = le complémentaire dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de l'ensemble $|x| \le \rho_1$; on pose encore $\Delta = D'\cap D''$.

Soient encore T une variété analytique complexe connexe et S une application holomorphe $\Delta\times T \to G\ell(p,\mathbb{C})$. Le résultat qui a été utilisé dans la démonstration du théorème 3.2 est le suivant.

PROPOSITION 4.1. - *Supposons qu'il existe* $t^o\in T$ *tel qu'on ait* $S(x,t^o) = \Sigma''_o(x)\Sigma'_o(x)^{-1}$, *avec* Σ'' (resp. Σ'') *holomorphe inversible sur* D' (resp. D'') , *et* $\Sigma''_o(\infty) = \mathrm{id}$. *Alors, il existe* Θ ,

hypersurface de T , *et des applications holomorphes uniques*
$\Sigma' : D' \times (T-\Theta) \to G\ell(p,\mathbb{C})$ *et* $\Sigma'' : D'' \times (T-\Theta) \to G\ell(p,\mathbb{C})$
vérifiant les propriétés suivantes :

i) Σ' *et* Σ'^{-1} (resp. Σ'' et Σ''^{-1}) *sont méromorphes le long de* $D' \times \Theta$ (resp. $D'' \times \Theta$) ;

ii) $S = \Sigma''\Sigma'^{-1}$;

iii) $\Sigma''(\infty,t) = \mathrm{id}$.

Pour redémontrer ce résultat bien connu, on va utiliser la méthode des "projecteurs de Toeplitz", comme Boutet de Monvel [B] . Soit $r > 0$ vérifiant $\rho_1 < r < \rho_2$. Soit Γ le cercle $|x| = r$, orienté comme le bord de $|x| < r$; dans la suite, pour simplifier les notations, on suppose $r = 1$; pour $x \in \Gamma$, on pose $x = e^{i\theta}$.

Posons $H = L^2(\Gamma; d\theta)$; on a une décomposition en somme directe orthogonale $H = H' \oplus H''$, H' (resp. H'') étant le sous-espace des $f \in H$ qui se prolongent en des fonctions holomorphes dans $|x| < 1$ (resp. en des fonctions holomorphes dans $|x| > 1$, nulles à l'infini). Notons Q' et Q'' les projecteurs orthogonaux $H \to H'$ et $H \to H''$; si $f = \Sigma a_n e^{in\theta} \in H$, on a $Q'f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $Q''f = \sum_{n<0} a_n x^n$. On a aussi

$$Q'f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(y)dy}{y-x} \qquad (|x|<1)$$

$$Q''f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(y)dy}{y-x} \qquad (|x|>1) .$$

Soit A une fonction holomorphe dans Δ ; on pose A'(resp. A'') $= Q'A$ (resp. $Q''A$) et $T_A f = Q'(Af)$, $f \in H'$. L'égalité $A = A' + A''$ montre que A' (resp. A'') est holomorphe dans D' (resp. D'') .

LEMME 4.2. - *Soit* B *une autre fonction holomorphe dans* Δ ; *pour* $f \in H'$, *on a* :

$$(T_{AB} - T_A T_B) f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{A'(z)-A'(x)}{z-x} B(z)f(z)dz \qquad (|x|<1) .$$

En effet, la formule est immédiate si $A = A' \in H'$; d'autre part, si $A \in H''$, la définition des opérateurs "T" montre qu'on a $T_{AB} = T_A T_B$. D'où le lemme.

Il résulte aussitôt de ce lemme que $T_{AB} - T_A T_B$ est régularisant sur H' , en ce sens qu'il envoie continuement H' dans l'espace des fonctions holomorphes sur D' . En particulier, c'est un opérateur à trace, dont la trace est donnée par la formule

$$(4.3) \quad \mathrm{Tr}(T_{AB} - T_A T_B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dA'}{dx} B\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dA}{dx} B''dx \ .$$

Si maintenant A et B sont des fonctions holomorphes sur Δ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^p)$, on définit de la même manière T_A et $T_B \in \mathrm{End}(H'^p)$; la formule (4.2) est encore vraie ; la formule (4.3) est remplacée par :

$$(4.4) \quad \mathrm{Tr}(T_{AB} - T_A T_B) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\frac{dA'}{dx} B)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\frac{dA}{dx} B'')dx \ .$$

Reprenons maintenant la fonction S de la proposition 4.1 ; pour $t \in T$, notons $S(t)$ la fonction sur $\Delta : x \to S(x,t)$; la proposition va résulter du lemme suivant, recopié dans [B].

LEMME 4.5. -

i) <u>Pour tout</u> $t \in T$, $T_{S(t)}$ <u>est à indice, et son indice est nul.</u>

ii) <u>Pour qu'on ait</u> $S(t) = \Sigma'' \Sigma'^{-1}$, Σ' (resp. Σ'') <u>holomorphe inversible sur</u> D' (resp. D'', et $\Sigma''(\infty) = \mathrm{id}$) , <u>il faut et il suffit que</u> $T_{S(t)}$ <u>soit inversible. On a alors</u> :
$\Sigma' = T^{-1}_{S(t)}(\mathrm{id})$.

<u>Démonstration.</u> -

i) Tout d'abord, le lemme précédent montre que $T_{S(t)^{-1}} T_{S(t)} - \mathrm{id}$ et $T_{S(t)} T_{S(t)^{-1}} - \mathrm{id}$ sont régularisants et a fortiori compacts, d'où immédiatement le fait que $T_{S(t)}$ est à indice ; son indice est alors indépendant de t , puisque T est connexe ; l'assertion ii), supposée démontrée, nous montre alors que son indice est nul en t_o , donc partout.

ii) Si $S(t) = \Sigma''\Sigma'^{-1}$, l'équation $T_{S(t)}f = g$, $f,g \in H'$ s'écrit $\Sigma''\Sigma'^{-1}f = g + h$, $h \in H''$, ou encore $\Sigma'^{-1}f = Q'(\Sigma''^{-1}g)$; donc $T_{S(t)}$ est inversible, d'inverse $\Sigma' T_{\Sigma''^{-1}}$.

Réciproquement, supposons $T_{S(t)}$ inversible ; posons $\Sigma' = T^{-1}_{S(t)}(\mathrm{id})$ (i.e. la ième colonne de Σ' est $T^{-1}_{S(t)}$ appliquée au vecteur $(\delta_{ij})_{1\leq j\leq p}$; on aura $T_{S(t)}\Sigma' = \mathrm{id}$, ou $S(t)\Sigma' = \Sigma''$, avec $\Sigma'' - \mathrm{id} \in H''$. Cette identité montre qu'en fait Σ' (resp. Σ'') est holomorphe sur D' (resp. D'') . Reste à voir que ces matrices sont inversibles. Pour établir ce point, on remarque que la forme bilinéaire $\langle f,g\rangle = \int_\Gamma fg\,dx$ met H' et H'' en dualité ; le transposé de $T_{S(t)}$ est alors l'application $g \to Q''({}^tS(t)g)$ qui sera donc inversible sur H'' . Soit alors A'' la matrice à coefficients dans H'' solution de $Q''({}^tS(t)A'') = -Q''({}^tS(t))$; on aura ${}^tS(t)[\mathrm{id} + A''] = A'$, A' à coefficients dans H' ; donc A' (resp. A'') est holomorphe dans D' (resp. D'') , et l'on a $(\mathrm{id} + {}^tA'')S(t) = {}^tA'$; en comparant avec $S(t)\Sigma' = \Sigma''$, ceci donne $(\mathrm{id} + {}^tA'')\Sigma'' = {}^tA'.\Sigma'$; les deux membres sont définis sur $\mathbb{P}$, donc constants, et le premier vaut id à l'infini ; ceci montre que ${}^tA'$ (resp. $\mathrm{id} + {}^tA''$) est l'inverse de Σ' (resp. Σ'') , d'où a fortiori le résultat cherché.

La proposition résulte du lemme précédent et du résultat classique suivant : si $u(t)_{t\in T}$ est une famille holomorphe d'opérateurs à indice $H' \to H'$, et si $u(t_o)$ est inversible, alors :

i) il existe une hypersurface $\Theta \subset T$ telle que $u(t)$ est inversible si et seulement si $t \notin \Theta$;

ii) $u(t)^{-1}$ est méromorphe le long de Θ .

5. LE DIVISEUR D'UNE FAMILLE DE FIBRES SUR $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

N. B. Les résultats de ce paragraphe et du suivant ne figuraient pas dans l'exposé oral, et ont été obtenus ultérieurement. Leur but est de redémontrer, en le précisant un peu un résultat de Miwa [M] relatif à la "fonction τ ".

On garde les notations du § 4, et les hypothèses de la proposition 4.1. Soit E le fibré sur $\mathbb{P} \times T$ défini par S ; on va lui associer un diviseur de T de support Θ, qu'on notera $[\Theta]$, et cela de la manière suivante :

soit $t_1 \in T$; on peut trouver un voisinage U de t_1 , deux espaces vectoriels de (même) dimension finie E et E_1 et des applications linéaires dépendant holomorphiquement de $t \in U$:

$$u : E \to E_1 \quad ; \quad \alpha : E \to H' \quad ; \quad \alpha_1 : E_1 \to H'$$

telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E_1 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} \\ H' & \xrightarrow{T_S} & H' \end{array}$$

soit commutatif, et induise pour tout t un isomorphisme :
$\ker u(t) \simeq \ker T_{S(t)}$, $\operatorname{coker} u(t) \simeq \operatorname{coker} T_{S(t)}$. [Prendre par exemple pour E_1 un supplémentaire de $\operatorname{coker} T_{S(t_1)}$, et pour α_1 l'injection $E_1 \to H'$; alors l'application $T_S \oplus \alpha_1 : H' \oplus E_1 \to H'$ sera surjective pour tout t voisin de t_1 , donc son noyau sera isomorphe à un espace vectoriel fixe E]. Prenons alors des bases dans E et E_1 , et soit $\theta(t)$ le déterminant de $u(t)$ dans ces bases ; un changement de base modifie θ par un facteur inversible, donc ne change pas $\operatorname{div}(\theta)$, le diviseur de ses zéros. On pose par définition $[\Theta] = \operatorname{div}(\theta)$.

On laisse au lecteur, à titre d'exercice, le soin de vérifier que cette définition ne dépend pas de (E, E_1, u) . [Utiliser le fait élémentaire suivant : si on a un autre triplet (E', E'_1, u') possédant les mêmes propriétés, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E_1 \\ \beta\downarrow & & \downarrow\beta_1 \\ E' & \xrightarrow{u'} & E'_1 \end{array}$$

qui induise les isomorphismes donnés sur les noyaux et les conoyaux].

On va chercher des conditions pour que $[\Theta]$ soit principal, c'est-à-dire pour qu'il existe une fonction holomorphe τ sur T, avec $\mathrm{div}(\tau) = [\Theta]$. Pour cela, on va reprendre une idée de Sato-Jimbo-Miwa (voir par exemple [S-J-M]) : on aimerait prendre pour τ le déterminant de Fredholm de T_S ; malheureusement, ce déterminant n'existe pas car T n'est pas de la forme "id + opérateur à trace". Aussi va-t-on essayer de <u>renormaliser</u> ce déterminant, ou, plus exactement, sa dérivée logarithmique.

Sur $\Delta \times T$ la différentielle dS se décompose en $d_x S + d_t S$; pour simplifier les notations, on posera $d_t S = \partial S$. Pour tout $t \in T$, l'opérateur $T_{\partial S} - T_S T_{S^{-1}\partial S}$ pris au point t est à trace, d'après 4.2, (i.e. ses différentes composantes par rapport à une base dt_i du cotantent de T sont à trace) ; posons alors, pour $t \in T - \Theta$

(5.1) $\quad \omega = \mathrm{Tr}(T_S^{-1} T_{\partial S} - T_{S^{-1}\partial S})$.

D'après 4.4 et 4.5, ω sera une forme holomorphe sur $T - \Theta$.

PROPOSITION 5.2. - <u>Soit</u> $t^1 \in \Theta$, <u>et soit</u> θ <u>holomorphe au voisinage de</u> t^1 <u>avec</u> $\mathrm{div}(\theta) = [\Theta]$. <u>Alors</u> $\omega - \frac{d\theta}{\theta}$ <u>est holomorphe au voisinage de</u> t^1 ; <u>en particulier</u>, ω <u>est méromorphe le long de</u> Θ <u>et</u> $d\omega$ <u>est holomorphe sur</u> T.

Tout d'abord, il existe $K : H'^p \to H'^p$ de rang fini, tel que $T_{S(t^1)} + K$ soit inversible : il suffit en effet de prendre $K|\ker T^{\perp}_{S(t^1)} = 0$, et $K|\ker T_{S(t^1)}$ = un isomorphisme de $\ker T_{S(t^1)}$ sur un supplémentaire de $\mathrm{im}\, T_{S(t^1)}$.

Posons alors $L = T_S + K$; pour t voisin de t^1, L est inversible et L^{-1} est une fonction holomorphe de t à valeurs dans $\mathcal{L}(H'^p)$, l'espace des endomorphismes continus de H'^p ; on a $T_S L^{-1} = \mathrm{id} - KL^{-1}$, donc on peut définir le déterminant $\theta = \mathrm{d\acute{e}t}(T_S L^{-1})$, et on vérifie qu'on a $\mathrm{div}(\theta) = [\Theta]$ (exercice). D'autre part, hors de Θ, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{\theta} &= \mathrm{Tr}\left[\left(T_S L^{-1}\right)^{-1} d\left(T_S L^{-1}\right)\right] = \mathrm{Tr}\left[L\left(T_S^{-1} dT_S - L^{-1} dL\right) L^{-1}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[T_S^{-1} dT_S - L^{-1} dL\right] . \end{aligned}$$

Comme $dT_S = T_{\partial S}$, ceci donne finalement

$$\frac{d\theta}{\theta} = \omega - \mathrm{Tr}\left(L^{-1} dL - T_{S^{-1}\partial S}\right) .$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc de voir que $\mathrm{Tr}\left(L^{-1} dL - T_{S^{-1}\partial S}\right)$ est holomorphe au voisinage de t^1 ; comme on a $dL = T_{\partial S}$, en utilisant 4.2, il revient au même de démontrer que $\mathrm{Tr}\left[\left(L^{-1} - T_{S^{-1}}\right) T_{\partial S}\right]$ est holomorphe au voisinage de t^1 ; or, on a $\left(L^{-1} - T_{S^{-1}}\right) T_{\partial S} = L^{-1}\left(\mathrm{id} - T_S T_{S^{-1}} - K T_{S^{-1}}\right) T_{\partial S}$; le premier facteur, et les composantes du troisième sont holomorphes à valeurs dans $\mathcal{L}(H'^p)$; quand au second, on voit par 4.2, qu'il est holomorphe à valeurs dans l'espace des opérateurs à trace de H'^p ; le résultat s'en déduit par les propriétés connues des opérateurs à trace. D'où la proposition.

PROPOSITION 5.3. - On a :

$$d\omega = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left\{ T_{[S^{-1}\partial S, S^{-1}\partial S]} - \left[T_{S^{-1}\partial S}, T_{S^{-1}\partial S}\right]\right\} .$$

Posons pour un instant $\alpha = T_{S^{-1}\partial S}$, $M = T_S$, $\beta = M\alpha M^{-1} - dM.M^{-1}$, et considérons α et β comme des formes de connexion sur le fibré trivial sur T de fibre H'^p ; remarquons que β est à trace, mais non α en général. La courbure R_α de α est par définition la forme $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$, et il est classique qu'on a

$R_\beta = MR_\alpha M^{-1}$; comme R_β est à trace, cela montre que R_α est à trace. D'autre part, on a $\omega = -\mathrm{Tr}(\alpha - M^{-1}dM) = -\mathrm{Tr}(\beta)$, d'où

$$d\omega = -\mathrm{Tr}(d\beta) = -\mathrm{Tr}(R_\beta - \frac{1}{2}[\beta,\beta]) \quad ;$$

comme β est à trace, on a $\mathrm{Tr}([\beta,\beta]) = 0$; d'autre part, $\mathrm{Tr}(R_\beta) = \mathrm{Tr}(R_\alpha)$, et finalement :

(5.4) $\quad d\omega = -\mathrm{Tr}(R_\alpha)$.

D'autre part, comme $\partial(S^{-1}\partial S) = -\frac{1}{2}[S^{-1}\partial S, S^{-1}\partial S]$, on a

$$\begin{aligned} R_\alpha &= dT_{S^{-1}\partial S} + \frac{1}{2}\left[T_{S^{-1}\partial S}, T_{S^{-1}\partial S}\right] \\ &= -\frac{1}{2}T_{[S^{-1}\partial S, S^{-1}\partial S]} + \frac{1}{2}\left[T_{S^{-1}\partial S}, T_{S^{-1}\partial S}\right] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Quoique ce ne soit pas utile pour la suite, nous allons expliciter $d\omega$ en utilisant la formule (4.4). Pour cela, on prendra les notations suivantes : on pose $S^{-1}dS = \gamma = \gamma_x + \gamma_t$, avec $\gamma_x = S^{-1}d_x S$, $\gamma_t = S^{-1}\partial S$; dans des coordonnées locales (t_i) , on pose $\gamma_t = \Sigma B_i dt_i$.

Explicitons d'abord $d\omega$ en coordonnées locales ; on a, d'après (5.3) :

$$d\omega = \sum_{j,k} dt_j \wedge dt_k \,\mathrm{Tr}\left(T_{B_j B_k} - T_{B_j} T_{B_k}\right) .$$

Par (4.4), on a donc :

$$d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} dt_j \wedge dt_k \int_\Gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial B_j'}{\partial x} B_k\right) dx$$

ce qui s'écrit encore, en utilisant la dernière égalité de (4.4)

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j<k} dt_j \wedge dt_k \int_\Gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial B_j'}{\partial x} B_k - \frac{\partial B_k}{\partial x} B_j''\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j<k} dt_j \wedge dt_k \int_\Gamma \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial B_j}{\partial x} B_k\right) dx \end{aligned}$$

en intégrant par parties.

Cette formule s'écrit encore :

$$d\omega = -\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma\wedge d_x\gamma_t)$$

(en convenant de prendre, pour l'intégration dans la fibre, la convention $\int_\Gamma f dt^\alpha \wedge dx = dt^\alpha \int_\Gamma f dx$, ou encore $d\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma d\omega$).

Posons maintenant $\varpi = \int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma\wedge\gamma_x)$; on a

$$d\varpi = \int_\Gamma \mathrm{Tr}(d\gamma\wedge\gamma_x) - \mathrm{Tr}(\gamma\wedge d\gamma_x) .$$

La condition d'intégrabilité $d\gamma = -\frac{1}{2}[\gamma,\gamma]$ s'écrit aussi $d\gamma = -\gamma\wedge\gamma$; en prenant dans cette formule les termes de type "$dx\wedge dt$" , on trouve $d_t\gamma_x + d_x\gamma_t + \gamma_x\wedge\gamma_t + \gamma_t\wedge\gamma_x = 0$; on tire de là

$$\begin{aligned} d\varpi &= \int_\Gamma - \mathrm{Tr}(\gamma\wedge\gamma\wedge\gamma_x) + \mathrm{Tr}(\gamma\wedge d_x\gamma_t) + \mathrm{Tr}(\gamma\wedge\gamma_x\wedge\gamma_t) + \mathrm{Tr}(\gamma\wedge\gamma_t\wedge\gamma_x) \\ &= \int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma\wedge d_x\gamma_t) + \frac{1}{3}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma^3) . \end{aligned}$$

Finalement, on trouve le :

THEOREME 5.5. - $-\frac{1}{2\pi i}d\omega = -\frac{1}{8\pi^2}d\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma\wedge\gamma_x) + \frac{1}{24\pi^2}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma^3)$.

Cette formule appelle les remarques suivantes :

(5.6) Si $[\Theta]$ est principal, i.e. s'il existe τ holomorphe avec $\mathrm{div}(\tau) = [\Theta]$, alors $\omega - \frac{d\tau}{\tau} = \omega'$ est holomorphe par (5.2), donc $d\omega = d\omega'$; par suite, il existe ω'' holomorphe tel qu'on ait $d\omega'' = \int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma^3)$.
Réciproquement, si T est simplement connexe, et si la condition précédente est vérifiée, il existera ω' holomorphe tel que $d\omega = d\omega'$; d'après (5.2), on pourra alors résoudre $\frac{d\tau}{\tau} = \omega - \omega'$ et l'on aura $\mathrm{div}(\tau) = [\Theta]$.

(5.7) Dans le cas général, la classe de cohomologie $c[\Theta] \in H^2(T,\mathbb{C})$ associée à $[\Theta]$ est représentée par $-\frac{1}{2\pi i}d\omega$, donc aussi par $\frac{1}{24\pi^2}\int_\Gamma \mathrm{Tr}(\gamma^3)$.

Ceci signifie que $c[\Theta]$ est obtenu en rappelant dans $\Gamma \times T$ par S le générateur de $H^3(G\ell(\infty, \mathbb{C}), \mathbb{Z})$ et en intégrant la classe obtenue dans la fibre pour la projection $\Gamma \times T \to T$; ou encore en rappelant dans T le générateur de $H^2(\Omega G\ell(\infty, \mathbb{C}), \mathbb{Z})$, $\Omega G\ell(\infty, \mathbb{C})$ désignant l'espace des lacets de $G\ell(\infty, \mathbb{C})$. Il revient encore au même de prendre la classe $c_2(E)$, E le fibré sur $\mathbb{P} \times T$ défini par S , et d'intégrer cette classe dans la fibre pour la projection $\mathbb{P} \times T \to T$.

J'ignore si ce résultat figure explicitement dans la littérature ; une manière plus rapide de l'obtenir consisterait à appliquer le théorème de l'indice relatif d'Atiyah-Singer [A-S] au calcul des classes caractéristiques de $R\pi_* E[-1]$ (π la projection $\mathbb{P} \times T \to T$), ou, ce qui revient au même, au complexe $0 \to H'^p \xrightarrow{T_S} H'^p \to 0$.

Il serait peut-être intéressant de voir si les classes de cohomologie de degré supérieur de $\Omega G\ell(\infty, \mathbb{C})$ s'interprètent aussi en termes de classification de fibrés holomorphes sur $\mathbb{P}$, et aussi de voir s'il existe des formules à la Chern-Weil généralisant (5.4) en degré supérieur.

Pour terminer ce paragraphe, on va donner une expression plus explicite de ω , qui servira au paragraphe suivant ; les notations sont toujours celles de la proposition 4.1.

PROPOSITION 5.8. - <u>On a</u> $\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{Tr}(\Sigma'^{-1} d_x \Sigma' \wedge \Sigma''^{-1} d_t \Sigma'')$.

En effet, on a $T_S^{-1} = T_{\Sigma'} T_{\Sigma''^{-1}}$ (cf. démonstration de 4.5) et $T_{\Sigma''^{-1}} T_{\partial S} = T_{\Sigma''^{-1}\partial S}$ (cf. démonstration de 4.2) ; d'où $\omega = \mathrm{Tr}(T_{\Sigma'} T_{\Sigma''^{-1}\partial S} - T_{\Sigma'\Sigma''^{-1}\partial S})$; par (4.4), on a alors

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mathrm{Tr}\, d_x \Sigma' \wedge \Sigma''^{-1} \partial S .$$

On a d'autre part $\partial S = \partial \Sigma'' . \Sigma'^{-1} - \Sigma'' \Sigma'^{-1} \partial \Sigma' \Sigma'^{-1}$; en reportant cette expression dans l'expression précédente de ω , on trouve le résultat cherché (le second terme est holomorphe dans D' , donc son intégrale sur Γ est nulle).

6. LA FONCTION τ , ET LE THEOREME DE MIWA.

On reprend ici la situation et les notations du théorème 3.2. Soit E le fibré qui intervient dans ce théorème, et $\Theta \subset \tilde{Z}$ l'hypersurface des points $z \in \tilde{Z}$ tels que $E|\mathbb{P}\times\{z\}$ ne soit pas trivial ; soit $z \in \Theta$, et V un petit voisinage de z ; en prenant des trivialisations de $E|\mathbb{P}\times V$ sur des cartes comme aux § 4 et 5, on définit localement le diviseur $[\Theta]$; et on vérifie que ceci ne dépend pas des trivialisations choisies, d'où un diviseur $[\Theta]$ globalement bien défini. La proposition 5.2 amène à poser la définition suivante.

DEFINITION 6.1. - Soit ω une 1-forme méromorphe sur $\tilde{Z}$, à pôles dans Θ ; on dira que ω représente Θ si la condition suivante est satisfaite. Pour $z \in \Theta$, soit θ une équation locale de $[\Theta]$ au voisinage de z ; alors au voisinage de z , $\omega - \frac{d\theta}{\theta}$ est holomorphe.

Considérons maintenant, avec [S-J-M] la forme différentielle sur $\tilde{Z}$

$$(6.2) \qquad \omega_S = \frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu} \mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu)\frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}$$

où les A_μ sont les solutions de l'équation de Schlesinger (S) , avec les conditions initiales (3.2) ; ce sont donc des fonctions méromorphes sur $\tilde{Z}$, à pôles dans Θ .

LEMME 6.3. [S-M-J] - La forme ω_S est fermée.

Ceci se déduit aussitôt du fait que les A_μ vérifient les équations de Schlesinger.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant, qui précise un peu un théorème de Miwa [M].

THEOREME 6.4. - La forme ω_S représente $[\Theta]$.

Comme $\tilde{Z}$ est simplement connexe, en résolvant l'équation $\frac{d\tau}{\tau} = \omega_S$, on en déduit comme au §5 une fonction τ, holomorphe sur $\tilde{Z}$, et vérifiant $\operatorname{div}(\tau) = [\Theta]$.

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser une variante des calculs du §5. Il suffit évidemment de démontrer le théorème localement sur $\tilde{Z}$. Soit alors $z^1 \in \Theta$, et U une petite boule ouverte de centre z^1 ; on peut identifier U à sa projection dans Z, i.e. les points $z \in \Theta$ à leur projection $(a_1,\dots,a_m) \in Z$. Soient $\rho_{1,\mu} < \rho_{2,\mu}$ $(1 \leq \mu \leq m)$ des nombres positifs ; on pose $D'_\mu = \{x \in \mathbb{C} ; |x-a^1_\mu| < \rho_{2,\mu}\}$ et l'on appelle D'' le complémentaire dans $\mathbb{P}$ de la réunion des disques $|x-a^1_\mu| \leq \rho_{1,\mu}$; on suppose les ρ assez petits pour que les $\overline{D'_\mu}$ soient disjoints. On supposera aussi U assez petit pour que l'on ait $|a_\mu - a^1_\mu| < \rho_{1,\mu}$ pour tout $z = (a_1,\dots,a_m) \in U$; choisissons encore des réels r_μ vérifiant $\rho_{1,\mu} < r_\mu < \rho_{2,\mu}$, et soient Γ_μ les cercles $|x-a^1_\mu| = r_\mu$, parcourus dans le sens direct ; choisissons enfin un point $z^o = (a^o_\mu) \in U$ tel que le fibré $E|\mathbb{P} \times \{z^o\}$ soit trivial. (La notation ici diffère de celle du théorème 3.2).

On va représenter le fibré $E|\mathbb{P} \times U$ par des trivialisations sur $\{U \times D'_\mu\}$ et $U \times D''$ de la manière suivante.

Soit $\Omega = \Sigma \frac{A_\mu}{x-a_\mu} d(x-a_\mu)$ la forme de connexion considérée au §3, (définie hors de Θ) et soit $\Omega^o = \Sigma \frac{A^o_\mu}{x-a^o_\mu} dx$, $A^o_\mu = A_\mu(a^o_1,\dots,a^o_m)$, sa restriction à $\mathbb{P} \times \{z^o\}$. On va expliciter au-dessus de U la méthode de fabrication de E donnée dans la démonstration du théorème 2.1.

i) On prolonge Ω^o en une forme Ω'' sur $D'' \times U$ par l'image réciproque pour la projection $\mathbb{P} \times U \to \mathbb{P}$, i.e. on pose :

$$\Omega'' = \Sigma \frac{A^o_\mu}{x-a^o_\mu} dx .$$

ii) Pour prolonger Ω^o en une forme Ω'_μ sur $D'_\mu \times U$, à pôles logarithmiques sur $x = a_\mu$, on fait d'abord le changement de variables $y = x - a_\mu$; on applique alors le même procédé qu'en i) ; tous calculs faits, ceci donne :

$$\Omega'_\mu = \sum_\nu \frac{A^o_\nu}{(x-a_\mu)+(a^o_\mu-a^o_\nu)} d(x-a_\mu) .$$

(On suppose qu'on a choisi z^o assez voisin de z pour que le seul pôle de cette forme dans $D'_\mu \times U$ soit $x = a_\mu$) .

Sur $U \times (D'_\mu \cap D'')$, les formes Ω'_μ et Ω'' sont intégrables, et leurs restrictions à $\{z^o\} \times (D'_\mu \cap D'')$ sont égales ; par suite, il existe une matrice holomorphe inversible unique S_μ sur $U \times (D'_\mu \cap D'')$ qui vérifie $S(x, z^o) = \mathrm{id}$, et $\Omega'' = S_\mu \Omega'_\mu S_\mu^{-1} - dS_\mu \cdot S_\mu^{-1}$. Pour abréger, on écrira cette dernière formule $\Omega'' = S_\mu[\Omega'_\mu]$.

Le fibré E est alors défini par le système $\{S_\mu\}$. Notons $S_\mu(z)$ la fonction $x \to S_\mu(x, z)$. Pour que E soit trivial au-dessus de $\mathbb{P} \times \{z\}$, il faut et il suffit qu'il existe des $\Sigma'_\mu(z)$, holomorphes inversibles dans D'_μ et $\Sigma''(z)$ holomorphe dans D'' , avec $\Sigma''(\infty) = \mathrm{id}$, telles qu'on ait $S_\mu(z) = \Sigma''(z) \Sigma'^{-1}_\mu(z)$; et le système $(\Sigma'_\mu(z), \Sigma''(z))$ est unique.

Il résulte du § 4, et des considérations usuelles sur le changement de cartes dans un fibré, que Σ'_μ (resp. Σ'') est méromorphe inversible sur $D'_\mu \times U$ (resp. $D'' \times U$) , à pôles dans $D'_\mu \times \Theta$ (resp. $D'' \times \Theta$) .

LEMME 6.5. - <u>Au-dessus de</u> $U - \Theta$, <u>on a, dans les ouverts où les deux membres des formules sont définis</u>
$\Omega = \Sigma''^{-1}[\Omega''] = \Sigma'^{-1}_\mu[\Omega'_\mu]$.

Au-dessus de $(D'_\mu \cap D'') \times (U - \Theta)$, on a $\Omega'' = S_\mu[\Omega'_\mu]$, d'où la dernière égalité ; par suite $\Sigma'^{-1}_\mu[\Omega'_\mu]$ et $\Sigma''^{-1}[\Omega'']$ se recollent pour donner une forme de connexion intégrable sur $\mathbb{P}\times(U-\Theta)$, à pôles logarithmiques sur $x = a_1,\dots,a_m,\infty$; il suffit de voir que cette forme est égale à Ω ; ceci résulte du fait que sa restriction à $\mathbb{P}\times\{z^o\}$ est égale à Ω^o , de ce que sa restriction à $\{\infty\}\times(U-\Theta)$ est nulle (parce qu'on a choisi $\Sigma''(\infty) = \mathrm{id}$), et enfin de l'unicité d'une forme satisfaisant à ces conditions ; voir pour ce dernier point les calculs du début du § 3.

On va maintenant fabriquer une forme ω représentant $[\Theta]$ dans U par une variante des calculs du § 5. Soient $H = \oplus L^2(\Gamma_\mu, d\theta_\mu)$, H'_ν le sous-espace des fonctions de $L^2(\Gamma_\mu)$ qui se prolongent en des fonctions holomorphes dans $|x-a_\mu| < r_\mu$, $H' = \oplus H'_\nu$; soit enfin H'' le supplémentaire de H' formé des fonctions de H qui se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathbb{P} - \cup\{|x-a_\mu| \le r_\mu\}$, et nulles à l'infini. On note encore Q' et Q'' les projecteurs $H \to H'$ et $H \to H''$, qui s'expriment comme au § 4 par des intégrales de Cauchy. Posant $S = \{S_\mu\}$, on définit encore le projecteur de Toeplitz $T_S : H'^p \to H'^p$ comme au § 4. Posons, comme en (5.1)

$$(6.6) \qquad \omega = \mathrm{Tr}(T_{S^{-1}} T_{\partial S} - T_{S^{-1}\partial S}) \qquad \text{avec } \partial = d_z .$$

On vérifie, par une adaptation des calculs de (5.2) et (5.8) le lemme suivant :

LEMME 6.7. -

i) <u>La forme</u> ω <u>représente</u> Θ <u>dans</u> U ;

ii) <u>On a, dans</u> $U-\Theta$: $\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_\mu \int_{\Gamma_\mu} \mathrm{Tr}(\Sigma'^{-1}_\mu d_x \Sigma'_\mu \wedge \Sigma''^{-1} d_z \Sigma'')$.

Le lemme suivant n'est pas indispensable à la suite ; on peut l'estimer plus ou moins "miraculeux" que le lemme 6.3 ; question de goût...

LEMME 6.8. - <u>La forme</u> ω <u>est fermée</u>.

Dans la formule (6.6), on peut évidemment remplacer $T_{S^{-1}\partial S}$ par sa partie diagonale par rapport à la décomposition $H'^p = \oplus H'^p_\mu$; on vérifie facilement que cette partie diagonale agit par $T^\mu_{S^{-1}_\mu \partial S_\mu}$ sur H'^p_μ, T^μ étant l'opérateur de Toeplitz relatif au cercle Γ_μ pris isolément ; un calcul analogue à (5.3) montre alors qu'on a :

$$d\omega = \frac{1}{2}\sum_\mu \operatorname{Tr}\left\{T^\mu_{\left[S^{-1}_\mu \partial S_\mu ,\, S^{-1}_\mu \partial S_\mu\right]} - \left[T^\mu_{S^{-1}_\mu \partial S_\mu} , T^\mu_{S^{-1}_\mu \partial S_\mu}\right]\right\}$$

Mais il est immédiat de vérifier que $S^{-1}\partial S_\mu$ ne contient que la différentielle da_μ ; il s'ensuit que les deux crochets figurant au second membre sont nuls. D'où le lemme.

Pour terminer la démonstration, il suffit maintenant d'exprimer ω en fonction de la forme ω_S définie par (6.2). On comparera le calcul qui suit avec [S-J-M], § 1.6.

On va utiliser la formule (6.7. ii)), dans laquelle on peut remplacer $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\mu}$ par Rés_{a_μ} .

i) Par (6.5), on a $\Omega = \Sigma''^{-1}\Omega''\Sigma'' + \Sigma''^{-1}d\Sigma''$; en prenant les composantes en d_z des deux membres, il vient :

$$\Sigma''^{-1}d_z\Sigma'' = -\sum \frac{A_\nu}{x-a_\nu}\,da_\nu \quad ;$$

sa partie polaire en $x = a_\mu$ est d'ordre un , et de coefficient $-A_\mu da_\mu$.

ii) Calculons maintenant la valeur pour $x = a_\mu$ de $\Sigma'^{-1}_\mu \frac{d\Sigma'_\mu}{dx}$ (qui est holomorphe au voisinage de $x = a_\mu$).

On a encore, par (6.5) :

$$(6.9)\quad \Sigma'^{-1}_\mu d_x \Sigma'_\mu = \Omega_x - \Sigma'^{-1}_\mu \Omega'_{\mu,x}\Sigma'_\mu$$

au voisinage de $x = a_\mu$, on a $\Omega_x = \left(\frac{A_\mu}{x-a_\mu} + B_\mu + \dots\right) dx$, et

$\Omega'_{\mu,x} = \left(\frac{A^o_\mu}{x-a_\mu} + B^o_\mu + \ldots\right) dx$, les points désignant des termes nuls sur $x = a_\mu$, avec

$$(6.10)\quad B_\mu = \sum_{\nu\neq\mu} \frac{A_\nu}{a_\nu - a_\mu} \quad , \quad B^o_\mu = \sum_{\nu\neq\mu} \frac{A^o_\nu}{a^o_\nu - a^o_\mu} \quad .$$

Posons d'autre part $\Sigma_\mu = \alpha[I + \beta(x - a_\mu) + \ldots]$; comme le second membre de (6.9) n'a pas de pôle, on a $\alpha^{-1}A^o_\mu\alpha = A_\mu$; alors le terme constant du second membre de (6.9) vaut

$$B_\mu - \alpha^{-1}B^o_\mu\alpha + [\beta, A_\mu] \ .$$

iii) En regroupant les calculs précédents, on trouve :

$$\text{Rés}_{a_\mu} \operatorname{Tr}\left(\Sigma'^{-1}_\mu d_x \Sigma'_\mu \wedge \Sigma''^{-1} d_z \Sigma''\right) = \operatorname{Tr}\left\{\left(B_\mu - \alpha^{-1}B^o_\mu\alpha + [\beta, A_\mu]\right) A_\mu\right\} da_\mu \ .$$

Dans la trace figurant au second membre, le 3e terme est nul, et le second vaut $\operatorname{Tr}(B^o_\mu A^o_\mu)$. En sommant par rapport à μ et en utilisant (6.10) on trouve finalement :

PROPOSITION 6.11. - <u>On a</u> $\omega = \omega_S - \sum_\mu \operatorname{Tr}(B^o_\mu A^o_\mu) da_\mu$.

Le dernier terme de cette formule est trivialement holomorphe dans U , et fermé. Le théorème résulte alors immédiatement du lemme 6.7. Par ailleurs, le lemme 6.8 retrouve le fait que ω_S est fermée.

<u>Remarque 6.12.</u> - Considérons l'hypothèse usuelle suivante : pour tout μ les différences des valeurs propres de A_μ n'appartiennent pas à $\mathbb{Z} - \{0\}$; il suffit d'ailleurs de faire cette hypothèse en un point z^o quelconque, car les équations de Schlesinger (ou, dans ce cas, un argument d'isomonodromie) montrent que $A_\mu(z)$ reste conjugué à $A_\mu(z^o)$ pour tout z .

Sous cette hypothèse, il est connu que, au voisinage de $x = a^o_\mu$, Ω^o se ramène à la forme $\frac{A^o_\mu}{x - a^o_\mu} dx$. Dans ce cas, on peut donc prendre

$\Omega'_\mu = \frac{A^o_\mu}{x-a_\mu}\, d(x-a_\mu)$ au lieu de l'expression prise plus haut ; avec ce choix, on aura par le même calcul que ci-dessus : $\omega = \omega_S$.

BIBLIOGRAPHIE.

[A-S] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER, The index of elliptic operators III, Ann. Math. 87 (1968), pp. 484-530.

[B] L. BOUTET DE MONVEL, Problème de Riemann-Hilbert III, Exposé n°5, Séminaire ENS (1979-80).

[D] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Springer Lect. Notes n°163, Springer (1970).

[F-M] R.H. FOX, L. NEUWIRTH, The Braid Groups, Math. Scand. 10 (1962), pp. 119-126.

[G] R. GERARD, Le problème de Riemann-Hilbert sur une variété analytique complexe, Ann. Inst. Fourier 2 (1969), pp. 1-32.

[I] I. INCE, Ordinary differential equations, 1926. Dover, New-York 1956.

[J-M] M. JIMBO, T. MIWA, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations II. R.I.M.S. Preprint 327 (1980).

[M] T. MIWA, Painlevé property of monodromy preserving equations and the analyticity of τ function. Publ. R.I.M.S. Kyoto University 17-2 (1981), pp. 703-721.

[S-J-M] M. SATO, T. MIWA, M. JIMBO, Aspects of holonomic quantum fields, Springer Lect. Notes in Physics, n° 126 (1980), pp. 429-491.

(mai 1982)