

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

JEAN-LOUIS KOSZUL

**Sur le faisceau d'un groupe de Lie gradué et certaines
représentations linéaires de son algèbre de Lie**

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1982, tome 30
« Conférences de : P. Moussa, J. Fröhlich, J.L. Koszul, P.A. Meyer, M. Sirugue », ,
exp. n° 4, p. 115-125

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1982__30__115_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE FAISCEAU D'UN GROUPE DE LIE GRADUE
ET CERTAINES REPRESENTATIONS LINEAIRES
DE SON ALGEBRE DE LIE

par Jean-Louis KOSZUL

1. Un groupe de Lie gradué (ou super-groupe de Lie) au sens de B. Kostant ([2]) est formé par un groupe de Lie G_0 et un faisceau Ω de \mathbb{R} -algèbres graduées commutatives sur G_0 , les degrés étant dans $\mathbb{Z}/(2)$. L'algèbre de Lie de (G_0, Ω) est une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, où \mathfrak{g}_0 est l'algèbre de Lie de G_0 . On notera $E(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{g} , c'est-à-dire l'algèbre graduée quotient de l'algèbre tensorielle $\otimes \mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x - [x, y],$$

où $x, y \in \mathfrak{g}$ sont respectivement de degrés $p, q \in \mathbb{Z}/(2)$. Pour tout ouvert U de G_0 , l'algèbre $\Omega(U)$ est un bimodule sur $E(\mathfrak{g})$: on a sur $\Omega(U)$ une structure de module à gauche et une structure de module à droite sur $E(\mathfrak{g})$ telles que $(u\varphi)v = u(\varphi v)$ quels que soient $u, v \in E(\mathfrak{g})$ et $\varphi \in \Omega(U)$.

L'exemple le plus classique de cette situation est celui du super-groupe de Lie (G_0, Ω) où Ω est le faisceau des formes différentielles sur G_0 . L'algèbre de Lie de (G_0, Ω) est $\mathfrak{g} = \Delta \otimes \mathfrak{g}_0$, où Δ est l'algèbre sur \mathbb{R} des nombres duaux graduée mod 2 : $\Delta = \mathbb{R} + \mathbb{R}e$ avec $e^2 = 0$ et $dg(e) = 1$. Soient R_a (resp. L_a) les champs de vecteurs invariants à droite (resp. à gauche) sur G_0 ayant a pour valeur en l'élément

neutre. Pour tout ouvert U de G_0 , la structure de $E(\mathfrak{g})$ module à gauche sur $\Omega(U)$ est définie par

$$\begin{aligned} (1 \otimes a)_\omega &= \theta(R_a)_\omega, \\ (e \otimes a)_\omega &= i(R_a)_\omega, \end{aligned}$$

où $\theta(X)$ et $i(X)$ désignent respectivement la dérivation de Lie et la dérivation produit intérieur par rapport à un champ X . De même, la structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à droite est définie par

$$\begin{aligned} \omega(1 \otimes a) &= + \theta(L_a)_\omega \\ \omega(e \otimes a) &= - (-1)^{\text{dg}(\omega)} i(L_a)_\omega, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_0$ et tout $\omega \in \Omega(U)$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie graduée sur \mathbb{R} et soit G_0 un groupe de Lie ayant \mathfrak{g}_0 pour algèbre de Lie. En général, il n'existe pas de groupe de Lie gradué ayant G_0 pour variété sous-jacente et \mathfrak{g} pour algèbre de Lie. Néanmoins, on peut associer à (G_0, \mathfrak{g}) une variété graduée (G_0, \mathcal{A}) telle que pour tout ouvert U de G_0 , l'algèbre $\mathcal{A}(U)$ possède une structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à gauche et une structure de $E(\mathfrak{g}_0)$ -module à droite. Si il existe un groupe de Lie gradué (G_0, \mathfrak{B}) ayant \mathfrak{g} pour algèbre de Lie, les variétés graduées (G_0, \mathfrak{B}) et (G_0, \mathcal{A}) sont canoniquement isomorphes (cf. N° 2).

On se propose dans ce papier de présenter une construction du faisceau \mathcal{A} associé à G_0 et \mathfrak{g} . Soient U un ouvert de G_0 et $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{A}(U)$ invariants à droite par \mathfrak{g}_0 . Si U est connexe, $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ des formes alternées sur \mathfrak{g}_1 (cf. B. Kostant, [2] Remarque 3.6). Au numéro 3, on calcule les dérivations de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ qui définissent la structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à gauche des $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{g}_0}$. On explicite dans quelques exemples les sous-modules de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ que l'on peut associer aux \mathfrak{g}_0 -sous-modules de \mathfrak{g}_1 .

2. CONSTRUCTION DU FAISCEAU \mathcal{Q} DEFINI PAR G_0 ET

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 .$$

Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie graduée de dimension finie sur \mathbb{R} et G_0 un groupe de Lie ayant \mathfrak{g}_0 pour algèbre de Lie. On note \mathcal{F} le faisceau des fonctions numériques de classe C^∞ sur G_0 . Pour tout ouvert U de G , $\mathcal{F}(U)$ est un bimodule sur l'algèbre enveloppante $E(\mathfrak{g}_0)$ dont la structure est définie par les dérivées de Lie

$$af = R_a \cdot f \quad , \quad fa = L_a \cdot f$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_0$ et tout $f \in \mathcal{F}(U)$ (R_a et L_a étant respectivement les champs de vecteurs invariants à droite et à gauche sur G_0 ayant a pour valeur en l'élément neutre). L'injection $\mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ se prolonge en un homomorphisme injectif de $E(\mathfrak{g}_0)$ dans $E(\mathfrak{g})$. On identifiera $E(\mathfrak{g}_0)$ et son image dans $E(\mathfrak{g})$ qui est ainsi un bimodule sur $E(\mathfrak{g}_0)$. Pour tout ouvert U de G_0 , soit $\mathcal{Q}(U)$ l'espace des homomorphismes de $E(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{F}(U)$ considérés comme $E(\mathfrak{g}_0)$ -modules à gauche. L'espace $\mathcal{Q}(U)$ est gradué (mod 2) :

$$\mathcal{Q}(U)_p = \text{Hom}_{E(\mathfrak{g}_0)}(E(\mathfrak{g})_p, \mathcal{F}(U)) \quad (p=0, 1) .$$

Le produit dans $\mathcal{F}(U)$ et le coproduit $E(\mathfrak{g}) \rightarrow E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})$ définissent sur $\mathcal{Q}(U)$ une structure d'algèbre graduée commutative.

Précisons que l'on définit le produit dans $\mathcal{Q}(U)$ en prenant pour accouplement

$$(\mathcal{Q}(U) \otimes \mathcal{Q}(U) , E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

l'application

$$(\varphi \otimes \psi , u \otimes v) \longmapsto (-1)^{\text{dg}(\psi)\text{dg}(u)} \varphi(u)\psi(v) .$$

[cf. [2], p. 200].

La même règle sera respectée dans la suite toutes les fois que l'on prendra le dual d'une cogèbre graduée et en particulier le dual d'une algèbre extérieure.

Pour tout ouvert $U \subset G_0$, l'application $\nu_U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ définie par $\nu_U(\varphi) = \varphi(1)$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ dans l'algèbre $\mathcal{F}(U)$. Il est clair que les $\mathcal{O}(U)$ sont un faisceau d'algèbres graduées sur G_0 et que les ν_U sont un morphisme surjectif $\nu : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$.

On va maintenant préciser la structure des $\mathcal{O}(U)$. Pour tout entier $n \geq 0$, soit γ^n la forme n -linéaire alternée sur \mathfrak{g}_1 à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$ définie par

$$\gamma^n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\tau \in G(n)} \text{sg}(\tau) x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$$

pour toute suite x_1, \dots, x_n dans \mathfrak{g}_1 . Il existe une application linéaire Γ de l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g}_1)$ dans $E(\mathfrak{g})$ et une seule telle que

$$\Gamma(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \frac{1}{n!} \gamma^n(x_1, \dots, x_n).$$

Si \underline{p} est la classe de $p \pmod{2}$, $\Gamma(\Lambda^p(\mathfrak{g}_1)) \subset E(\mathfrak{g})_{\underline{p}}$.

Compte-tenu de la version graduée du Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([3]), l'application $(u, v) \mapsto u \lrcorner v$ de $E(\mathfrak{g}_0) \times \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ dans $E(\mathfrak{g})$ définit un isomorphisme canonique de $E(\mathfrak{g}_0) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ sur $E(\mathfrak{g})$. Cet isomorphisme est visiblement compatible avec les structures de $E(\mathfrak{g}_0)$ -modules à gauche. Par conséquent, $\mathcal{O}(U) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(E(\mathfrak{g}), \mathcal{F}(U))$ s'identifie à $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda(\mathfrak{g}_1), \mathcal{F}(U))$. On sait d'autre part que $\Gamma : \Lambda(\mathfrak{g}_1) \rightarrow E(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme de cogèbres ; par suite, l'algèbre graduée $\mathcal{O}(U)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(U) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ où $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est l'algèbre des formes alternées sur \mathfrak{g}_1 à valeurs scalaires. Plus précisément, le produit dans $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est l'opposé du produit extérieur habituel des formes alternées. Le faisceau \mathcal{O} étant ainsi canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{F} \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_1)'$, (G_0, \mathcal{O}) est une variété graduée de dimension $(\dim \mathfrak{g}_0, \dim \mathfrak{g}_1)$. On observera que \mathcal{O} est un faisceau d'algèbres graduées en \mathbb{Z} et non pas seulement en $\mathbb{Z}/(2)$.

Pour tout ouvert $U \subset G$, $\mathcal{O}(U)$ possède une structure de $(E(\mathfrak{g}), E(\mathfrak{g}_0))$ -bimodule déterminée par les relations :

$$(x\varphi)(u) = (-1)^{\text{dg}(x)}\varphi(ux) ,$$

$$(\varphi a)(u) = L_a \cdot \varphi(u) ,$$

où $\varphi \in \mathcal{O}(U)$, $x \in \mathfrak{g}$ et $a \in \mathfrak{g}_0$. Si $x \in \mathfrak{g}_i$, l'application $\varphi \mapsto x\varphi$ est une dérivation dont le degré mod 2 est défini et égal à i ; cette dérivation sera notée $r(x)$. Si $a \in \mathfrak{g}_0$, l'application $\varphi \mapsto \varphi a$ est une dérivation dont le degré en \mathbb{Z} est défini et égal à 0 .

Si il existe un groupe de Lie gradué (G_0, \mathfrak{B}) ayant \mathfrak{g} pour algèbre de Lie, alors (G_0, \mathfrak{B}) et (G_0, \mathcal{A}) sont des variétés graduées canoniquement isomorphes. Mais en général la structure du faisceau \mathcal{A} construit plus haut est moins riche que celle que l'on trouve dans le faisceau d'un groupe gradué. Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe gradué ayant G_0 pour variété sous-jacente, il existe une représentation linéaire Ad de G_0 dans \mathfrak{g} telle que $\text{Ad}(\exp(ta))x = x + t[a, x] + t^2 \dots$ pour tout $a \in \mathfrak{g}$. Inversement, la donnée d'une telle représentation linéaire de G_0 dans \mathfrak{g} détermine sur (G_0, \mathcal{A}) une structure de groupe gradué. Le prolongement de cette représentation linéaire à $E(\mathfrak{g})$ permet de définir le morphisme produit $(G_0, \mathcal{A}) \times (G_0, \mathcal{A}) \rightarrow (G_0, \mathcal{A})$ et le morphisme antipode $(G_0, \mathcal{A}) \rightarrow (G_0, \mathcal{A})$. L'antipode détermine sur les algèbres $\mathcal{O}(U)$ une structure de module à droite sur $E(\mathfrak{g})$ qui prolonge la structure de $E(\mathfrak{g}_0)$ -module à droite définie plus haut. Ce qui suit ne fera pas intervenir des structures de groupes gradués, mais seulement la structure de la variété graduée (G_0, \mathcal{A}) .

3. LES MODULES $\mathcal{O}(U)^{\mathfrak{g}_0}$.

Si U est un ouvert connexe de G_0 les éléments $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ tels que $\varphi a = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{g}_0$ sont les homomorphismes $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(E(\mathfrak{g}), \mathcal{F}(U))$ tels que pour tout $u \in E(\mathfrak{g})$, $\varphi(u)$ soit une fonction constante. Ils forment une sous-algèbre $\mathcal{O}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ de $\mathcal{O}(U)$ égale à $\text{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(E(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$. Puisque \mathbb{R} est le $E(\mathfrak{g}_0)$ -module trivial, $\mathcal{O}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ s'identifie

à l'espace des formes linéaires sur $E(\mathfrak{g})$ qui sont nulles sur l'idéal à droite $\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}) \subset E(\mathfrak{g})$. En d'autres termes, le $E(\mathfrak{g})$ -module $\mathcal{O}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ s'identifie au dual du $E(\mathfrak{g})$ -module à droite induit :

$$\mathbb{R} \otimes_{E(\mathfrak{g}_0)} E(\mathfrak{g}) = E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}) .$$

Puisque $E(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $E(\mathfrak{g}_0) \otimes (\wedge \mathfrak{g}_1)$, $E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\wedge(\mathfrak{g}_1)$ et $\mathcal{O}(U)^{\mathfrak{g}_0}$ est donc canoniquement isomorphe à $\wedge(\mathfrak{g}_1)'$. Cet isomorphisme est compatible avec les structures d'algèbres graduées.

On va expliciter la structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à droite de $\wedge(\mathfrak{g}_1)$ identifié à $E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g})$.

LEMME 1. - Pour tout $a \in \mathfrak{g}_0$ et toute suite $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}_1$

on a :

$$\gamma^p(x_1, \dots, x_p)a = \sum_i \gamma^p(x_1, \dots, [x_i, a], \dots, x_p) \pmod{\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g})} .$$

Cela résulte facilement des relations $x_i a = ax_i + [x_i, a]$.

Le calcul de $\gamma^p(x_1, \dots, x_p)y$ pour y dans \mathfrak{g}_1 qui va suivre est plus compliqué. On conviendra de noter $\alpha.\beta$ le produit extérieur de deux formes alternées $\alpha.\beta$ sur \mathfrak{g}_1 à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$. Ainsi $\gamma^p = \gamma.\gamma \dots \gamma$ (p fois) où γ est l'injection canonique de \mathfrak{g}_1 dans $E(\mathfrak{g})$. On pose $\varphi_y^0 = y$, et on considère φ_y^0 comme une forme de degré 0 sur \mathfrak{g}_1 . De proche en proche, on définit

$$(1) \quad \varphi_y^p = \varphi_y^{p-1} . \psi + \psi . \varphi_y^{p-1} .$$

Ainsi, $\varphi_y^1(x) = yx + xy = [x, y]$.

La relation (1) donne :

$$\varphi_y^p(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{i+1} [x_i, \varphi_y^{p-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)] .$$

Par induction sur p , on obtient :

$$\varphi_y^p(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\tau \in G(p)} \text{sg}(\tau) [x_{\tau(1)}, [x_{\tau(2)}, \dots, [x_{\tau(p)}, y] \dots]] .$$

On observera que φ_y^p est à valeurs dans \mathfrak{g}_1 pour p pair et à valeurs dans \mathfrak{g}_0 pour p impair.

Soit ψ une forme alternée de degré p sur \mathfrak{g}_1 à valeurs dans \mathfrak{g}_1 . On lui associe une dérivation (produit intérieur) $i(\psi)$ de degré $p-1$ dans l'algèbre des formes alternées sur \mathfrak{g}_1 à valeurs dans $E(\mathfrak{g})$ en posant :

$$\begin{aligned} (i(\psi)\alpha)(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{G}(p, q)} \text{sg}(\tau) \alpha(\psi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}), x_{\tau(p+1)}, \dots, x_{\tau(p+q)}) \end{aligned}$$

pour toute forme α de degré $q+1$ et toute suite $x_1, \dots, x_{p+q} \in \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{G}(p, q)$ désignant l'ensemble des permutations de $[1, p+1]$ croissantes sur $[1, p]$ et sur $[p+1, q]$.

LEMME 2. - Pour tout $p > 0$,

$$\gamma^{2p} \cdot \varphi_y^0 = \frac{1}{2^{p+1}} i(\varphi_y^0) \gamma^{2p+1} - \sum_{i=1}^{p-1} 2^{2i} b_{2i} i(\varphi_y^{2i}) \gamma^{2p-2i+1}$$

modulo $\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g})$, les coefficients b_{2i} étant les nombres de Bernoulli $\left(\left(\frac{e^t - 1}{t} \right)^{-1} = \sum \frac{1}{r!} b_r t^r \right)$.

Démonstration. - On vérifie que, pour tout $p > 0$,

$$(2) \quad \gamma^p \cdot \varphi_y^0 = \varphi_y^p - \binom{p}{1} \varphi_y^{p-1} \cdot \gamma + \dots + (-1)^i \binom{p}{i} \varphi_y^{p-i} \cdot \gamma^i + (-1)^p \varphi_y^0 \cdot \gamma^p$$

$$(3) \quad i(\varphi_{2r}^p) \gamma^{p+1} = \binom{p+1}{1} \varphi_y^{2r} \cdot \gamma^p - \binom{p+1}{2} \varphi_y^{2r+1} \cdot \gamma^{p-1} + \dots + (-1)^p \varphi_y^{2r+p}$$

Pour $p-i$ impair, $\varphi_y^{p-i} \cdot \gamma^i$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g})$. On retranche du second membre de (2) une combinaison linéaire

$$\lambda_0^{2p} i(\varphi_y^0) \gamma^{2p+1} + \lambda_2^{2p} i(\varphi_y^2) \gamma^{2p-1} + \dots + \lambda_{2p}^{2p} i(\varphi_y^{2p}) \gamma$$

de manière à annuler les termes en $\varphi_y^{p-i} \cdot \gamma^i$ pour i pair. Compte-tenu de (3), cette condition est vérifiée si et seulement si les λ_{2i}^{2p} sont solution du système linéaire :

$$\binom{2p+1}{1} \lambda_0^{2p} = 1 ,$$

$$\binom{2p+1}{3} \lambda_0^{2p} + \binom{2p-1}{1} \lambda_2^{2p} = \binom{p}{p-2} ,$$

.....

$$\binom{2p+1}{2p+1} \lambda_0^{2p} + \dots + \binom{2p-2i}{2p-2i} \lambda_{2i}^{2p} + \dots + \binom{1}{1} \lambda_{2p}^{2p} = \binom{2p}{0} .$$

La solution de ces équations est :

$$\lambda_0^{2p} = \frac{1}{2^{p+1}} , \quad \lambda_{2i}^{2p} = \frac{2^{2i}}{(2i)!} b_{2i}^{2p} \binom{2n}{2i-1}$$

pour $1 < i \leq n$.

On observe que la forme $i(\varphi_{2i}) \gamma^{2p-2i+1}$ est à valeurs dans l'image par Γ de $\Lambda^{2p-2i+1}(\mathfrak{g}_i)$. Par suite :

LEMME 3. - Quels que soient x_1, \dots, x_{2p} ,

$$\gamma_{2p}(x_1, \dots, x_{2p}) \gamma = 2^{2p} b_{2p}^{2p} \varphi_y^{2p}(x_1, \dots, x_{2p})$$

$$\text{modulo } \mathfrak{g}_0 U(\mathfrak{g}) + \Gamma \sum_{r>0} \Lambda^r(\mathfrak{g}_1) .$$

On peut maintenant calculer la représentation linéaire r de \mathfrak{g} dans $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ qui correspond à sa structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à gauche. On sait que pour $z \in \mathfrak{g}_i$, $r(z)$ est une dérivation de degré i , mod 2 . Il suffit donc de calculer $r(z)f$ où $f \in \mathfrak{g}'_1$ est une forme de degré 1 : c'est ce que donnent les lemmes 1 et 3 .

PROPOSITION. - Si $a \in \mathfrak{g}_0$ la dérivation $r(a)$ de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est définie par

$$(r(a)f)(x) = -f([a, x]) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}_1 \quad \text{et tout } f \in \mathfrak{g}'_1 .$$

Si $y \in \mathfrak{g}'_1$, $r(y)$ est une dérivation de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ de degré 1 modulo 2 . Pour tout $f \in \mathfrak{g}'_1$, la composante de degré 0 de $r(y)f$ est $-y$. Si $p \geq 1$, la composante de degré $2p$ de $r(y)f$ est donnée par

$$(r(y)f)(x_1, \dots, x_{2p}) = - \frac{2^{2p}}{2p!} b_{2p}^{2p} \varphi_y^{2p}(x_1, \dots, x_{2p}) .$$

COROLLAIRE. - Pour tout $y \in \mathfrak{g}_1$,

$$r(y) = -i(y) - \sum_{p \geq 1} \frac{2^{2p}}{2p!} b_{2p} i(\varphi_y^{2p})$$

où $i(\varphi_y^j)$ désigne la dérivation de $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ de degré $j-1$ telle que $i(\varphi_y^j)f = f(\varphi_y^j)$ pour tout $f \in \mathfrak{g}'_1$.

On observera que si la composante de degré $2p-1$ de $r(y)$ est nulle, alors il en est de même des composantes de degré $2q-1$ pour $q > p$. Pour que $r(y)$ se réduise à la composante $-i(y)$ de degré -1 , il faut et il suffit que $\varphi_y^1 = 0$, autrement dit que $[y, \mathfrak{g}_1] = \{0\}$.

Si $n = \dim \mathfrak{g}_1$, le $E(\mathfrak{g})$ -module $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ est engendré par $\Lambda^n(\mathfrak{g}_1)'$. Les formes ω telles que $r(z)\omega = 0$ pour tout $z \in \mathfrak{g}$ sont les éléments de $\Lambda^0(\mathfrak{g}_1)' = k$.

4. SOUS-ALGÈBRES DE $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$ ASSOCIÉES A UN \mathfrak{g}_0 -SOUS-MODULE DE \mathfrak{g}_1 .

Soit \mathfrak{m} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}_1 et soit $J(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{m})E(\mathfrak{g})$ l'idéal à droite de $E(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{m}$. L'image de $J(\mathfrak{m})$ par le coproduit $E(\mathfrak{g}) \rightarrow E(\mathfrak{g}) \otimes E(\mathfrak{g})$ est contenue dans $J(\mathfrak{m}) \otimes E(\mathfrak{g}) + E(\mathfrak{g}) \otimes J(\mathfrak{m})$. Le quotient $C(\mathfrak{m}) = E(\mathfrak{g})/J(\mathfrak{m})$ est donc une cogèbre et, par factorisation, $E(\mathfrak{g}) \rightarrow C(\mathfrak{m})$ donne un homomorphisme surjectif $\lambda(\mathfrak{m}) : E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}) \rightarrow C(\mathfrak{m})$ compatible avec les structures de cogèbres et de $E(\mathfrak{g})$ -module à droite. Le transposé est un homomorphisme injectif $\lambda(\mathfrak{m})'$ de l'algèbre $C(\mathfrak{m})'$ dans l'algèbre $(E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}))'$ compatible avec les structures de $E(\mathfrak{g})$ -modules à gauche.

On supposera dans la suite que \mathfrak{m} est un \mathfrak{g}_0 -sous-module de \mathfrak{g}_1 c'est-à-dire que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. On peut alors décrire comme suit la structure de $C(\mathfrak{m})'$. Soit $\mu : \mathfrak{g}_1/\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{g}_1$ un relèvement de l'application $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}$. Son prolongement $\Lambda(\mu) : \Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}) \rightarrow \Lambda(\mathfrak{g}_1)$ est un homomorphisme de bigèbres. Puisque $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , le Théorème de

Poincaré-Birkhoff-Witt montre que $E(\mathfrak{g})$ est somme directe de $J(\mathfrak{m})$ et de l'image de $\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m})$ par $\Gamma \circ \Lambda(\mu)$. Il en résulte que le composé des applications

$$\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\Lambda(\mu)} \Lambda(\mathfrak{g}_1) \xrightarrow{\Gamma} E(\mathfrak{g}) \longrightarrow E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\lambda(\mathfrak{m})} C(\mathfrak{m})$$

est un isomorphisme de cogèbres. L'application transposée est un isomorphisme de l'algèbre $C(\mathfrak{m})'$ sur l'algèbre de formes alternées $\Lambda(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{m})'$. Cet isomorphisme est compatible avec les degré mod 2 ; en général, il n'existe pas de degré en \mathbb{Z} naturel sur $C(\mathfrak{m})$.

Nous supposons maintenant que \mathfrak{g}_1 est somme directe de deux \mathfrak{g}_0 -sous-modules \mathfrak{m}_{-1} et \mathfrak{m}_1 tels que $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] = (0)$ pour $i = 1, -1$. C'est par exemple le cas si \mathfrak{g} est une superalgèbre simple classique de seconde espèce (cf. [1]). En posant $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{g}_0$, les sous-espaces \mathfrak{m}_{-1} , \mathfrak{m}_0 , \mathfrak{m}_1 définissent un degré en \mathbb{Z} sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Les homomorphismes $\lambda(\mathfrak{m}_i)' : C(\mathfrak{m}_i)' \rightarrow \Lambda(\mathfrak{g}_1)' = (E(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}_0 E(\mathfrak{g}))'$ définissent dans ce cas un isomorphisme de $C(\mathfrak{m}_{-1})' \otimes C(\mathfrak{m}_1)'$ sur $\Lambda(\mathfrak{g}_1)'$. D'autre part, $E(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\Lambda(\mathfrak{m}_i)$ et de $J(\mathfrak{m}_{-i})$. On a donc un isomorphisme canonique de $\Lambda(\mathfrak{m}_i)$ sur $C(\mathfrak{m}_{-i})$ et, par transposition, un isomorphisme canonique de $C(\mathfrak{m}_{-i})'$ sur $\Lambda(\mathfrak{m}_i)'$ au moyen duquel on identifie ces deux algèbres.

Une variante simplifiée du calcul du N° 3 montre que la représentation linéaire r de \mathfrak{g} dans $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$ qui définit sa structure de $E(\mathfrak{g})$ -module à gauche est donnée par les dérivations telles que

$$\begin{aligned} (4) \quad & r(y)f = -f(y) , \\ & (r(a)f)(x) = -f([a, x]) , \\ & (r(z)f)(x, y) = -f([x, [y, z]]) , \end{aligned}$$

quels que soient $f \in \mathfrak{m}_{-1}'$, $x, y \in \mathfrak{m}_{-1}$, $a \in \mathfrak{g}_0$, $z \in \mathfrak{m}_1$ (cf. [1], p. 58). Vis-à-vis du degré en \mathbb{Z} de $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$, ces dérivations sont de degré $-1, 0$ ou 1 .

Exemple. - Soit $V = V_0 + V_1$ un espace vectoriel gradué de dimension finie et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie graduée des endomorphismes de V identifiée à $V \otimes V'$. La sous-algèbre \mathfrak{g}_0 est somme directe de $V_0 \otimes V'_0$, et de $V_1 \otimes V'_1$. Le sous-espace \mathfrak{g}_1 est somme directe de $\mathfrak{m}_{-1} = V_0 \otimes V'_1$ et de $\mathfrak{m}_1 = V_1 \otimes V'_0$. On va calculer la représentation linéaire r de \mathfrak{g} dans $\Lambda(\mathfrak{m}_{-1})'$. On identifie \mathfrak{m}_{-1}' et \mathfrak{m}_1 , l'accouplement étant

$$(\xi \otimes f)(x \otimes \varphi) = -f(x)\varphi(\xi)$$

pour $x \in V_0$, $\xi \in V_1$, $f \in V'_0$, $\varphi \in V'_1$. Compte-tenu des relations (4),

$$\begin{aligned} r(x \otimes \varphi)(\xi \otimes f) &= f(x)\varphi(\xi), \\ r(x \otimes g)(\xi \otimes f) &= -f(x)\xi \otimes g, \\ r(\eta \otimes \varphi)(\xi \otimes f) &= \varphi(\xi)\eta \otimes f, \\ r(\eta \otimes g)(\xi \otimes f) &= (\xi \otimes g) \wedge (\eta \otimes f), \end{aligned}$$

quels que soient $x \in V_0$, $f, g \in V'_0$, $\xi, \eta \in V_1$ et $\varphi \in V'_1$.

Ecrivant ξf pour $\xi \otimes f$, on a :

$$r(\xi f)(\xi f_1 \wedge \xi f_2 \wedge \dots \wedge \xi f_n) = n \xi f \wedge \xi f_1 \wedge \dots \wedge \xi f_n.$$

On en déduit que si $\dim V_1 = 1$, $\Lambda(\mathfrak{m}_1)/\Lambda^0(\mathfrak{m}_1)$ est un $E(\mathfrak{g})$ -module simple. Il en est de même si $\dim V_0 = 1$. On a d'autre part :

$$r(\eta f)(\xi g \wedge \xi h) - r(\eta g)(\xi h \wedge \xi f) + r(\eta h)(\xi f \wedge \xi g) = 2\xi f \wedge \eta g \wedge \xi h.$$

Cette relation montre que tout sous-module de $\Lambda(\mathfrak{m}_1)$ qui n'est pas contenu dans $\Lambda^0(\mathfrak{m}_1)$ contient

$$\Lambda^0(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^1(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^2(\mathfrak{m}_1) + \Lambda^3(\mathfrak{m}_1).$$

REFERENCES.

- [1] V.G. KAC, Lie Superalgebras, Advances in Math., 26, (1977), 8-96.
- [2] B. KOSTANT, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, Lecture Notes in Mathematics, 570, 177-306.
- [3] J. MILNOR - J. MOORE, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.