Bernard Malgrange

Polynômes de Bernstein-Sato

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1980, tome 28
« Conférences de : H. Araki, B. Malgrange et V. Rivasseau, A.S. Wightman », , exp. nº 2,
p. 42-58
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1980__28__42_0>

POLYNOMES DE BERNSTEIN-SATO

par

Bernard MALGRANGE
(Grenoble)

Cet exposé est un résumé d'une partie des résultats connus sur le sujet; le point le plus important qui manque est le calcul "microlocal" au moyen des diagrammes d'holonomie, qui a fait l'objet de nombreux travaux de l'école de Sato; malheureusement ces travaux ne sont publiés que de manière très partielle (voir notamment [18]), et je n'ai pas d'informations suffisantes pour pouvoir en parler.

1. Généralités.

Soient $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$ l'anneau des séries convergentes à n variables, et $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}$; soit s une indéterminée.

Théorème (1.1) : Soit $f \in \mathcal{O}$, avec $f \neq 0$; il existe $P \in \mathcal{D}[s]$, et $B \in \mathbb{C}[s]$, $B \neq 0$, tels qu'on ait $Pf^s = Bf^{s-1}$.

Ce théorème est dû à J.N. Bernstein [4] dans le cas où f est un polynôme; puis à J.E. Björk dans le cas général (sa démonstration, non publiée, figurera dans le livre de Björk en cours d'impression sur les systèmes différentiels et microdifférentiels. Une autre démonstration se trouve dans [9]).

Pour f donné, l'ensemble des B tel qu'il existe un $P \in \mathcal{D}[s]$ vérifiant $Pf^s = Bf^{s-1}$ forme manifestement un idéal de $\mathbb{C}[s]$. Le générateur unitaire de cet idéal sera noté b_f (ou b) , et appelé "polynome de Bernstein-Sato" de f . Antérieurement au travail de Berstein, ces polynomes avaient été introduits par Sato à propos des "espaces préhomogènes " [15] .

Exemples :

(1.2) Si $f(o) \neq 0$, on a $b = 1$. Dans la suite, nous excluerons ce cas trivial et supposerons toujours $f(o) = 0$.

(1.3) Si f est non singulière, on a $b(s) = s$ (se ramener à $f(x) = x_1$).

D'une façon générale, en faisant $s = 1$ dans l'identité (1.1) , on trouve qu'on a toujours $b_f(o) = 0$; on posera alors $b_f(s) = s\,\tilde{b}_f(s)$.

(1.4) Si $f(x) = \Sigma x_i^2$, on trouve $b(s) = s[s + \frac{n}{2} - 1]$ (pour voir que ce polynome convient, considérer Δf ; le fait qu'il soit bien minimal peut soit se vérifier directement, soit se déduire comme cas particulier des résultats généraux sur les singularités isolées).

Parmi les propriétés connues de ces polynomes, la plus importante est sans doute la suivante, qui se démontre par désingularisation, c'est à dire en se ramenant au cas où $f(x) = x_s^{m_1} \dots x_n^{m_n}$

Théorème (1.5) (Kashiwara [9]). Pour tout $f \in \mathcal{O}$, les zéros de b_f sont rationnels et < 1 .

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout à la signification géométrique des zéros de b_f . Même sur le plan théorique, i.e. si on fait abstraction des procédés de calcul effectif, on n'a de réponse complète à cette question que dans le cas des singularités isolées.

2. Zéros de b et prolongement analytique de $Y(f)f^s$.

Dans ce paragraphe, on suppose f réel, et s désigne un nombre complexe. Pour $\mathrm{Re}\, s > 0$, la fonction $Y(f)f^s$ (égale par définition à $f(x)^s$ si $f(x) > 0$, à 0 sinon) est localement intégrable, et définit donc une distribution sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de 0 , dépendant analytiquement de s) .

La formule (1.1), appliquée par récurrence, permet de prolonger $Y(f)f^s$ en une fonction méromorphe en s ,à valeurs distributions, dont les pôles sont contenus dans l'ensemble $A + 1 - \mathbb{N}$, A l'ensemble des zéros de b_f. On retrouve ainsi les résultats antérieurs de Berstein-Gelfand [3] et Atiyah [2] , avec une précision sur la relation entre les pôles de $Y(f)f^s$ et les zéro de b_f .

Signalons d'autre part que les pôles de $Y(f)f^s$ sont étroitement liés aux développements asymptotiques des intégrales $\int_{f=t} \varphi \frac{dx}{df}$ [que certains préfèrent noter $\int \varphi\delta(t-f)dx$] , φ fonction C^∞ à support compact, assez voisin de 0 , à cause de la formule évidente suivante :

$$\int_{f>0} f^s \varphi \, dx = \int_0^{+\infty} t^s \, dt \int_{f=t} \varphi \frac{dx}{df} \; .$$

Ces dernières intégrales sont liées aussi aux intégrales de phase stationnaire.
$\int e^{i\tau f} \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \, dt \int_{f=t} \varphi \frac{dx}{df}$. Ici, il faut aussi considérer les $t < 0$, donc il faut étudier aussi $Y(-f)(-f)^s$, pour lequel on a des résultats analogues aux précédents.

Le problème principal qui se pose à propos de ces intégrales serait de les relier à la monodromie de f dans le domaine complexe. Ce problème n'est résolu, à ma connaissance, que dans le cas des singularités isolées, voir [1],[11],[16]. Si l'on disposait de bonnes relations entre le polynôme b et la dite monodromie, on aurait fait un pas important en ce sens.

3. Zéro de b et monodromie.

Rappelons d'abord la "construction de Milnor" [14] ; soit $f \in \mathcal{O}$, $f(0) = 0$; on choisit $\epsilon > 0$ petit , et $\eta > 0$ petit devant ϵ . On pose $D = \{t \in \mathbb{C} \, , \, |t| < \eta\}$, $D^* = D - \{0\}$, et $X = f^{-1}(D) \cap B(0,\epsilon)$, $B(0,\epsilon)$ désignant la boule ouverte de centre 0 et de rayon ϵ ; on pose encore $X|t| = f^{-1}(t) \cap X$, $t \in D$, er $X^* = X - X(0)$. Dans la suite ,on restreindra implicitement f à X , ie, pour $A \subset D$, on écrira $f^{-1}(A)$ pour $f^{-1}(A) \cap X$.

Alors, pour $\epsilon < \epsilon_o$, et $\eta < \eta_o(\epsilon)$, si $t \neq 0$, $\bar{X}(t)$ est transverse à $\partial B(0,\epsilon)$ et $f : X^* \to D^*$ est une fibration localement triviale du point de vue topologique, de même C^∞ ou analytique - réel (mais <u>non</u> analytique complexe). De plus la situation est topologiquement indépendante de ϵ,η (je n'ai pas envie de détailler ce qu'il faut entendre exactement par là ...).

Fixons alors $t_o \in D^*$, et soit γ un lacet $[0,1] \to D^*$ d'extrémité t_o et d'indice 1 par rapport à l'origine, (p.ex. $\gamma(\theta) = e^{2\pi i\theta}t_o$); en trivialisant la fibration précédente au dessus de γ , on trouve des automorphismes τ_k des groupes de cohomologie $H^k(X(t_o),\mathbb{C})$ ou même des groupes $H^k(X(t_o),\mathbb{Z})$ qui ne dépendent pas de γ et qui s'appellent "monodromie de la fibration". Rappelons à ce propos le "théorème de monodromie".

<u>Théorème</u> (3.1) 1) <u>Les valeurs propres des</u> τ_k <u>sont des racines de l'unité.</u>
2) <u>Les racines du polynome minimal de</u> τ_k <u>sont de multiplicité</u> $\leq k$.

Il n'est guère facile de donner une référence pour ce théorème qui a fait l'objet de nombreux travaux. La plupart des démonstrations sont écrites dans le cas "global" (= algébrique, propre) et non dans le cas local considéré ici. Une référence possible consiste en une adaptation au cas local des arguments de Deligne [5] .

Ceci posé, désignons par b_f^{exp} le polynome défini ainsi si $b_f(s) = \Pi(s-\alpha_j)$, on pose $b_f^{exp}(s) = \Pi(s - \exp(2\pi i\alpha_j))$. On a le théorème suivant.

<u>Théorème</u> (3.2). <u>Soit</u> P_k <u>le polynome minimal de</u> T_k . <u>Pour tout</u> k , P_k <u>divise</u> b^{exp} .

On peut se demander s'il existe une relation en sens inverse; <u>par exemple</u>, <u>est-il vrai que toute racine</u> de b^{exp} <u>soit une racine d'un des</u> P_k ? Ce résultat est vrai lorsque f a une singularité isolée [B] ; dans ce cas, on a même une expression précise de b en fonction de la connexion de Gauss-Manin de f (loc. cit.). Dans le cas général, le résultat semble très vraisemblable, mais je n'en ai pas de démonstration pour l'instant.

Pour f quelconque, et $k = n-1$, le théorème (3.2) est démontré dans [12] ; la démonstration dans le cas général a été exposée en 1975, dans des conférences à l'Institut Mittag-Leffler (Suède), mais je ne l'ai jamais publiée. On la trouvera au § 4 .

4. Démonstration du théorème (3.2)

(4.1) Rappels sur la connexion de Gauss-Manin.

Les résultats indiqués ici, variantes de résultats antérieurs de Nilsson, Grothendieck, Griffiths, Deligne, etc.., sont dûs à Hamm [6] .

Reprenons les notations du § 3. Soit Ω_X^k le faisceau des formes holomorphes de degré k sur X (pour $k = 0$, on écrit aussi $\Omega_X^o = \mathcal{O}_X$; comme au § 1 , il nous arrivera d'écrire $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{X,o}$) ; $\Omega_X^k[f^{-1}]$ désigne le faisceau des formes méromorphes sur $f = o$; on l'écrira aussi $\Omega_X^k[t^{-1}]$. Le faisceau des k-formes relatives est par définition $\Omega_{X/D}^k = \Omega_X^k[t^{-1}]/df \wedge \Omega_X^{k-1}[t^{-1}]$; on le munit de la "différentielle relative" $d_{X/D}$ déduite de la différentielle extérieure d_X par passage au quotient. On note $\underline{H}^k{}_{X/D}$ le k-ième faisceau de cohomologie du complexe $(f_*(X,\Omega_{X/D}),d_{X/D})$. Comme t commute à $d_{X/D}$ (évident), $\underline{H}^k_{X/D}$ est un module sur $\mathcal{M}_D$, le faisceau des fonctions méromorphes sur D avec 0 comme seul pôle.

D'autre part, pour $t_o \in D^*$, la restriction des formes différentielles à $X(t_o)$ induit une surjection $\Gamma(X,\Omega_{X/D}^k) \to \Gamma(X(t_o), \Omega_{X(t_o)}^k)$ (parce que X est un Stein), et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(X,\Omega^k{}_{X/D}) & \to & \Gamma(X(t_o), \Omega^k{}_{X(t_o)}) \\
{\scriptstyle d_{X/D}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle d_{X(t_o)}} \\
\Gamma(X,\Omega^{k+1}{}_{X/D}) & \to & \Gamma(X(t_o), \Omega^{k+1}{}_{X(t_o)})
\end{array}$$

Les mêmes propriétés sont vraies en remplaçant X par $f^{-1}(U)$, U ouvert de D; en prenant pour U un système fondamental de voisinages de t_o , on en déduit une application $i^*_{t_o}$ de $\underline{H}^k{}_{X/D,t_o}/(t-t_o)\,\underline{H}^k{}_{X/D,t_o}$ dans le k-ième groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(X(t_o),\Omega_{X(t_o)})$ muni de $d_{X(t_o)}$, c'est à dire (Serre) dans $H^k(X(t_o),\mathbb{C})$. Le premier résultat est alors le suivant (Hamm , loc. cit.)

<u>Théorème</u> (4.1.1). <u>$\underline{H}^k{}_{X/D}$ est libre sur $\mathcal{M}_D$, de rang égal à</u> $\dim_{\mathbb{C}} H^k(X(t_o),\mathbb{C})$, <u>et $i^*_{t_o}$ est un isomorphisme.</u>

Le point suivant consiste à voir "comment i^*_t varie en fonction de t ". Soit U un disque ouvert de centre t_o, avec $U \subset D^*$; la fibration $t \mapsto X(t)$ est $\mathcal{C}^\infty$-triviale au dessus de U, d'où un isomorphisme $\varphi : f^{-1}(U) \simeq U \times X(t_o)$, avec $\varphi = id$ au dessus de t_o, unique à isotopie près. Via cet isomorphisme, on a au-dessus de U un isomorphisme du fibré $t \mapsto H^k(X/t)/\mathbb{C})$ avec $U \times H^k(X(t_o),\mathbb{C})$, isomorphisme indépendant de φ, et de même avec H_k au lieu de H^k.
Autrement dit, les $H^k(X(t),\mathbb{C})$, $t \in D^*$, forment un <u>système local</u>; on pourra donc parler de ses "sections horizontales" resp. "holomorphes" (ce seront celles qui seront constantes, resp. holomorphes, localement dans la trivialisation canonique).

Pour voir comment cela se traduit sur $\underline{H}^k{}_{X/D}$, prenons $\alpha \in \Gamma(U,H^k{}_{X/D})$; quitte à rétrécir U, on peut supposer α représenté par un $\omega \in \Gamma(f^{-1}(U),\Omega^k_X)$ tel qu'on ait $d\omega = df \wedge \pi$, $\pi \in \Gamma(f^{-1}(U),\Omega^k_X)$. Prenons d'autre part une famille horizontale $t \mapsto \gamma_t$, $\gamma_t \in H_k(X(t),\mathbb{C})$; on pourra la représenter par une famille de cycles, notée encore γ_t, "constante" dans la trivialisation φ.
Cela étant, on voit facilement (Stokes + Fubini) qu'on a les résultats suivants :

a) $\int_{\gamma_t} \omega$ est holomorphe en t .

b) $\frac{d}{dt}\int_{\gamma_t}\omega = \int_{\gamma_t}\pi$.

Le résultat a) montre que les sections de $\underline{H}^k{}_{X/D}$ sur U correspondent via i^*_t à des sections holomorphes de système local $H^k_f : t \mapsto H^k(X(t),\mathbb{C})$; de là et de théorème (4.1.1) résulte alors facilement ceci : sur D^* , $\underline{H}^k_{X/D}$ est isomorphe (via i_t^*) au faisceau des sections holomorphes de H_f^k .

Pour interpréter b) prenons plus généralement un ouvert $U \subset D$, et prenons $\omega \in \Gamma(f^{-1}(U),\Omega_X^k[t^{-1}])$ vérifiant $d\omega = df \wedge \pi$, avec $\pi \in \Gamma(f^{-1}(U),\Omega_X^k[t^{-1}])$; on a $df \wedge d\pi = 0$. Montrons que ceci entraîne qu'il existe $\Psi \in \Gamma(f^{-1}(U),\Omega_X^k[t^{-1}])$ vérifiant $d\pi = df \wedge \Psi$; comme $f^{-1}(U)$ est un Stein, il suffit de trouver Ψ localement, et ce dernier point résulte du lemme suivant :

<u>Lemme</u> (4.1.2) . <u>Le complexe</u> $(\Omega_X[t^{-1}]\ ,\ df \wedge)$ <u>est acyclique</u> .

Montrons le résultat, p. ex. en 0 ; comme df ne s'annule pas en dehors de $X(0)$; le Nullstellensatz montre qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et des $a_i \in \mathcal{O}_{X,o}$ tels qu'on ait $f^m = \Sigma a_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, ou encore, en posant $\xi = f^{-m}\, \Sigma a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$: $\xi(f) = 1$. Soit alors $\alpha \in \Omega^k_{X,o}[t^{-1}]$, avec $df \wedge \alpha = 0$; on a $0 = i_\xi(df \wedge \alpha) = d\text{-}df \wedge i_\xi\alpha$ (i_ξ le produit intérieur par ξ), d'où le résultat.

Cela étant, la formule $d\pi = df \wedge \Psi$ montre que la classe de π dans $\Gamma(U,\Omega^k_{X/D})$ est un cocyle; nous désignerons par $[\pi]$ la classe de ce cocycle dans $\Gamma(U,\underline{H}^k_{X/D})$; en appliquant à nouveau le lemme précédent, on voit ceci

a) La classe $[\pi]$ ne dépend que de la classe $[\omega]$

b) L'application $\nabla : [\omega] \mapsto [\pi]$ est une $\mathcal{M}_D$-connexion, i.e. est $\mathbb{C}$-linéaire et vérifie, $\forall \varphi \in \mathcal{M}_D$ $\nabla(\varphi[\omega]) = \frac{d\varphi}{dt}\,[\omega]) + \varphi\ \nabla[\omega]$

c) Les sections de $\underline{H}^k_{X/D}$ qui sont horizontales via i_t^* sont celles qui vérifient $\nabla\alpha = 0$

La propriété b) signifie que, dans une base de $\underline{H}^k_{X/D}$ sur $\mathcal{M}_D$, ∇ s'exprime par un système différentiel à singularité polaire en 0 ; il s'appelle connexion (ou système différentiel) de Gauss-Manin. Il est clair, par les constructions précédentes, que sa monodromie est égale à celle de la fibration (X,D,f) .

<u>Théorème</u> (4.1.3) *∇ est à singularité régulière en* 0 .

Pour terminer ces rappels, remarquons ceci (toujours avec les notations du § 3) : prenons $\varepsilon' < \varepsilon$ et $\eta' < \inf(\eta, \eta(\varepsilon'))$, et soit (X', D') la nouvelle fibration obtenue; on sait que, pour $t_o \in D'$, l'injection $X'(t_o) \to X(t_o)$ induit l'identité sur la cohomologie $(X'(t_o)$ est même rétracte par déformation de $X(t_o))$. On en déduit facilement que l'application naturelle de restriction $\underline{H}^k_{X/D}|D' \to \underline{H}^k_{X'/D'}$ est un isomorphisme. En passant à la limite, on voit que $H^*_{X/D,o}$ est encore la cohomologie du complexe de germes $(\Omega_{X/D,o}\ ,\ d_{X/D})$; dans la suite, on utilisera cette remarque pour travailler indifféremment dans les germes en 0 ou dans un système (X,D) fixé.

(4.2) <u>Polynomes de Bernstein-Sato, et connexion de Gauss-Manin.</u>

Nous allons rappeler ici une construction de [13], en reprenant les notations du § 1 . Soit J l'idéal à gauche de $\mathcal{D}[s]$ formé des P qui vérifient $P f^s = 0$, et posons $M = \mathcal{D}[s]/_J$; on peut identifier M à l'ensemble $\mathcal{D}[s]f^s$ des éléments de $\mathcal{O}[s,f^{-1}]f^s$ qui sont de la forme $P(s,x,\partial)f^s$, $P \in \mathcal{D}[s]$; on voit aussitôt que cette identification se prolonge en un isomorphisme $M[f^{-1}] \simeq \mathcal{O}[s,f^{-1}]f^s$.

On définit alors une structure de $\mathbb{C}\{t\}$-module sur M et $M[f^{-1}]$ en posant, pour $\varphi = \Sigma\lambda_p t^t \in \mathbb{C}\{t\}$, $a(s) \in \mathcal{O}[s,f^{-1}]$, $g = a(s)f^s$: $\varphi g = \Sigma\lambda_p\ a(s+p)f^{s+p}$ (on laisse le lecteur vérifier la convergence de cette série, et le fait que, pour $g \in M$, on a $\varphi g \in M)$. Cette structure a les propriétés suivantes

(4.2.1) L'action de $\varphi \in \mathbb{C}\{t\}$ sur Mer $M[f^{-1}]$ commute à celle de $\mathcal{D}$

(4.2.2) On a $(s+1)t = ts$, et, plus généralement, $\varphi s = s\varphi + t\,\dfrac{d\varphi}{dt}$.

Sur $M[f^{-s}]$ (mais non sur M) , l'action de t est une bijection; alors (4.2.2) signifie que, sur $M[f^{-1}]$, l'opérateur $\nabla \underset{\text{déf}}{=} -t^{-1}\,(s+1)$ est une connexion. Enfin, comme t et s commutent à $\mathcal{D}$, ∇ commute aussi à $\mathcal{D}$.

Considérons alors le complexe de de Rham (par rapport aux x) de M ; c'est par définition le complexe

$$DR^\bullet(M) : \quad 0 \to M \xrightarrow{d} M \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} M \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^n \to 0 \quad \text{avec } \Omega^k = \Omega^k_{X,0}$$, et d défini ainsi :

$$\begin{cases} a) \text{ pour } m \in M, \text{ on pose } d_m = \Sigma \dfrac{\partial}{\partial x_i} m \otimes dx_i \\ b) \text{ pour } m \otimes \omega \in M \otimes \Omega^k, \text{ on pose } d(m \otimes \omega) = dm \wedge \omega + md_X\omega . \end{cases}$$

Ses groupes de cohomologie, notés $H^k(M)$ sont munis d'une action de $\mathbb{C}\{t\}$ et d'une action de s qui vérifient encore (2.1) et (2.2), et il en est de même pour $H^k(M[f^{-1}])$; de même les $H^k(M[f^{-1}])$ seront munis d'une structure de $\mathbb{C}\{t\}$ module, avec une connexion déduite de ∇ par passage au quotient, connexion qui sera aussi notée ∇. On a le résultat suivant [13] :

<u>Proposition</u> (4.2.3). <u>On a un isomorphisme de</u> $\mathbb{C}\{t\}$-<u>modules avec connexion</u> :

$$\underline{H}^{k-1}_{X/D,o} \simeq H^k(M[f^{-1}]) .$$

Comme l'expression explicite de cet isomorphisme sera utile par la suite, nous allons rappeler la démonstration de cette proposition. Un élément de $M[f^{-1}] \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^k$ s'écrit $\omega(s)f^s$, avec $\omega(s) \in \Omega^k[f^{-1},s]$ et la différentielle de $DR^\bullet(M[f^{-1}])$ s'écrit alors $d(\omega(s)f^s) = [d_X\omega(s) + s\frac{df}{f} \wedge \omega(s)]f^s$, avec d_X la différentielle usuelle sur les composants homogènes en s ; il revient donc au même d'étudier le complexe $\Omega^\bullet[f^{-1},s]$, muni de la différentielle $\delta\omega(s) = d_X\omega(s) + s\frac{df}{f} \wedge \omega(s)$. Filtrons alors ce dernier complexe par le degré en s ; la partie de degré $+1$ en s de δ est acyclique d'après le lemme (4.1.2). Par suite, la cohomologie de $(\Omega^\bullet[f^{-1},s];\delta)$ est isomorphe à celle de son sous-complexe $A^\bullet$ formé des ω indépendants de s et qui vérifient $\frac{df}{f} \wedge \omega = 0$, ou $df \wedge \omega = 0$. Mais alors l'application $\omega \to df \wedge \omega$ établir un isomorphisme $\Omega^{k-1}_{X/D,0} \xrightarrow{\sim} A^k$, compatible avec les différentielles extérieures. D'où l'isomorphisme cherché. Nous laissons le lecteur vérifier la compatibilité de cet isomorphisme avec l'action de $\mathbb{C}\{t\}$ et celle de ∇.

(4.3) Nous continuons avec les mêmes notations. On a visiblement $M[t^{-1}]=M[f^{-s}]$; comme l'action de t commute à celle de $\mathcal{D}$, on aura donc $H^k(M[f^{-s}]) = H^k(M)[t^{-s}]$; par suite $\bar{H}^k(M) \overset{\text{déf}}{=} H^k(M)/\text{torsion}$ est un sous-module de $H^k(M[f^{-1}])$, dont le satusé par t^{-1} est $H^k(M[f^{-1}])$ tout entier. Enfin l'isomorphisme (4.2.3) et les résultats du n° (4.1) montrent que $H^k(M[f^{-1}])$ est fini sur le corps $\mathcal{M}_{D,0} = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$. Le résultat clef est alors le suivant.

<u>Proposition</u> (4.3.1) <u>$\bar{H}^k(M)$ est fini sur $\mathbb{C}\{t\}$; autrement dit, c'est un réseau de $H^k(M[f^{-1}])$.</u>

Filtrons M par les $M_\ell = \mathcal{D}_\ell[s]f^s$ ($\mathcal{D}_\ell$, les opérateurs différentiels de degré $\leq \ell$) ; le complexe $DR^\bullet(M)$ se filtre ainsi

$$DR^\bullet(M)_\ell : 0 \to M_\ell \xrightarrow{d} M_{\ell+1} \otimes \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} M_{\ell+n} \otimes \Omega^n \to 0$$

(on écrit $\otimes$ pour $\otimes_{\mathcal{O}}$ dans la suite); le gradué associé $gr\, DR^\bullet(M)$ est la somme directe des complexes

$$gr_\ell\, DR^\bullet(M) : 0 \to gr_\ell\, M \xrightarrow{\delta} gr_{\ell+1}\, M \otimes \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \dots \to gr_{\ell+n}\, M \otimes \Omega^n \to 0 \quad .$$

La différentielle δ étant donnée par $\delta(m \otimes \omega) = \Sigma(\xi_j m) \otimes dx_j \wedge \omega$ $\left(\xi_j = gr \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

<u>Lemme</u> (4.3.2). <u>Le complexe $gr_\ell\, DR^\bullet(M)$ est acyclique pour ℓ assez grand.</u>

Ceci se voit par un raisonnement classique sur les complexes de Koszul. Tout d'abord, la multiplication par ξ_j annule la cohomologie de $gr\, DR^\bullet(M)$, à cause de la formule $\xi_j m = i(\frac{\partial}{\partial x_j})\, \delta m + \delta(i(\frac{\partial}{\partial x_j})m)$ (i, le produit intérieur).

D'autre part, $gr\, \mathcal{D}[s]$ est un anneau noethérien , isomorphe à $\mathcal{O}[s,\xi_j]$, et $gr\, M$ est fini sur $gr\, \mathcal{D}[s]$. Donc l'ensemble $Z(gr\, M \otimes \Omega^k)$ des k-cocycles de $gr\, DR^\bullet(M)$ est fini sur $gr\, \mathcal{D}[s]$, donc engendré par des éléments de graduation $< \ell_0$, pour ℓ_0 convenable; alors, si $\ell \geq \ell_0$, et si β est un k-cocycle de $Z(gr\, M_{\ell+k} \otimes \Omega^k)$, on aura $\beta = \Sigma\, \xi_j\, \beta_j$, β_j des cocycles, donc β sera un cobord. D'où le lemme.

Le lemme précédent montre que l'injection $DR^{\bullet}(M)_{\ell} \to DR^{\bullet}(M)$ induit un isomorphisme sur la cohomologie pour ℓ assez grand, disons $\ell \geq \ell_o$. Donc toutes les classes de cohomologie de degré k de $DR^{\bullet}(M)$ pourront être représentées par des cocycles de la forme $\omega(s)f^s = \sum_{(\alpha)=k} P_{\alpha}(s,x,\partial)f^s \otimes dx^{\alpha}$, avec $\deg_{\partial} P^{\alpha} \leq \ell_o + k$; il est clair qu'alors $f^{\ell_o+k}\omega(s)$ n'a pas de pôle; on a $t^{\ell_o+k}(\omega(s)f^s) = \pi(s)f^s$, avec $\pi(s) = f^{\ell_o+k}\omega(s+\ell_o+k)$, donc $\pi(s)$ n'aura pas non plus de pôle. Pour établir la proposition (4.3.1), quitte à remplacer $\overline{H}^k(M)$ par $t^{\ell_o+k}\,\overline{H}^k(M)$, il suffit donc d'établir le résultat suivant.

<u>Proposition</u> (4.3.3). <u>Dans</u> $H^k(M[f^{-1}])$, <u>l'image</u> E <u>des cocycles de la forme</u> $\omega(s)f^s$, $\omega \in \Omega^k[s]$, <u>est un réseau</u>.

Nous allons établir ce résultat par une variante d'un procédé utilisé dans [11] et [12] pour établir la "positivité des exposants caractéristiques". Notons en passant que les raisonnements de [11],p.213-214, peuvent être utilisés tels quels pour établir le théorème de régularité (4.1.3) à partir de (4.1.1); nous ne détaillerons pas ce point.

Soit F l'image de E dans $\underline{H}^{k-1}_{X/D,0}$ par l'isomorphisme (4.2.3). Si l'on explicite cet isomorphisme, on est conduit à la construction suivante : soit $\omega(s)f^s$, $\omega(s) = \omega_{\ell}s^{\ell} + \dots + \omega_o \in \Omega^k[s]$ un cocycle; on a $d_X\omega(s) + s\,\frac{df}{f} \wedge \omega(s) = 0$, d'où en particulier $\frac{df}{f} \wedge \omega_{\ell} = 0$; d'après (4.1.2), on a $\omega_{\ell} = \frac{df}{f} \wedge \pi_{\ell-1}$, $\pi_{\ell-1} \in \Omega^k[s,f^{-1}]$; alors $\omega(s)f^s$ est cohomologue à $\omega'(s)f^s = \omega(s)f^s - d(\pi_{\ell-s}s^{\ell-1}f^s)$; par récurrence, on trouve que $\omega(s)f^s$ est cohomologue à $(df \wedge \Psi)f^s$, $\Psi \in \Omega^{k-1}[f^{-1}]$; on a $df \wedge d\Psi = 0$, donc l'image de Ψ dans $\Omega^{k-1}_{X/T,0}$ est un cocycle; sa classe de cohomologie est l'élément de F cherché.

Prenons maintenant $t_o \in D^*$, $t_o > 0$, et soit $\gamma_{t_o} \in H_{k-1}(X(t_o),\mathbb{C})$; pour $t \in]0,t_o]$, soit γ_t la classe d'homologie déduite de γ_{t_o} le long du chemin $[t,t_o]$. Le théorème de régularité implique notamment que l'intégrale $\int_{\gamma_t} \psi$ est à croissance au plus polynomiale en $\frac{1}{t}$ lorsque $t \to 0$, ce qui permet de définir

$\int_o^{t_o} t^s\, dt \int_{\gamma_t} \psi$, pour s complexe de partie réelle assez grande.

Lemme (4.3.4). L'intégrale $\int_o^{t_o} t^s\, dt \int_{\gamma_t} \psi$ se prolonge en une fonction holomorphe de s pour $\operatorname{Re} s > 0$.

D'après Łojasiewicz [10] , on peut trouver une triangulation semi-analytique $\mathfrak{T}$ de $f^{-1}([0,t_o])$ telle que $X(t_o) = f^{-1}(t_o)$ et $X(0)$ soient des sous-complexes $\mathfrak{T}_o$ et $\mathfrak{T}'$ de $\mathfrak{T}$; on peut alors trouver un cycle $\Gamma(t_o)$ de $\mathfrak{T}_o$ qui représente γ_{t_o} ; comme $f^{-1}([0,t_o])$ a le type d'homotopie de $X(0)$, et que ce dernier est contractile (Milnor, loc.cit.) il existe une chaine $\Delta(t_o)$ de $\mathfrak{T}$ vérifiant $\partial\Delta(t_o) = \Gamma(t_o)$, et l'on peut évidemment supposer qu'aucun des simplexes de $\Delta(t_o)$ n'a son support contenu dans $X(0)$.

Comme $\omega(o)$ n'a pas de pôles, il est intégrable sur $\Delta(t_o)$ (Herrera [7]) , donc l'intégrale $\int_{\Delta(t_o)} \omega(s)f^s$ est définie et holomorphe en s pour $\operatorname{Re} s > 0$. Tout revient donc à établir, pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, l'égalité

$$(4.3.5) \quad \int_{\Delta(t_o)} \omega(s)f^s = \int_o^{t_o} t^s\, dt \int_{\gamma(t)} \Psi + (\text{fonction entière en } s) .$$

Montrons d'abord qu'on a , pour $\operatorname{Re} s$ assez grand

$$(4.3.5') \quad \int_{\Delta(t_o)} \omega(s)f^s = \int_{\Delta(t_o)} \omega'(s)f^s + (\text{fonction entière en } s) .$$

(Observons que l'intégrale du second membre est bien définie pour $\operatorname{Re} s >$ ordre du pôle de ω' , par le même argument que plus haut). Ceci résultera de la "formule de Stokes" .

$$(4.3.6) \quad \int_{\Delta(t_o)} \omega(s)f^s = \int_{\Delta(t_o)} \omega'(s)f^s + \int_{\Gamma(t_o)} \pi_{\ell-1}\, s^{\ell-1} f^s$$, dont le dernier terme s'écrit $t_o^s\, s^{\ell-1} \int_{\Gamma(t_o)} \pi_{\ell-1}$.

Malheureusement, cette formule n'est pas exactement démontrée dans Herrera (loc.cit.) sous les hypothèses qui nous intéressent, mais par exemple pour des formes holomorphes; il serait possible de reprendre les arguments d'Herrera dans notre situation, mais nous allons nous en sortir un peu autrement :

Prenons $t \in]0,t_o[$ et soit $\Delta(t)$ [resp. $\Delta(t,t_o)$] l'ensemble $\Delta(t_o) \cap f^{-1}([0,t])$ [resp. $\Delta(t_o) \cap f^{-1}(]t,t_o])$] ; quitte à remplacer $\mathfrak{T}$ par une subdivision convenable, on peut supposer que $X(t)$ est un sous-complexe de $\mathfrak{T}$; on aura alors $\Delta(t_o) = \Delta' + \Delta''$, les simplexes de Δ' ayant leur support dans $f^{-1}([t,t_o])$ et ceux de Δ'' dans $f^{-1}([0,t])$, et l'on peut supposer qu'aucun simplexe de Δ' n'a son support dans $X(t)$. On aura donc (Lebesgue) $\int_{\Delta(t,t_o)} \omega(s)f^s = \int_{\Delta'} \omega(s)f^s$, d'où par différence $\int_{\Delta(t)} \omega(s)f^s = \int_{\Delta''} \omega(s)f^s$; d'autre part, on a $\partial\Delta' = \Gamma(t_o) - \Gamma(t)$, avec $\Gamma(t)$ à support dans $\Delta(t)$, donc $\Gamma(t)$ représente γ_t . Alors, par Stokes-Herrera, on a

$$\int_{\Delta(t,t_o)} \omega(s)f^s = \int_{\Delta(t,t_o)} \omega'(s)f^s + \int_{\Gamma(t_o)-\Gamma(t)} \pi_{\ell-1}\, s^{\ell-1}\, f^s$$

Faisons tendre t vers 0 . Alors (Lebesgue) les intégrales $\int_{\Delta(t,t_o)}$ tendent vers les intégrales correspondantes sur $\Delta(t_o)$. Pour établir (4.3.6), il suffit donc de montrer que $\int_{\Gamma(t)} \pi_{\ell-1}\, s^{\ell-1}\, f^s = t^s\, s^{\ell-1} \int_{\Gamma(t)} \pi_{\ell-1}$ tend vers 0 pour $\mathrm{Re}\, s \gg 0$. Quitte à multiplier $\pi_{\ell-1}$ par t^m , m convenable, on peut supposer $\pi_{\ell-1}$ sans pôle. Alors (Stokes-Herrera), on a $\int_{\Gamma(t)} \pi_{\ell-1} = \int_{\Delta(t)} d\pi_{\ell-1}$, et, par Lebesgue, le second membre reste borné (et même tend vers 0) lorsque $t \to 0$. Ceci établit (4.3.6) et donc (4.3.5') .

Ensuite, par récurrence, on trouve $\int_{\Delta(t_o)}\omega(s)f^s = \int_{\Delta(t_o)}(df \wedge \Psi)f^s$ + (fonction entière); pour établir le lemme, il suffit donc de voir qu'on a bien $\int_{\Delta(t_o)}(df \wedge \Psi)f^s = \int_0^{t_o} t^s dt \int_{\gamma_t} \Psi$; pour cela, il suffit d'établir qu'on a, pour $0 < t < t_o$

$$(4.3.7)\quad \int_{\Delta(t,t_o)}(df \wedge \Psi)f^s = \int_{t_o}^{t} z^s\, dz \int_{\gamma_t} \Psi$$

(en effet le passage de limite est évident sur le second membre; et, sur le premier, il est analogue aux précédents).

Avec les notations précédentes, le premier membre est égal à $\int_{\Delta'}(df \wedge \Psi)f^s$;

prenons d'autre part une trivialisation de X au voisinage de $f^{-1}([t,t_o])$, qu'on peut supposer analytique réelle, et soit $\bar{\Delta}$ la chaine représentée par $\Gamma(t_o) \times [t,t_o]$ dans cette trivialisation; quitte à raffiner $\mathfrak{T}$ une fois de plus, on peut supposer que $\bar{\Delta}$ est une chaine de $\mathfrak{T}$ et par Fubini, tout revient à démontrer qu'on a $\int_{\Delta-\bar{\Delta}} (df \wedge \Psi)f^s = 0$. Or $\Delta-\bar{\Delta}$ est un cycle de $f^{-1}([t,t_o])$ mod $X(t)$, donc (puisque $f^{-1}([t,t_o])$ se rétracte sur $X(t)$) c'en est un bord ; d'autre part $(df \wedge \Psi)f^s$ est fermée et sa restriction à $X(t)$ est nulle. Ceci établit (4.3.7) et le lemme.

Démontrons enfin (4.3.3). Il suffit d'établir que F est un réseau dans $\underline{H}^{k-1}_{X/D,o}$; on sait, par le théorème de régularité, qu'il existe un nombre fini A de rationnels non congrus mod $\mathbb{Z}$ et un entier $P \geq 0$ tels que, pour tout $\chi \in \underline{H}^{k-1}_{X/D,o}$, on ait lorsque t parcourt $]0,t_o]$ (ou même parcourt le revêtement universel $(\tilde{D}^*,t_o)$ de D^*)

$$(4.3.8) \quad \int_{\gamma_t} \chi = \sum_{\substack{\alpha\in A \\ 0\leq p\leq P}} \varphi_{\alpha,p}\, t^{\alpha}(\log t)^p$$

les $\varphi_{\alpha,p}$ étant méromorphes en 0. D'autre part χ est déterminé par ces expressions lorsque γ_{t_o} parcourt une base B de $H_{k-1}(X(t_o),\mathbb{C})$. Pour démontrer le résultat cherché, il suffit donc de borner les pôles des $\varphi_{\alpha,t}$ lorsque γ_{t_o} parcourt B et que χ parcourt F. Or cela résulte immédiatement de (4.3.4) : plus précisément, on trouve que les exposants qui figurent dans (4.3.8), lorsque $\chi \in F$, seront ≥ -1.

(En fait, ils seront même >-1. Pour le voir, remarquer que le premier membre de (4.3.5), donc le second, a une limite finie si $s \to +0$). Ceci démontre (4.3.3), et par conséquent (4.3.1).

(4.4) <u>Fin de la démonstration.</u>

Observons d'abord que l'équation $P(s+1,x,\partial)f^{s+1} = b(s+1)f^s$ équivaut à $b(s+1)f^s \in tM$, ou encore $b(s+1)M \subset tM$; donc on a la caractérisation suivante :

(4.4.1) $b(s+1)$ est le polynome minimal de l'action de s sur M/tM. Considérons alors la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{t} M \to M/tM \to 0$. La suite exacte de cohomologie de de Rham donne naissance au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H^{k-1}(M/tM) & \to & H^k(M) & \xrightarrow{t} & H^k(M) & \to & H^k(M/tM) & \to \cdots \\
& \downarrow b(s) & & \downarrow b(s) & & \downarrow b(s+1) & & \downarrow b(s+1) & \\
\cdots \to & H^{k-1}(M/tM) & \to & H^k(M) & \xrightarrow{t} & H^k(M) & \to & H^k(M/tM) & \to
\end{array}$$

par suite, on a $b(s+1)\ H^k(M)$ est contenu dans l'image par t de $H^k(M)$; donc, la même propriété sera vraie pour $\bar{H}^k(M) = \bar{H}^k(M)/\text{torsion}$.
D'autre part $\bar{H}^k(M)$ est un réseau de $H^k(M[f^{-1}]) \simeq \underline{H}^{k-1}_{X/D,0}$, et ce réseau est manifestement saturé pour $t\nabla = -(s+1)$. Le théorème (3.2) résulte alors du résultat suivant.

__Proposition__ (4.4.2). __Soient__ E __un espace vectoriel de dimension finie sur__ $\mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$, ∇ __une connexion sur__ E, __à singularité régulière, et__ F __un réseau de__ E __stable par__ t. __Soit__ a __le polynome minimal de l'action de__ $t\nabla$ __sur__ F/tF. __Alors le polynome minimal de la monodromie de__ (∇, E) __divise__ $a^{\exp}$.

(En fait ceci nous montre que le polynome minimal P_k de la monodromie de $\underline{H}^k_{X/D,0}$ divise $\bar{b}^{\exp}$; mais P_k est réel puisqu'il provient d'une action sur $H^k(X(t_o),\mathbb{R})$ et même $H^k(X(t_o),\mathbb{Z})$; donc P_k divise $b^{\exp}$).

La proposition (4.4.2) résulte facilement de la théorie classique de la résolution des équations à singularités régulières (voir par exemple [17]), encore que je ne sais pas s'il existe une référence explicite pour cet énoncé.

__Remarque__ (4.4.3). En fait, le fait que les racines de b soient < 1 montre que les"exposants caractéristiques" des éléments de $\bar{H}^k(M)$ sont > -1. (Ceci se voit en regardant de plus près la démonstration de (4.4.2)); ceci améliore un peu les résultats de (4.3).

B I B L I O G R A P H I E

[1] V.I. ARNOL'D : Remarques sur la méthode de la phase stationnaire (en russe). Uspekhi Mat. Nauk 23.5 (1973) p. 17-45.

[2] M.F. ATIYAH : Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure and Appl.Math. 23 (1970) p. 145-150.

[3] J.N. BERNSTEIN et S.J. GELFAND : Propriétés méromorphes de la fonction P^λ (en russe), Funkt. Analiz, 3.1(1969) p.84-85.

[4] J.N. BERNSTEIN : Prolongement analytique des fonctions généralisées (en russe), Funkt. Analiz 6.4(1972) p.26-40.

[5] P. DELIGNE : Exposés 13 et 14, S.G.A 7 II, Lectures notes in Mathematics, Springer (1970).

[6] H. HAMM : Zur analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lebschetz, Monodromie, thèse, Göttingen, 1975.

[7] M. HERRERA : Integration on a semi-analytic set, Bull. Soc. Math. France 94 (1966) p. 141-180.

[8] P. JEANQUARTIER : Développement asymptotique de la distribution de Dirac, (R. Accad.Sc.Paris t.271 série A (1970) p. 1159-1161.

[9] M. KASHIWARA : B functions and holonomie systems, Inv. Math. 38-1 (1976) p. 33-53.

[10] S. ŁOJASIEWICZ : Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Scuolo Norm.Sup.Pisa, III-18-4(1964) p. 449-474.

[11] B. MALGRANGE : Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Ecole Norm. Sup. 4e série 7-3(1974), p. 405-403.

[12] B. MALGRANGE : Sur les polynomes de I.N. Bernstein, Uspekhi mat. Nauk 29-4(1974) p.81-88, ou seminaire Goulaouic-Schwartz 1973-74,exposé 20.

[13] B. MALGRANGE : Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée, Lect.Notes in Math. n° 459, p.98-119 Springer (1975).

[14] J. MILNOR : Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, 61 Princeton 1968.

[15] M. SATO and T. SHINTANI : On zêta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. USA 69-5(1972).

[16] A.N. VARCHENKO : Polyèdres de Newton et estimations des intégrales oscillantes, Funkt. Analiz, 10-3(1976), p. 13-38.

[17] W. WASOW : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publ. (1965).

[18] Proceedings of the OJI seminar, Publications of the R.I.M.S. 12 supplement (1977), Kyoto.