ALDO ANDREOTTI
MAURO NACINOVICH

Domaines de régularité pour les opérateurs elliptiques à coefficients constants (une fonction inconnue)

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 26
« Conférences de : A. Andreotti, A. Koranyi, J.L. Lebowitz, L. Michel et R. Teman », , exp. nº 1, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__26__1_0>

DOMAINES DE REGULARITE POUR LES OPERATEURS ELLIPTIQUES A COEFFICIENTS CONSTANTS (une fonction inconnue)

par

Aldo ANDREOTTI et Mauro NACINOVICH
(Université de Pise, Italie)

1. Préliminaires et rappels.

a) Soit $A_o(D)$ $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ une matrice $p \times q$ d'opérateurs différentiels à coefficients constants sur R^n :

$$A_o(D) : \mathcal{E}^q(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^p(\Omega)$$

$\forall \, \Omega$ ouvert dans R^n . $\mathcal{E}(\Omega)$ = fonctions C^∞ sur Ω .

Nous ferons l'hypothèse que A_o est un opérateur elliptique c'est-à-dire $\forall \, \Omega$ ouvert de R^n $\forall \, u \in \mathcal{D}'(\Omega)^q$ (1) telle que $A_o(D)u = 0$; on a $u \in \mathcal{Q}(\Omega)^q$, où $\mathcal{Q}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions analytiques réelles (à valeurs complexes) sur Ω .

De l'exposé précédent, nous savons que $\forall \, \Omega \subset R^n$ on peut parler de son enveloppe de régularité $\tilde{\Omega} \xrightarrow{\pi} R^n$. Ceci est un domaine étalé sur R^n et contenant Ω , le plus grand possible sur lequel toutes les solutions de $A_o \, u = 0$ dans Ω peuvent s'étendre.

Rappelons aussi la caractérisation des domaines Ω qui coincident avec leurs enveloppes de régularité au moyen du théorème (analogue du théorème de) Cartan Thullen :

---

(1) $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .

Un ouvert $\Omega \subset R^n$ coincide avec son enveloppe si et seulement si : pour $\forall$ suite $\{x_\nu\} \subset \Omega$, dont la distance au bord tend vers zéro, il existe $u \in \mathcal{Q}(\Omega)^q$ avec $A_o u = 0$ et telles que :

$$\sup | u(x_\nu) | = \infty .$$

b) Rappelons aussi que si l'on envisage le plongement naturel $R^n \longrightarrow C^n$ (où $z_j = x_j + iy_j$ sont les coordonnées holomorphes, de sorte que $R^n = \{\mathrm{Im}\, z_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n\})$, on peut considérer l'opérateur $\bar\partial$ - suspendu $A = A_o \oplus \bar\partial$:

$$\mathcal{E}^q(\tilde\Omega) \begin{array}{l} \xrightarrow{A_o(\frac{\partial}{\partial z})} \mathcal{E}^p(\tilde\Omega) \\ \qquad\qquad \oplus \\ \xrightarrow{\bar\partial} (\mathcal{E}^{o1}(\Omega))^q \end{array} \qquad \forall\, \Omega \text{ ouvert de } C^n$$

C'est l'opérateur obtenu en adjoignant aux équations précédentes dans C^n les équations de Cauchy-Riemann. On a vu que, étant donné $\Omega \subset R^n$, il existe un voisinage ouvert U de Ω dans C^n Ω - connexe et tel que si

$$\mathcal{H}(U) = \{ u \in \mathcal{E}^q(U) | \, A u = 0 \}$$

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{E}^q(\Omega) | \, A_o u = 0 \}$$

l'application naturelle de restriction

$$\tau_\Omega^U : \mathcal{H}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

Soit $\tilde U \xrightarrow{\tilde\pi} C^n$ l'enveloppe de régularité de U pour l'opérateur suspendu A . Soit $\tilde\Omega_1 = \tilde\pi^{-1}(R^n)$ la partie de $\tilde U$ au-dessus de R^n et $F_{\mathcal{H}(\Omega)} : \Omega \longrightarrow \tilde\Omega_1$ la section naturelle donnée par les fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $\tilde\Omega$ est la composante connexe de $F_{\mathcal{H}(\Omega)}(\Omega)$ dans $\tilde\Omega_1$ alors $\tilde\Omega \xrightarrow{\pi} R^n$, $\pi = \tilde\pi | \Omega_1$, avec la section naturelle $F_{\mathcal{H}(\Omega)} : \Omega \longrightarrow \tilde\Omega$ est l'enveloppe de régularité de Ω par rapport à A_o .

Il s'en suit que l'étude des domaines de régularité de A_o se réduit à l'étude des domaines de régularité pour l'opérateur $\bar{\partial}$ - suspendu $A = A_o \oplus \bar{\partial}$.

Remarquons qu'un opérateur $\bar{\partial}$ - suspendu A est forcément elliptique (même si l'opérateur de départ ne l'est pas) .

<u>Dans la suite nous nous bornerons pourtant à considérer seulement des opérateurs $\bar{\partial}$ - suspendu.</u>

c) Soit donc A un opérateur différentiel à coefficients constants $\bar{\partial}$ - suspendu.

On a vu qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine de régularité (c'est-à-dire coincide avec son enveloppe) si et seulement si $\forall$ suite $\{z_v\} \subset \Omega$ divergente et dont la distance au bord tend vers zéro, il existe $u \in \mathcal{E}(\Omega)^q$, $Au = 0$, telle que

$$\sup |u(z_v)| = \infty .$$

Un tel domaine est pourtant un domaine d'holomorphie au sens usuel du mot mais <u>de nature particulière</u> .

= Nous nous proposons d'investiguer les particularités que présente un domaine de régularité pour A par rapport aux domaines d'holomorphie généraux.

= Nous nous bornerons à l'étude des opérateurs A agissant sur une seule fonction inconnue u i.e. tels que $q = 1$. Les équations $Au = 0$ ont donc la forme

$$(*) \begin{cases} \psi_1(\frac{\partial}{\partial z})\, u = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_\ell(\frac{\partial}{\partial z})\, n = 0 \\ \bar{\partial} u = 0 \end{cases}$$

où les $\psi_i(\xi_1 \ldots \xi_n)$ sont des polynômes et où $\frac{\partial}{\partial z} = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$.

2. Systèmes surdéterminés à une seule fonction inconnue.

a) Généralités. Soit donc donné le système (*) de tout à l'heure dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $\mathfrak{b} = \mathbb{C}[\xi,\dots,\xi_n](\psi_1(\xi),\dots,\psi_\ell(\xi))$ l'idéal engendré par les polynômes ψ_j $1 \le j \le \ell$, sur l'anneau $\mathbb{C}[\xi,\dots,\xi_n]$.

Soit

$$V(\mathfrak{b}) = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \psi_1(\xi) = \dots = \psi_\ell(\xi) = 0\}$$

la variété des zéros de l'idéal $\mathfrak{b}$ (Variété caractéristique).

A côté de l'idéal $\mathfrak{b}$ envisageons l'idéal homogène $\mathfrak{a}$ dans l'anneau gradué $\mathbb{C}_o[\xi_1,\dots,\xi_n]$ des polynômes homogènes à n variables constitué par les parties homogènes $\not\equiv 0$ de degré maximal des éléments de $\mathfrak{b}$.

Nous appellerons $\mathfrak{a}$ l'idéal asymptotique de $\mathfrak{b}$ et sa variété de zéros

$$V(\mathfrak{a}) = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid g(\xi) = 0 \quad \forall\, g \in \mathfrak{a}\}$$

la variété asymptotique de la variété caractéristique $V(\mathfrak{b})$. Cette variété n'est rien d'autre que le cône projectant de l'origine la variété $W(\mathfrak{a})$ des points à l'infini de $V(\mathfrak{b})$; c'est bien le cône des droites asymptotiques à $V(\mathfrak{b})$ issues de l'origine. A remarquer que

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\mathfrak{b}) = \dim_{\mathbb{C}} V(\mathfrak{a}) = \dim_{\mathbb{C}} W(\mathfrak{a}) + 1 .$$

b) Le Cas homogène à variété caractéristique de dimension 1. Le cas plus simple et en même temps non banal est le cas d'un idéal $\mathfrak{b}$ homogène coincidant avec son radical et à variété caractéristique de dimension un :

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \;,\; \dim_{\mathbb{C}} V(\mathfrak{a}) = 1 .$$

Dans ce cas, la variété $V(\mathfrak{a})$ est un cône projetant de l'origine un nombre fini de points $a^{(1)},\dots,a^{(k)}$ dans l'hyperplan à l'infini

$\mathbb{P}_{n-1}(\mathbf{C})$: $W(\alpha) = a^{(1)} \cup \ldots \cup a^{(k)} \subset \mathbb{P}_{n-1}(\mathbf{C})$.

Pour chacun des points $a^{(s)} \in W(\alpha)$ envisageons la projection

$$\pi_s : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$$

donnée par

$$\pi_s(\xi, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)} \xi_i$$

et soit $\mathcal{O}_s = \pi_s^* \mathcal{O}$ l'image réciproque par π , sur $\mathbf{C}^n$ du faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.

Un raisonnement de nature algébrique simple démontre le théorème suivant :

THEOREME. Soit $\mathcal{H}$ le faisceau des germes des solutions du système (*) sous les hypothèses spécifié plus haut. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \coprod \mathcal{O}_s \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

où $\alpha(f_1 \oplus \ldots \oplus f_k) = \Sigma f_i$ et où W est un faisceau localement isomorphe à une somme finie du faisceau constant $\mathbf{C}$: $W = \mathbf{C} \oplus \ldots \oplus \mathbf{C}$.

Par exemple : le système d'équations dans $\mathbf{C}^2$

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} u = 0 \\[2ex] \bar{\partial} u = 0 \end{cases}$$

donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{O}_i$ est le faisceau des germes de fonction holomorphes en z_i $(i = 1,2)$ seulement.

A noter que le système (*) envisagé à moins d'une transformation linéaire dans $\mathbb{C}^2$ peut être considéré aussi comme la $\bar{\partial}$ - suspension de l'équation de Laplace en deux variables.

COROLLAIRE 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ convexe et simplement connexe (par exemple soit Ω convexe) . Alors

a) son enveloppe de régularité est le domaine

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{s=1}^{k} \pi_s^{-1}\pi_s(\Omega)$$

(donc si Ω est convexe $\tilde{\Omega}$ est aussi convexe)

b) tout domaine de la forme précédente est un domaine de régularité.

COROLLAIRE 2. Pour $\forall\, z_o \in \tilde{\Omega}$ il existe un compact $K = K(z_o) \subset \Omega$ et une constante $c(z_o) > o$, tels que $\forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ on a

$$|u(z_o)| \leq c(z_o)\|u\|_K$$

(L'application $\mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$ étant surjective et continue est ouverte, donc un isomorphisme topologique) .

Exercice : soit $\Omega = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 2\}$. Soit Δ l'opérateur de Laplace en deux variables. Soit u définie sur Ω et harmorique, $\Delta u = 0$. Démontrer que u s'étend en une fonction de $\mathbb{C}^2$ holomorphe dans la région

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < 2(1 - x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 < 2(1 + x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{array}\right. \quad \text{(lentille de Lie)} ,$$

où $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ sont les coordonnées holomorphes sur $\mathbb{C}^2$.

c) Le Cas général. Pour raisons de simplicité on va supposer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$. Nous cherchons son enveloppe de régularité par rapport au système $(*)$. La conjecture naturelle est la suivante.

Pour $\forall\, a \in V(\Omega) - \{0\}$ ($V(\alpha)$ = variété asymptotique) envisageons la projection $\pi_a : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ donnée par

$$\pi_a(\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

Soit

$$\tilde{\Omega} = \overbrace{\cap\, \pi_a^{-1}\, \pi_a(\Omega)}^{\circ} \quad \text{(donc } \tilde{\Omega} \text{ est aussi convexe)}$$

Si $\mathcal{H}$ est le faisceau de germes de solution du système $(*)$ alors on a que la restriction naturelle

$$\mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme et que $\tilde{\Omega}$ est l'enveloppe de régularité de Ω par rapport au système $(*)$. La démonstration de ce fait s'obtient par les considérations suivantes :

α) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ à frontière de classe C^2 :

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n | \Phi(z) < 0\} ,$$

où $\Phi : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ est de classe C^2 et $d\Phi \neq 0$ sur $\partial\Omega$.

Pour tout point $z_o \in \partial\Omega$ envisageons le gradient complexe de Φ

$$\mathrm{grad}_z \Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}(z_o),\dots, \frac{\partial\Phi}{\partial z_n}(z_o)\right)$$

on obtient une application

$$\tau_\Phi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{C}^n$$

On définit l'ensemble caractéristique de $\partial\Omega$ comme l'ensemble

$$\tau_\Phi^{-1}(V(\alpha))$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de la fonction Φ définissant Ω ni du choix des coordonnées locales holomorphes.

β) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $a \in \partial\Omega$ un point de la frontière de Ω où elle est de classe C^2.

Si a est non caractéristique il existe un voisinage $V(a)$ de a dans $\mathbb{C}^n$ tels que la restriction

$$\mathcal{H}(\Omega \cup V(a)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

La preuve de ce fait fondamental s'obtient des remarques suivantes :

(i) Le fait que $a \in \partial\Omega$ est non caractéristique reflet le fait que dans l'idéal $\mathfrak{b}$ il existe un polynôme P de Cauchy-Kowelewska en la direction $\operatorname{grad}_z \Phi(a)$: cela veut dire qu'en prenant a à l'origine, $\mathbb{C} \operatorname{grad}_z \Phi(a)$ comme axe t, et désignant par $z_1, \dots z_{n-1}$ les autres variables, P est de la forme

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ |\alpha| \leq m \\ \beta < m}} C_{\alpha\beta} \frac{\partial^{|\alpha|+\beta} u}{\partial z^\alpha \partial t^\beta} .$$

On peut supposer que $t = 0$ est l'espace analytique tangent à $\partial\Omega$ au point $a = 0$ de sorte que Ω se trouve, au moins en partie, du côté $\operatorname{Re} t < 0$.

(ii) Etant donnée une équation de Cauchy-Kowelewska

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \beta < m}} C_{\alpha\beta} \frac{\partial^{|\alpha|+\beta} u}{\partial z^\alpha \partial t^\beta} + f(z,t) ,$$

où f est holomorphe pour $\|z\| < | \quad |t| < 1$; étant données des conditions initiales

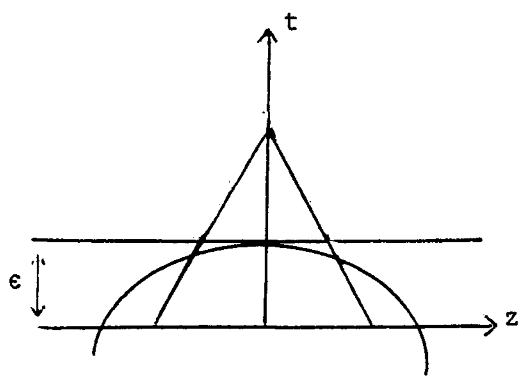
$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right|_{t=0} = v_s(z) \qquad 1 \leq s \leq m-1$$

holomorphes dans un polycylindre $\|z\| < R < 1$; alors il existe une solution unique de l'équation donnée satisfaisant aux conditions initiales et holomorphes dans la région

$$|t| < c\ (R - \|z\|)$$

où $0 < c < 1$ est une constante qui dépend seulement de $\sup|C_{\alpha\beta}|$ (et non de f).

(iii) Translatons la polynôme p en remplaçant t par $t' = t + \epsilon$ de sorte que $t' = 0$ coupe Ω dans une région ouverte non vide et contenant un



z-polycylindre $\|z\| < R(\epsilon)$. On vérifie facilement que $R(\epsilon) = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ (1) de sorte que pour ϵ suffisamment petit le domaine d'existence de la solution couvre le point $(t = 0,\ z = 0)$. De là le fait énoncé en $\beta)$ se déduit immédiatement.

γ) Avant de terminer la preuve, on remarque que la condition $\Phi \in C^2$ au point $a \in \partial\Omega$ peut être affaiblie dans ce qui précède avec la condition

(i) $\Phi \in C^1$ au voisinage de a

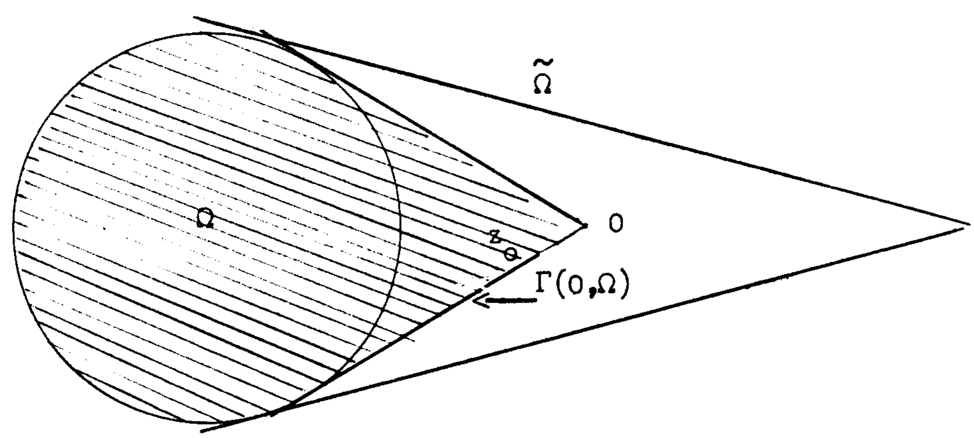
(ii) dans un voisinage de a il existe un nombre fini de fonctions de classe C^2 $\Phi_1,\ldots,\Phi_\ell$ telles que $\Phi = \sup(\Phi_1,\ldots,\Phi_\ell)$.

δ) Soit donc Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ et supposons d'abord $\partial\Omega$ de classe C^2. Soit

$$\tilde{\Omega} = \text{Intérieur de } \Big(\bigcap_{a \in V(\mathfrak{a}) - \{0\}} \pi_a^{-1}\pi_a(\Omega) \Big)$$

Alors $\tilde{\Omega}$ est aussi convexe et pour $z_o \in \tilde{\Omega}$ donné, on peut trouver un point $0 \in \tilde{\Omega}$ près de z_o tel que l'enveloppe convexe $\Gamma(0,\Omega)$ de 0 et Ω contient z_o et soit contenue dans Ω : $\Gamma(0,\Omega) \subset \tilde{\Omega}$. On peut supposer que 0 est l'origine de $\mathbb{C}^n$.

(1) C'est ici qu'on utilise l'hypothèse que Φ est de classe C^2 ; pour les autres considérations Φ de classe C^1 suffit.



Soit alors $\Omega(\mu) = \bigcup_{\mu \leq \lambda 1} \lambda\Omega$ pour $0 < \mu < 1$. Si μ est suffisamment petit alors $\Omega(\mu)$ contient z_o à l'intérieur. De plus

(i) la partie de $\partial\Omega \subset$ Intérieur de $\Gamma(0,\Omega)$ est non caractéristique (car chaque point de cette partie admet un voisinage sphérique $\subset \Gamma(0,\Omega) \subset \tilde{\Omega}$) .

(ii) $\forall\ \mu_o$ $0 < \mu_o < 1$ il existe $\epsilon > 0$ $0 < \mu - \epsilon$ tel que , si $|\mu - \mu_o| < \epsilon$,

$$\mathcal{H}(\Omega(\mu - \epsilon)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega(\mu))$$

car $\partial\Omega(\mu)$ est C^1 et satisfait aux conditions spécifiées dans (γ) et donc on peut appliquer le principe établi en (β) .

On a donc

$$\mathcal{H}(\Omega(0)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$$

et donc dans le cas envisagé on a bien un isomorphisme

$$(**) \qquad \mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\Omega)$$

ϵ) Si on laisse tomber l'hypothèse $\partial\Omega \subset C^2$ on conclut avec l'isomorphisme (**) par un argument d'approximation de Ω de son intérieur par des ouverts convexes à bord C^∞ .

ξ) Il reste à démontrer que $\tilde{\Omega}$ et l'enveloppe de régularité de Ω coincident.

Pour cela, il suffit de prouver que $\forall\, z_o \in \partial\tilde{\Omega}$ on peut construire une fonction $u \in \mathcal{H}(\Omega) \simeq \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ qui ne peut pas se prolonger analytiquement au-dessus de z_o. Ceci se fait avec un argument classique de construction de "nullsolution" d'un problème de Cauchy (cf le livre de Hörmander , page 121)

L'argument précédent nous donne un certain nombre de conséquences intéressantes que nous formulons comme corollaires.

COROLLAIRES 1. Soit Ω un domaine de régularité et Φ une fonction définissant le bord de Ω et qui soit de classe C^2 sur une portion $\Sigma \subset \partial\,\Omega$.

Alors $\forall\, g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ (l'idéal asymptotique) on a

$$g(\mathrm{grad}_z \Phi(\sigma)) = 0 \;\forall\, \sigma \in \Sigma$$

c'est-à-dire Σ est toute de point caractéristique.

COROLLAIRE 2. Si Ω est un domaine de régularité borné, alors $\partial\Omega$ ne peut pas être de classe C^2 partout que dans le cas où $\mathfrak{a} = 0$, c'est-à-dire dans le cas du (seul) système d'équation, de Cauchy-Riemann.

COROLLAIRE 3 Soit Ω ouvert convexe et $\tilde{\Omega}$ comme tout à l'heure, alors $\forall\, z_o \in \tilde{\Omega}$ il existe un compact $K = K(z_o)$ dans Ω et une constante $c(z_o) > 0$ tels que $\forall u \in \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ on a

$$|u(z_o)| \leq c(z_o)\, \|u\|_K \;.$$

3. La distance au bord dans un domaine de régularité.

a) Soit

$$\|z\| = \Big(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$ et soit $B = \{ z \in \mathbb{C}^n |\ \|z\| < 1\}$ la boule unité. Envisageons son enveloppe de régularité

$$\tilde{B} = \operatorname{Int}. \bigcap_{a \in V(\mathfrak{a})-\{0\}} \pi_a^{-1}\pi_a(B)$$

$$= \operatorname{Int}\{z \in \mathbb{C}^n |\ |\Sigma a_i z_i| \leq \|a\| \ , \ \forall\ a \in V(\mathfrak{a})\}$$

On remarque alors que si $z_o \in \partial\tilde{B} \cap \partial B$ alors forcément $\bar{z}_o \in V(\mathfrak{A})$ et $\|z_o\| = 1$.

b) Soit à présent Ω un ouvert de régularité pour le système $(*)$. Pour tout $z \in \Omega$ posons

$$d(r,\partial\Omega) = \inf_{w \in \partial\Omega} \|z-w\|$$

Alors $d(r,\partial\Omega)$ est une fonction continue et lipschitzienne (de constante de Lipschitz = 1 . Donc elle admet des dérivées partielles presque partout dans Ω et elle est presque partout différentiable (th. de H. Rademacher), et celles-ci coincident avec ses dérivées au sens des distributions.

Soit $z_o \in \Omega$ et $r = d(z_o,\partial\Omega)$ ceci signifie que $z_o + rB \subset \Omega$. Comme Ω est un ouvert de régularité, il en découle que $z_o + r\tilde{B} \subset \Omega$. Il existe donc un point $w \in \partial\Omega$ tel que $\frac{w-z_o}{r} \in \partial\tilde{B} \cap \partial B$ donc $\overline{w-z_o} \in V(\mathfrak{a})$.

Si au point z_o $d(z,\partial\Omega)$ admet des dérivées partielles, alors on doit avoir

$$\operatorname{grad}_z d(z_o,\partial\Omega) \in V(\mathfrak{a})$$

On a donc démontré le théorème suivant :

THEOREME. <u>Soit</u> Ω <u>un domaine de régularité. La distance</u> $d(z) = d(z,\partial\Omega)$ <u>d'un point</u> z <u>de</u> Ω <u>du bord de</u> Ω <u>est une fonction lipchitzienne (de constante de Lipschitz</u> = 1). <u>Elle admet des dérivées partielles presque partout et</u> $\forall\ g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ <u>on doit avoir</u>

$$g(\operatorname{grad}_z d) \equiv 0 .$$

Remarque : On peut remplacer $d(z)$ avec la fonction $-\log d(z) = \delta(z)$ et on a les mêmes conclusions.

Ceci nous montre bien les particularités que présentent les domaines de régularité de (*) par rapport aux domaines d'holomorphie généraux.

c) Supposons que, au voisinage d'un point $z_o \in \Omega$ la fonction $d(z)$ soit de classe C^2. Ceci est par exemple le cas en dehors d'un ensemble maigre de Ω si $\partial\Omega$ est différentiable par morceaux. Alors on a le théorème suivant :

THEOREME. Soit Ω un domaine de régularité.

Soit $\delta(z) = -\log d(z)$ de classe C^2 au voisinage d'un point $z_o \in \Omega$.

Soit $L = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}(\mathrm{grad}_z \delta(z_o)) \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} \mu_\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}$ avec $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ et $\mu_\beta \in \mathbb{C}$ $1 \leq \beta \leq n$. Alors $L\bar{L}$ est un opérateur différentiel à coefficient constant du second ordre. On a $\forall g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $\forall \mu \in \mathbb{C}^n$

$$(L\bar{L}\delta)(z_o) \geq 0 ,$$

Preuve : Des relations

$$g\left(\frac{\partial\delta(z)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\delta(z)}{\partial z_n}\right) \equiv 0 \quad \forall g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$$

on déduit par différentiation les relations

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}(z_o)\right) \frac{\partial^2\delta(z_o)}{\partial z_\alpha \partial z_\gamma} = 0 \quad 1 \leq \gamma \leq n$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_\alpha}\left(\frac{\partial\delta}{\partial z}(z_o)\right) \frac{\partial^2\delta(z_o)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\gamma} = 0 \quad 1 \leq \gamma \leq n .$$

Il en résulte que $(L\bar{L}\rho)(z_o) = \Sigma\, \mu_\alpha \bar{\mu}_\beta \dfrac{\partial^2\delta(z_o)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}$. Mais ceci est ≥ 0 car Ω est un domaine d'holomorphie et que le logaritme de la distance au bord, changé de signe, est une fonction plurisousharmonique.

On reconnaît ici une forme renforcée de la plurisousharmonicité du $-\log$ de la distance au bord.