Recherche Coopérative sur Programme nº 25

A. Connes

Quelques aspects de la théorie des algèbres d'opérateurs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1977, tome 24
« Conférences de : A. Andreotti, A. Connes, D. Kastler, P. Lelong, J.E. Roberts et G. Velo. Un texte proposé par W. Laskar », , exp. nº 2, p. 13-87
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1977__24__13_0>

QUELQUES ASPECTS DE LA THEORIE DES ALGEBRES D'OPERATEURS

par

A. CONNES

INTRODUCTION.

Cet exposé est une revue rapide de quelques aspects de la théorie des algèbres d'opérateurs. Bien entendu un grand nombre de sujets y sont insuffisamment développés, comme la dualité de M. Takesaki ou la théorie de W. Krieger. Nous espérons pouvoir les inclure plus tard dans une forme plus développée de ce texte. Nous avons essayé d'insister à la fois sur les origines de ce sujet, qui débute réellement vers 1936 avec les articles de Murray et von Neumann (paragraphe I) et sur les grandes lignes de développement plus récentes, telles en particulier la théorie de l'intégration non commutative de Tomita et Takesaki (paragraphe IV) et la théorie ergodique non commutative (paragraphe VII). L'étude des facteurs de type III_λ est une excellente motivation pour la théorie ergodique non commutative et pour le problème des facteurs de type II_∞ ayant la propriété d'approximation (paragraphe VIII) de sorte que l'ordre logique du texte nous semble assez simple pour que le lecteur puisse avoir, en le parcourant rapidement, une idée d'ensemble de la théorie des algèbres d'opérateurs.

Le contenu du texte est divisé en paragraphes :

I. Les articles de Murray et von Neumann.

II. Les algèbres stellaires, topologie non commutative.

III. Représentations des algèbres stellaires.

IV. Le cadre de l'intégration non commutative et la théorie de Tomita-Takesaki.

V. Facteurs de Powers, Araki et Woods, et Krieger.

VI. Facteurs de type III_λ .

VII. Théorie ergodique non commutative.

VIII. Algèbres de von Neumann moyennables.

IX. Classification des facteurs moyennables et le problème III_1 .

I. LES ARTICLES DE MURRAY ET VON NEUMANN.

Soient $\mathfrak{h}$ un espace hilbertien complexe et $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ l'algèbre stellaire des opérateurs bornés de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$. C'est une algèbre de Banach munie de la norme $\|T\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|T\xi\|$ et de l'involution $T \to T^*$ définie par :

$$<T^*\xi,\eta> = <\xi,T\eta> , \ \forall\ \xi,\eta\in \mathfrak{h} , \text{ on a : } \quad \|T^*T\| = \|T\|^2 , \ \forall\ T\in \mathcal{L}(\mathfrak{h}) .$$

Même si $\mathfrak{h}$ est de dimension dénombrable, l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ n'est pas de type dénombrable. Il existe un unique sous-espace fermé du dual $\mathcal{L}(\mathfrak{h})^*$ dont $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ est le dual. Il s'agit de l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ qui s'écrivent :

$$L(T) = \text{Trace } (\rho T) \quad \forall\ T\in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$$

où ρ est un opérateur à trace, ce qui signifie que $|\rho| = (\rho^*\rho)^{\frac{1}{2}}$ vérifie $\Sigma < |\rho|\xi_i,\xi_i > = \text{Trace } |\rho| < \infty$ pour toute base orthonormale de $\mathfrak{h}$. La norme de la forme linéaire L est égale à Trace $|\rho|$, et muni de cette norme l'espace $\mathcal{L}(\mathfrak{h})_* = \{\rho\in \mathcal{L}(\mathfrak{h}) \text{ , Trace } |\rho| < \infty\}$ est un espace de Banach, le <u>prédual</u> de l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$.

Quand $\mathfrak{h}$ est de dimension dénombrable, l'espace $\mathcal{L}(\mathfrak{h})_*$ est de type dénombrable ; la dualité entre $\mathcal{L}(\mathfrak{h})_*$ et $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ est exactement analogue à la dualité entre $\ell^1(A)$ et $\ell^\infty(A)$ où A est un ensemble. En particulier, dès que $\mathfrak{h}$ est de dimension infinie, l'espace $\mathcal{L}(\mathfrak{h})_*$ n'est pas réflexif et la topologie

$\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ n'est pas compatible avec la topologie normique de $\mathcal{L}(h)$. Ainsi, il est beaucoup plus restrictif, pour un sous-espace de $\mathcal{L}(h)$, d'être fermé pour $\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ que pour la topologie normique.
Cette distinction entre ces deux topologies est essentielle pour la suite.
Soit alors M une sous algèbre involutive de $\mathcal{L}(h)$, contenant l'unité 1 , les conditions suivantes sont équivalentes :

Condition topologique M est $\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ fermée

Condition algébrique M est égale au commutant $(M')'$ de son commutant M' .
(Le commutant d'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{L}(h)$ est défini par l'égalité

$$\mathcal{S}' = \{T\in\mathcal{L}(h) \ , \ TS = ST \quad \forall\, S\in\mathcal{S}\}) \ .$$

L'équivalence entre ces deux propriétés est le théorème du bicommutant de von Neumann.

DEFINITION 1. - Une algèbre de von Neumann M dans h est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(h)$ contenant l'unité et vérifiant les conditions équivalentes ci-dessus.

Citons quelques conséquences immédiates de la définition.
Soit $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}(h)$ une partie telle que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* = \{T^*, T\in\mathcal{S}\}$ alors le commutant $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est une algèbre de von Neumann.
Soit M une algèbre de von Neumann dans h et $M_1 = \{T\in M\ ,\ \|T\|\leq 1\}$ la boule unité de M , alors comme M_1 est $\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ fermé dans la boule unité du dual de $\mathcal{L}(h)_*$, c'est un compact quand on le munit de la topologie $\sigma(M_1,\mathcal{L}(h)_*)$. En particulier M est le dual d'un espace de Banach M_* , qui est en fait l'unique sous-espace (fermé) de M^* dont M soit le dual - ([41]).
On introduit souvent sous le nom de topologie faible la topologie sur $\mathcal{L}(h)$ provenant de la dualité avec le sous-espace de $\mathcal{L}(h)_*$ formé des opérateurs de

rang fini, i.e. la topologie caractérisée par :

$$T_\alpha \to T \Leftrightarrow \forall\ \xi,\eta \in h \text{ on a } \langle T_\alpha \xi,\eta\rangle \to \langle T\xi,\eta\rangle .$$

Elle est moins fine que $\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ et comme l'espace des opérateurs de rang fini est dense en norme dans $\mathcal{L}(h)_*$ elle coïncide avec $\sigma(\mathcal{L}(h),\mathcal{L}(h)_*)$ sur les parties bornées de $\mathcal{L}(h)$. La terminologie "topologie faible" n'est cependant pas bonne, il s'agit de la topologie de la convergence simple faible.

Les algèbres de von Neumann sont les sous-algèbres involutives de $\mathcal{L}(h)$ contenant 1 qui sont fermées pour la topologie de la convergence simple faible, puisque tout commutant $\mathcal{S}', \mathcal{S} \subset \mathcal{L}(h)$ a cette propriété.

Exemples d'algèbres de von Neumann.

1. Algèbres de von Neumann abéliennes.

La description de cet exemple nous permettra de donner la forme abstraite du théorème spectral et du calcul fonctionnel borélien. Soient (X,B,μ) un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité μ, et $\pi(L^\infty(X,\mu))$ l'algèbre des opérateurs de $L^2(X,\mu)$ dans $L^2(X,\mu)$ définie par :

$$\pi(f)g = fg \qquad f \in L^\infty,\ g \in L^2 .$$

Alors $M = \pi(L^\infty)$ est une algèbre de von Neumann commutative et on a en fait $M = M'$. Le prédual de M est l'espace $L^1(X,\mu)$. Soit alors $x \to n(x)$ une fonction borélienne de X dans $\{1,2,\ldots,\infty\}$ et $(\tilde{X},p)$ le revêtement borélien de X défini par :

$$\tilde{X} = \{(x,j) \in X \times \mathbb{N},\ 1 \le j \le n(x)\},\ p(x,j) = x .$$

A la fonction "multiplicité" n on associe la représentation π_n de $L^\infty(X,\mu)$ dans $L^2(\tilde{X},\tilde{\mu})$ $(\int f(x,j)d\tilde{\mu} = \int \sum_j f(x,j)d\mu)$ donnée par :

$$\pi_n(f)g = (f\circ p).g .$$

L'image $M = \pi_n(L^\infty(X,\mu))$ est une algèbre de von Neumann commutative dans l'espace

$h = L^2(\tilde{X},\tilde{\mu})$ et si $n \not\equiv 1$ on a $M' \not\subset M$.

DEFINITION 2. - <u>Soit</u> $M_i, i = 1,2$ <u>une algèbre de von Neumann dans</u> $h_i, i = 1,2$; <u>on dit que</u> M_1 <u>est spatialement isomorphe à</u> M_2 <u>quand il existe un unitaire</u> $U : h_1 \to h_2$ <u>tel que</u> :

$$UM_1U^* = M_2 .$$

Si h est de type dénombrable, toute algèbre de von Neumann commutative dans h est spatialement isomorphe à l'algèbre $\pi_n(L^\infty(X,\mu))$ pour un espace X,μ et une fonction n convenables.

Soit alors $T \in \mathcal{L}(h)$ un opérateur normal : $TT^* = T^*T$, soit M l'algèbre de von Neumann engendrée par T , on peut prendre pour (X,B) le spectre $K \subset \mathbb{C}$ de T et la classe de mesure μ donnée par la mesure spectrale de T . L'application qui à la restriction à K de toute fonction polynomiale $\Sigma a_{ij} z^i \bar{z}^j$ associe $\Sigma a_{ij} T^i T^{*j}$ se prolonge en un isomorphisme π de $L^\infty(K,\mu)$ sur M avec $\pi(z) = T$. Ainsi pour toute fonction borélienne bornée f sur $\operatorname{Sp} T$ on donne un sens à $f(T)$ et on a :

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(T) = \lambda_1 f_1(T) + \lambda_2 f_2(T)$$

$$f_1 f_2(T) = f_1(T) f_2(T)$$

$$f \circ g(T) = f(g(T)) .$$

La fonction $x \to n(x)$ de K dans $\{1,\ldots,\infty\}$, est unique modulo μ , elle exprime la multiplicité du point x dans le spectre K . Le théorème du bicommutant montre que tout opérateur qui bicommute avec T est une fonction borélienne bornée de T . Enfin, soient N une algèbre de von Neumann non nécessairement commutative, et $T \in N$, alors $T = T_1 + iT_2$, $T_j = T_j^*$ de sorte que T_j étant normal et toute $f(T_j)$, f borélienne étant encore dans N , on voit que N est engendrée par les projecteurs qu'elle contient.

2. Le commutant d'une représentation unitaire.

Soit G un groupe, et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien $\mathcal{h}_\pi$ (ou, plus généralement, soient $\mathcal{A}$ une algèbre involutive et π une représentation involutive non dégénérée) Le commutant

$$R(\pi) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{h}_\pi) \ , \ T\pi(x) = \pi(x)T \quad \forall\ x \in G\}$$

est par construction une algèbre de von Neumann.
L'intérêt de $R(\pi)$ réside dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.- a) Soient $E \subset \mathcal{h}$ un sous-espace fermé et P le projecteur correspondant, alors :

$$E \text{ réduit } \pi \Leftrightarrow P \in R(\pi) \ .$$

b) Soient E_1, E_2 deux sous-espaces fermés réduisant π alors les représentations réduites π^{E_j} sont équivalentes si et seulement si

$$P_1 \sim P_2 \ (R(\pi)) \quad \text{i.e.} \quad \exists\ U \in R(\pi) \ , \ U^*U = P_1 \ , \ UU^* = P_2 \ .$$

c) π^{E_1} est disjointe de π^{E_2} ssi il existe P projecteur, P dans le centre de $R(\pi)$ tel que $PP_1 = P_1, (1-P)P_2 = P_2$.

Il est naturel de dire que la représentation π est isotypique si l'on ne peut trouver deux sous-représentations disjointes. Cela équivaut à dire que $R(\pi)$ est un facteur au sens suivant :

DEFINITION 4. - Un facteur M est une algèbre de von Neumann de centre réduit aux scalaires $\mathbb{C}$.

Un autre corollaire immédiat de la proposition et du calcul fonctionnel borélien est le suivant :

Pour que π soit irréductible il faut et il suffit que $R(\pi) = \mathbb{C}$.

3. Algèbres de von Neumann de dimension finie.

Soit M une algèbre de von Neumann de dimension finie, et considérons-là, en oubliant l'espace de Hilbert dans lequel on la représentait, comme une algèbre semi-simple sur le corps algébriquement clos $\mathbb{C}$. Elle est donc somme directe d'un nombre fini d'algèbres de matrices :

$$M = \bigoplus_{1}^{k'} M_{n_k}(\mathbb{C}) .$$

Ici le signe $=$ correspond à la définition suivante :

DEFINITION 5. - Soit M_i , $i = 1,2$ une algèbre de von Neumann dans l'espace h_i , $i = 1,2$. On dit que M_1 est algébriquement isomorphe à M_2 , si il existe un isomorphisme algébrique θ de M_1 sur M_2 tel que $\theta(x^*) = \theta(x)^*, x \in M_1$.

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien de dimension finie : h_π . Alors $R(\pi)$ est de dimension finie et à la décomposition $M = \bigoplus_{1}^{k'} M_{n_k}(\mathbb{C})$ correspond la décomposition de π en composantes isotypiques π_k de multiplicité n_k .

La théorie de réduction (Ecrite en 1939, publiée vers 1949) ([35]).

Soient h un espace de Hilbert de type dénombrable et $\mathcal{F}$ l'ensemble des facteurs $M \subset \mathcal{L}(h)$. Il existe sur $\mathcal{F}$ une structure borélienne qui en fait un espace borélien standard. Soient alors (X,B) un espace borélien standard, μ une mesure de probabilité sur (X,B) et $t \to M(t)$ une application borélienne de X dans $\mathcal{F}$. Alors soit M l'algèbre stellaire dont les éléments $x \in M$ sont les sections boréliennes bornées $t \to x(t) \in M(t)$, identifiées si elles sont égales μ-presque partout, munie des opérations évidentes et de la norme :

$$\|x\| = \operatorname{Sup\,ess} \|x(t)\| \ .$$

On montre que l'algèbre stellaire M est une algèbre de von Neumann, (i.e. est algébriquement isomorphe à une algèbre de von Neumann représentée dans un espace convenable), par exemple en considérant l'action de M dans l'espace

$$L^2(X,\mu) \otimes \mathcal{h} = L^2(X,\mu,\mathcal{h})$$

définie par :

$$(\pi(x)\xi)(t) = x(t)\xi(t) \quad \forall\ \xi \in L^2(X,\mu,\mathcal{h}) \ .$$

On écrit, pour résumer la construction de M , l'égalité :

$$M = \int_X M(t)d\mu(t) \ . \tag{6}$$

THEOREME 7. - <u>Soit</u> M <u>une algèbre de von Neumann dans un espace de type dénombrable</u> <u>Alors</u> M <u>est algébriquement isomorphe à une intégrale directe de facteurs</u>

$$\int_X M(t)d\mu(t) \ .$$

Ce théorème de von Neumann montre que les facteurs contiennent déjà l'originalité de toutes les algèbres de von Neumann, ils suffisent à reconstruire toute algèbre de von Neumann comme "somme directe généralisée" de facteurs.

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien séparable, à la décomposition de $R(\pi)$ comme intégrale directe de facteurs, correspond la décomposition de π comme intégrale directe de représentations isotypiques.

Comparaison des sous-représentations, comparaison des projecteurs et fonction dimension relative.

Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G dans l'espace hilbertien h_π. Supposons π isotypique, il est alors naturel d'attendre que, comme en dimension finie, π va être un multiple d'une représentation irréductible π^E, sous représentation de π. Dans la correspondance entre sous-représentations de π et projecteurs $P \in R(\pi)$, on voit facilement que les représentations irréductibles correspondent aux projecteurs minimaux de $R(\pi)$ et on a : π a une sous-représentation irréductible $\Leftrightarrow$ le facteur $R(\pi)$ a un projecteur minimal $\Leftrightarrow$ Il existe un espace de Hilbert k et un isomorphisme de $\mathcal{L}(k)$ sur $R(\pi)$.

Toute représentation isotypique ayant une sous-représentation irréductible est un multiple de cette représentation. Pour tout facteur M dans h, ayant un projecteur minimal, on peut factoriser h en produit tensoriel $h = k \otimes \mathcal{L}$ de telle sorte que $M = \{T \otimes 1 , T$ opérant dans $k\}$. Cependant il existe des groupes G ayant une représentation isotypique π sans sous-représentation irréductible. Ce phénomène ne se produit pas si G est un groupe de Lie réel semi-simple et π est continue, ou plus simplement si G est compact et π continue. Cependant il se produit pour la représentation régulière de nombreux groupes discrets : soit G un groupe dénombrable discret et H la réunion des classes de conjuguaison finies de G, alors H est un sous-groupe normal de G, supposons $H = \{1\}$. Soit λ la représentation régulière gauche de G, on a $h_\lambda = \ell^2(G)$, l'espace de Hilbert ayant pour base $(\varepsilon_g)_{g \in G}$ et on pose :

$$\lambda(g)\varepsilon_k = \varepsilon_{gk} \qquad \lambda'(g)\varepsilon_k = \varepsilon_{kg} .$$

On montre que l'algèbre de von Neumann $R(\lambda)$ est engendrée par les opérateurs $\lambda'(g)$, $g \in G$ et que le vecteur ε_1 est totalisateur et séparateur pour $R(\lambda)$: $R(\lambda)\varepsilon_1$ et $R(\lambda)'\varepsilon_1$ sont denses dans h_λ. Les coordonnées de $T\varepsilon_1$, où

$T \in R(\lambda) \cap R(\lambda)'$ sont constantes sur les classes de conjuguaison de G, de sorte que comme $H = \{1\}$, on a alors $T\varepsilon_1 \in \mathbb{C}\varepsilon_1$ et comme ε_1 est séparateur, $T \in \mathbb{C}$. Ainsi $R(\lambda)$ est un facteur et λ est isotypique. Pour voir que $R(\lambda)$ n'est pas isomorphe à un facteur $\mathcal{L}(\mathcal{h})$, on utilise la notion suivante :

DEFINITION 8. - Une trace $\mathfrak{T}$ sur un facteur M est une forme linéaire telle que $\mathfrak{T}(AB) = \mathfrak{T}(BA)$ pour tous $A,B \in M$.

Sur $\mathcal{L}(\mathcal{h})$ il existe une trace non nulle seulement si $\mathcal{h}$ est de dimension finie, comme on le voit en vérifiant que si $\mathcal{h}$ est de dimension infinie tout élément est combinaison linéaire de commutateurs. Or sur $R(\lambda)$, on peut définir $\mathfrak{T}$ par :

$$\mathfrak{T}(A) = \langle A\varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle \qquad \forall\, A \in R(\lambda) .$$

La propriété $\mathfrak{T}(AB) = \mathfrak{T}(BA)$ se vérifie pour A et B de la forme $\lambda'(g)$ $g \in G$ et se déduit en général par bilinéarité et continuité. Comme $\mathfrak{T}(1) = 1$ on a construit une trace non nulle sur le facteur de dimension infinie $R(\lambda)$. Ainsi il existe des facteurs de dimension infinie ne possédant aucun projecteur minimal.

Soit M un facteur, la traduction dans le langage des projecteurs des notions de représentations équivalentes et somme directe de représentations, donne comme dans la proposition 3 les notions suivantes :

Pour P projecteur, $P \in M$, on note $[P]$ la classe d'équivalence de P pour la relation $P_1 \sim P_2$ ssi $\exists\, U \in M$, $U^*U = P_1$, $UU^* = P_2$.

Pour P_1 et P_2 tels que $P_1P_2 = 0$, on note $[P_1]+[P_2]$ la classe de $[P_1+P_2]$, elle ne dépend que de celles de P_1 et P_2.

L'hypothèse : M est un facteur, montre que l'ensemble des classes de projecteurs est totalement ordonné par la relation $[P_1] \le [P_2]$ quand il existe des représentants $P_1' \le P_2'$. Cet ensemble totalement ordonné est muni d'une loi de composition partiellement définie qui permet de donner un sens à une égalité comme $[P] = \frac{n}{m}[Q]$, n,m entiers.

DEFINITION 9. - Un projecteur $P \in M$ est dit fini quand $Q \sim P$ et $Q \leq P \Rightarrow Q = P$.

Cette propriété ne dépend que de la classe de P . Dans le langage des représentations, on adopterait la définition suivante : une représentation π est finie quand toute sous-représentation π^E équivalente à π est égale à π . Si π n'est pas finie elle contient une infinité de sous-représentations équivalentes deux à deux, et inversement.

THEOREME 10. - (Murray et von Neumann). Soit M un facteur à prédual séparable. Il existe une application D de l'ensemble des projecteurs de M dans $\bar{R}_+ = [0,+\infty]$, unique à multiplication par $\lambda > 0$ près, telle que :

a) $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow D(P_1) = D(P_2)$

b) $P_1P_2 = 0 \Rightarrow D(P_1)+D(P_2) = D(P_1+P_2)$

c) P fini $\Leftrightarrow D(P) < \infty$.

De plus, à une normalisation près, l'image de D est l'un des sous-ensembles suivants de $\bar{R}_+$:

$\{1,\ldots,n\}$ on dit que M est de type	I_n
$\{1,\ldots,\infty\}$	I_∞
$[0,1]$	II_1
$[0,+\infty]$	II_∞
$\{0,+\infty\}$	III .

On voit que pour que M ait un projecteur minimal, il faut et il suffit qu'il soit de type I , si M est de type I_n , $n < \infty$ c'est $M_n(C)$, et la fonction $D(P)$ est la dimension usuelle du sous-espace de C^n sur lequel le projecteur $P \in M_n(C)$ projette. Si $n = \infty$, on a $M = \mathcal{L}(h)$ avec h de type dénombrable et $D(P)$ = dimension de l'image de P .

Ce qui est remarquable dans le cas II_1 c'est l'apparition de dimensions à valeurs arbitraires dans $[0,1]$.
On dit qu'un facteur M est fini, s'il ne contient pas de sous-facteur de type I_∞ et cela est équivalent à dire que M est dans l'un des cas I_n, $n<\infty$ ou II_1. En particulier si M est infinie il n'existe sur M aucune trace $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T}(1) = 1$.
Un des résultats remarquables des premiers articles de Murray et von Neumann est la réciproque :

THEOREME 11. - (Murray et von Neumann). Soit M un facteur de type II_1. Il existe alors une unique trace $\mathcal{T}$ sur M telle que $\mathcal{T}(1) = 1$.

En outre $\mathcal{T} \in M_*$. Une démonstration récente, due à F.J. Yeadon [49] ramène ce théorème à un résultat puissant de Ryll Nardzewski : dans tout convexe $\sigma(X,X^*)$ compact d'un Banach X, il y a un point qui est laissé fixe par toute isométrie affine du convexe. On applique ce résultat en montrant que si $\Phi \in M_*$ vérifie $\|\Phi\| = \varphi(1) = 1$ l'enveloppe convexe fermée K de l'orbite de Φ sous l'action des automorphismes intérieurs de M (transportés à M_*) est $\sigma(M_*,M)$ compacte.
On obtient alors l'existence de $\mathcal{T} \in M_*, \mathcal{T}(1) = 1$, $\mathcal{T}(uxu^*) = \mathcal{T}(x)$ pour u unitaire de M et $x \in M$.

Isomorphisme algébrique et isomorphisme spatial.

Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann et θ un isomorphisme d'algèbres involutives de M_1 sur M_2. Alors θ est isométrique (car M_1 et M_2 sont des algèbres stellaires, $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ = rayon spectral T^*T) et comme le prédual est unique θ est $\sigma(M_i,M_{i*})$ continu. Si M_i, $i = 1,2$ agit dans l'espace hilbertien $\mathcal{h}_i$, l'isomorphisme θ n'est cependant pas toujours spatial puisque bien qu'isomorphes M_1 et M_2 peuvent avoir des commutants non isomorphes. En fait fixons M, supposons M à prédual de type dénombrable et cherchons à décrire tous les isomorphismes π de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(h)$, h espace hilbertien de type dénombrable. Pour simplifier encore ramenons-nous en utilisant la théorie de réduction au cas où M est un facteur.

On est alors ramené à étudier à équivalence près les représentations π de M dans un espace hilbertien h_π qui sont continues quand on munit M de $\sigma(M,M_*)$ et $\mathcal{L}(h_\pi)$ de la topologie de dualité avec $\mathcal{L}(h_\pi)_*$. Comme M est un facteur le commutant $R(\pi) = \pi(M)'$ est aussi un facteur et π est isotypique. Il en résulte en prenant $\pi_1 \oplus \pi_2$ que deux représentations π_1 et π_2 ne sont jamais disjointes et que toute représentation π de M est une sous-représentation d'une représentation infinie fixée une fois pour toutes. Ce résultat se prolonge au cas où M n'est plus un facteur, toute représentation π (continue pour $\sigma(M,M_*)$ et $\sigma(\mathcal{L}(h_\pi),\mathcal{L}(h_\pi)_*)$ de M est une sous-représentation d'une représentation ρ <u>proprement infinie</u> (au sens où le commutant $R(\rho)$ contient un sous-facteur de type I_∞) <u>et fidèle</u>(*), que l'on choisit arbitrairement, par exemple en partant d'un isomorphisme α de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(h)$ et en prenant $\rho = \alpha \oplus \alpha \oplus \ldots$

Il n'y a donc pas de problème sérieux, une fois M connue algébriquement, pour déterminer tous les isomorphismes de M sur une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{L}(h)$. Le problème réel étant celui de la classification des algèbres de von Neumann <u>à isomorphisme algébrique près</u>.

<u>Les deux premiers exemples de facteurs de type</u> II_1 , <u>le facteur hyperfini et la propriété</u> Γ .

Rappelons que si G est un groupe discret dénombrable dont toutes les classes de conjuguaison sont infinies et si λ est sa représentation régulière gauche, l'algèbre de von Neumann $R(\lambda)$ est un facteur de type II_1 .

(*) On emploie souvent "représentation fidèle" au lieu de représentation π dont le noyau est réduit à 0 : $\pi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dans "On rings of operators IV", Murray et von Neumann montrent que tous les facteurs $R(\lambda_G)$ sont isomorphes pour G localement fini (i.e. réunion filtrante croissante de groupes finis) et que si G est le groupe libre à 2 générateurs on obtient un facteur non isomorphe. Soient N un facteur de type II_1, et $\mathfrak{T}$ l'unique trace $(\mathfrak{T}(1) = 1)$ de N ; on définit sur N la norme de Hilbert Schmidt par :

$$\|x\|_2 = \mathfrak{T}(x^* x)^{\frac{1}{2}} .$$

(C'est l'analogue de la norme $(\Sigma|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ d'une matrice (a_{ij})).

C'est une norme préhilbertienne sur N et on note d_2 la distance correspondante. Le résultat de Murray et von Neumann est alors :

THEOREME 12. (Murray et von Neumann) ([34]). - Il existe à isomorphisme près un facteur de type II_1 et un seul, à prédual de type dénombrable et tel que :

$\forall\, x_1,\dots,x_n \in N$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, K$ sous-algèbre stellaire de dimension finie telle que $d(x_j,K) \leq \varepsilon$ $\forall\, j$.

Nous désignerons par R cet unique facteur, appelé le facteur hyperfini, pour des raisons évidentes.

Dans leur article, Murray et von Neumann montrent que tout facteur de dimension infinie contient une copie de R .

Pour G discret dénombrable localement fini on voit facilement que $R(\lambda_G)$ vérifie la condition du théorème donc est isomorphe à R . En choisissant convenablement G on voit de plus que R vérifie la condition suivante, appelée propriété Γ :

$\forall\, x_1,\dots,x_n \in R$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, u$ unitaire de R tel que :

$$\mathfrak{T}(u) = 0 , \|x_j u - u x_j\|_2 \leq \varepsilon , j = 1,\dots,n .$$

Murray et von Neumann démontrent ensuite que si $G = \mathbb{Z}^{*2}$ est le groupe libre à 2 générateurs, le facteur $R(\lambda_G)$ ne vérifie pas Γ . Nous reviendrons plus tard sur cette propriété qui n'était pour Murray et von Neumann qu'un outil technique, ainsi disaient-ils : "Certain algebraic invariants of factors in the case II_1 are formed, (1) and (2) in § 4.6 and the property Γ , of which the first two are probably of greater general significance, but the last one has so far been put to greater practical use". En fait les invariants (1) et (2) qu'ils mentionnent sont :

(1) Savoir si N est antiisomorphe à N (i.e. isomorphe à l'algèbre opposée N° , $x.y = yx$ pour $x,y \in N^\circ$) .

(2) Le sous-groupe de R_+^* construit de la manière suivante : on prend $\tilde{N} = N \otimes K$ où K est un facteur de type I_∞ , alors sur $\tilde{N}$ la fonction dimension relative D a pour image $\bar{R}_+$ et si $\theta \in \operatorname{Aut} \tilde{N}$ il existe un unique réel positif $\lambda = \operatorname{mod} \theta$ avec : $D(\theta(P)) = \lambda D(P)$ $\forall P$ projecteur.

Le groupe $G = \{\operatorname{mod} \theta , \theta \in \operatorname{Aut} \tilde{N}\}$ est évidemment un invariant algébrique de N . En fait un exemple de facteur de type II_1 non antiisomorphe à lui-même n'a été obtenu que récemment (par l'auteur de ces notes) et on ne connaît toujours aucun exemple de facteur de type II_1 dont le groupe G soit distinct de R_+^* .

Enfin pour terminer cette revue des résultats de Murray et von Neumann, notons qu'ils avaient réussi à exhiber un facteur dans le cas III mais qu'ils notaient "The purely infinite case i.e. the case III - is the most refractory of all and we have, at least for the time being, scarcely any tools to investigate it".

II. <u>LES ALGEBRES STELLAIRES, TOPOLOGIE NON COMMUTATIVE.</u>

La théorie commence en 1943 avec l'article de Gelfand et Naimark.

DEFINITION 1. - <u>Une algèbre stellaire</u> A <u>est une algèbre de Banach sur</u> $\mathbb{C}$, <u>munie d'une involution antilinéaire</u> $x \to x^*$ <u>telle que</u> :

$$(xy)^* = y^* x^* \quad \text{et} \quad \|x^* x\| = \|x\|^2 \ , \text{ pour } \ x,y \in A \ .$$

Soit A une algèbre stellaire commutative, et supposons que A a une unité, alors l'ensemble $\mathrm{Sp}A$ des homomorphismes de A dans $\mathbb{C}$ tels que $\chi(1) = 1$, muni de la topologie de la convergence simple sur A est compact et on a :

THEOREME 2. - Soit A une algèbre stellaire commutative avec unité, et $X = \mathrm{Sp}A$ son spectre, alors la transformation de Gelfand $x \in A \mapsto$ la fonction $\hat{x}(\rho) = \rho(x), \rho \in \mathrm{Sp}A$, est un isomorphisme de A sur l'algèbre stellaire $C(X)$ des fonctions complexes continues sur X.

Ainsi, le foncteur contravariant C qui à tout espace compact X associe l'algèbre stellaire $C(X)$ réalise une équivalence entre la catégorie des espaces compacts, applications continues et l'opposée de la catégorie des algèbres stellaires commutatives et homomorphismes préservant l'unité. A l'application continue $f : X \to Y$ correspond l'homomorphisme $C(f) : C(Y) \to C(X)$ qui à $h \in C(Y)$ associe $h \circ f \in C(X)$.

En particulier deux algèbres stellaires commutatives sont isomorphes si et seulement si leurs spectres sont homéomorphes. Comme on sait à quel point le problème de classification, à homéomorphie près, des espaces compacts est complexe, on n'ose pas affirmer que le théorème ci-dessus donne une classification des algèbres stellaires commutatives, il relie simplement les deux problèmes, c'est une simple traduction. Supposons alors que A soit une algèbre stellaire non commutative, on n'a pas alors d'analogue du théorème ci-dessus. Citons cependant deux exemples récents de notions, issues de la topologie des espaces compacts, et qui ont un analogue non commutatif :

Le groupe $K_0(A)$

Soient X un espace compact et Vect X l'ensemble des fibrés vectoriels

complexes de dimension finie et de base X . Pour $\xi \in \mathrm{Vect}\, X$, l'espace $C(\xi)$ des sections continues de ξ est un $C(X)$ module projectif de type fini. Inversement tout $C(X)$ - module projectif de type fini est de la forme $C(\xi)$ pour un $\xi \in \mathrm{Vect}\, X$ convenable. De plus pour que les fibrés ξ_1 et ξ_2 soient isomorphes il faut et il suffit que les modules $C(\xi_j)$ le soient. La somme directe $\xi_1 \oplus \xi_2$ des fibrés vectoriels correspond à la somme directe des modules, il en résulte que le groupe $K^o(X)$ associé au semi-groupe des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels est naturellement isomorphe au groupe $K_o(C(X))$ associé au semi-groupe des classes d'isomorphisme de $C(X)$ modules projectifs de type fini.
En K - théorie algébrique le groupe $K_o(A)$ est défini pour un anneau A avec unité non nécessairement commutatif. C'est le groupe associé aux classes d'isomorphisme de A - modules projectifs de type fini.
Quand A est une algèbre stellaire, on peut associer à tout module projectif de type fini P sur A un projecteur orthogonal $e(P)$ appartenant à $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ où n est un entier, $n < \infty$, de telle sorte que P soit isomorphe ou sous-module de A^n qui est l'image de $e(P)$. Pour que P_1 soit isomorphe à P_2 il faut et il suffit que les projecteurs $e_1 = e(P_1)$ et $e_2 = e(P_2)$ soient équivalents au sens suivant dans $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$:

$$\exists\, U \in M_n(A)\, ,\, U^* U = e_1\, ,\, UU^* = e_2\, .$$

On retrouve donc les classes d'équivalence de projecteurs au sens de Murray et von Neumann, l'addition des classes correspond à la somme directe des modules, de sorte que $K_o(A)$ est en fait le groupe associé au semi-groupe des classes de projecteurs $e \in M_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, où l'on identifie, pour $n < m$, $M_n(A)$ avec l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} x & o \\ o & o \end{bmatrix} \in M_m(A)$.

Soit $\theta : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres stellaires, alors l'application qui à tout projecteur $e \in M_n(A)$ associe $(\theta \otimes 1)(e) \in M_n(B)$ définit un homomorphisme $K_o(A)$ dans $K_o(B)$, de sorte que K_o devient un foncteur covariant.

Ce foncteur s'est avéré particulièrement intéressant pour les algèbres stellaires construites comme limites inductives d'algèbres de dimension finie. Dans le cas commutatif cela correspondrait à écrire le spectre X comme limite projective de compacts finis, c'est-à-dire à avoir un espace totalement discontinu. De même que l'on a la liste des compacts métrisables totalement discontinus. (Il y en a un seul sans point isolé), on a une classification satisfaisante, due à O. Bratteli et G. Elliott (Voir [21]) des algèbres stellaires approximativement finies. Au semi-groupe qui engendre $K_o(A)$ correspond un ordre partiel, on note $K_o^+(A) \subset K_o(A)$ l'ensemble des classes de modules projectifs de type fini sur A . On note ε_A la classe du module A .

THEOREME 3 (O. Bratteli et G. Elliott) ([21]. - Deux algèbres stellaires approximativement finies sont isomorphes ssi les triplets $(K_o(A), K_o^+(A), \varepsilon_A)$ sont isomorphes.

De plus les triplets (G, G^+, ε) obtenus à partir d'algèbres stellaires approximativement finies ont une caractérisation simple.

Le groupe Ext A .

Soient X un espace compact métrisable et $C(X)$ l'algèbre stellaire associée. Bien que $C(X)$ soit commutative, nous avons déjà vu, en interprétant les classes d'isomorphisme de fibres vectoriels complexes sur X comme classes d'équivalence de projecteurs $e \in C(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$, l'intérêt d'algèbres stellaires non commutatives associées à X . Un exemple déjà plus intéressant est le suivant : soient V une variété réelle compacte de classe C^∞ , et $\mathcal{P}^0(V)$ l'algèbre des opérateurs pseudo différentiels d'ordre 0 du fibré vectoriel complexe de dimension 1 , $\Omega_{\frac{1}{2}}(V)$ dans lui-même. ($\Omega_{\frac{1}{2}}(V)$ est le fibré des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ sur V) .

Le symbole principal d'ordre 0 , σ est alors un homomorphisme surjectif de $\mathcal{P}^0(V)$ sur $C^\infty(S^*(V))$, où $S^*(V)$ désigne la variété compacte des demi-droites dans le fibré cotangent de V .
Soient $L^2(V)$ l'espace de Hilbert complété de l'espace des sections $C^\infty(\Omega_{\frac{1}{2}}(V))$, muni du produit scalaire $<\rho_1,\rho_2> = \int \rho_1\bar{\rho}_2$, et A l'algèbre stellaire dans $L^2(V)$ qui est la fermeture normique de $\mathcal{P}^0(V)$ (chaque $T \in \mathcal{P}^0(V)$ se prolonge continûment à $L^2(V)$) . Alors σ se prolonge en un homomorphisme d'algèbres stellaires de A sur $C(S^*(V))$ et le noyau de σ est exactement $k(L^2(V))$, l'algèbre des opérateurs compacts dans $L^2(V)$. On a ainsi un exemple d'une extension de l'algèbre stellaire commutative $C(Y)$, $Y = S^*(V)$ par l'algèbre stellaire k des opérateurs compacts, i.e. une suite exacte :

$$0 \to k \to A \xrightarrow{\sigma} C(Y) \to 0 \ .$$

Une extension est triviale si il existe un relèvement, de σ, qui est un homomorphisme Les extensions obtenues grâce aux opérateurs pseudo-différentiels par la construction ci-dessus sont loin d'être triviales en général, en fait, si on écrit la suite exacte de K-théorie associée, on obtient un homomorphisme $\delta : K_1(C(Y)) \xmapsto{\delta} K_0(k)$ qui après avoir identifié canoniquement le premier terme avec $K^1(Y) = K^1(S^*(V))$ et le second avec $\mathbb{Z}$ est donné par le théorème de l'indice de Atiyah et Singer, à partir d'une intégrale sur V .
Motivés en outre par la théorie des opérateurs non normaux, Brown, Douglas et Fillmore ont étudié systématiquement, pour un espace compact métrisable X les classes d'extension de $C(X)$ par l'algèbre stellaire k , i.e. les suites exactes :

$$0 \to k \to A \xrightarrow{\sigma} C(X) \to 0 \ .$$

Ils ont montré que l'ensemble $\mathrm{Ext}(X)$ de ces classes d'extension était muni naturellement d'une loi de groupe abélien, et que le foncteur Ext était exactement la K-homologie $K_1(X)$.

En outre, des travaux plus récents de W. Arveson, E. Effros, M.D. Choi et D. Voiculescu, ont montré que, en gardant la même définition de Ext(A) , pour A algèbre stellaire non nécessairement commutative on obtenait encore un groupe abélien dépendant de manière contravariante de A . Ceci pourvu que A satisfasse à la condition suivante, analogue à la définition des espaces nucléaires parmi les espaces localement convexes.

DEFINITION 4. (Takesaki). - Une algèbre stellaire A est nucléaire, quand pour toute algèbre stellaire B il existe sur le produit tensoriel algébrique :

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \ , \ a_i \in A \ , \ b_i \in B\}$$

une unique norme d'algèbre stellaire.

Nous verrons beaucoup plus loin que cette classe contient la plupart des algèbres stellaires intéressantes. (Voir paragraphe VIII).

III. REPRESENTATIONS DES ALGEBRES STELLAIRES.

Un des théorèmes clef de la théorie de la mesure est le théorème de représentation de Riesz. Enonçons-le seulement pour un compact métrisable X . (On a X métrisable $\Leftrightarrow C(X)$ de type dénombrable).

THEOREME 1. - Soient X un compact métrisable et L une forme linéaire positive sur $C(X)$ i.e. $f \in C(X)$, $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in X \Rightarrow L(f) \geq 0$. Il existe alors une unique mesure positive μ sur la tribu des boréliens de X (B est la tribu engendrée par les fermés de X) , telle que :

$$L(f) = \int f \, d\mu \qquad \forall f \in C(X) .$$

En particulier, on peut construire l'espace hilbertien $L^2(X,B,\mu)$ et la représentation π de $C(X)$ dans L^2 par multiplications. On connaît de plus l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(C(X))$, c'est exactement l'algèbre des multiplications par les éléments de $L^\infty(X,B,\mu)$. La propriété de σ-additivité de μ se traduit par l'égalité :

$$\varphi(\sum_{\alpha\in I} e_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} \varphi(e_{\alpha_i})$$

où φ désigne le prolongement naturel de L à $L^\infty(X,B,\mu)$ et où $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille dénombrable de projecteurs $e_\alpha \in L^\infty(X,B,\mu)$. Supposons alors que A soit une algèbre stellaire non commutative avec une unité 1 . Les notions ci-dessus d'élément positif, de forme linéaire positive et de σ-additivité ont un analogue exact, qui est le point de départ de la théorie de l'intégration non commutative.

Eléments positifs dans une algèbre stellaire.

Soient h un espace hilbertien et $T\in \mathcal{L}(h)$, on a équivalence entre les conditions suivantes :

a) $T = T^*$ et Spectre $T\subset [0,+\infty[$

b) $\langle T\xi,\xi\rangle \geq 0$ pour tout $\xi\in h$.

Pour une algèbre stellaire avec unité A et $x\in A$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $x = x^*$ et Spectre $x\subset[0,+\infty[$

2) $\exists\ a\in A$, $a^*a = x$

3) $\exists\ a\in A$, $a = a^*$, $a^2 = x$

4) $\exists\ \lambda\geq 0$ tel que $\|x-\lambda 1\| \leq \lambda$.

On dit alors que x est positif et on écrit $x\geq 0$. La condition 4) montre que

l'ensemble des éléments positifs est un cône convexe fermé dans A , noté A^+ .
Si $A = C(X)$, on a $A^+ = \{f, f(x) \geq 0 , \forall\, x \in X\}$.

Formes linéaires positives sur une algèbre stellaire.

Soit A comme ci-dessus et A^* l'espace de Banach dual. On dit que $L \in A^*$ est positive quand $L(x) \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$. On note A^*_+ le cône convexe $\sigma(A^*,A)$ fermé des formes linéaires positives sur A . L'analogue du théorème de représentation de Riesz consiste en la construction suivante (Gelfand, Naimark, Segal).

Comme L est positive, la condition 2) montre que :

$$L(x^* x) \geq 0 \quad \forall\, x \in A .$$

Il en résulte que la forme sesquilinéaire $\langle x,y \rangle_L = L(y^* x)$ définit sur A une structure préhilbertienne.

Soient $\mathcal{h}_L$ l'espace hilbertien séparé complété, et pour $x \in A, \pi_L(x)$ l'opérateur de multiplication à gauche défini par :

$$\pi_L(x)y = xy \quad y \in A$$

l'inégalité $L(y^* x^* xy) \leq \|x\|^2 L(y^* y)$ $y \in A$, qui résulte de $\|x\|^2 - x^* x \geq 0$, montre que π_L définit une représentation de A dans l'espace hilbertien $\mathcal{h}_L$.

De même que, dans le cas commutatif, la forme linéaire L se prolongeait aux fonctions boréliennes $f \in L^\infty(X,B,\mu)$, ici la forme linéaire L se prolonge en une forme linéaire sur l'algèbre de von Neumann $\pi_L(A)''$ engendrée par $\pi_L(A)$ et le prolongement, note $\bar{L}$, a la propriété de σ - additivité suivante :

DEFINITION 2. - Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace hilbertien $\mathcal{h}$ et ψ une forme linéaire positive sur M . On dit que ψ est normale quand :

$$\psi\Big(\sum_{\alpha \in I} e_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in I} \psi(e_\alpha)$$

<u>pour toute famille</u> $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ <u>de projecteurs 2 à 2 orthogonaux.</u>

Ici Σe_α désigne le plus petit projecteur qui majore toutes les sommes finies $\sum_{i=1}^{n} e_{\alpha_i}$, c'est un élément de $\mathbf{M}$.

On démontre que pour que ψ soit normale il faut et il suffit qu'elle provienne du prédual M_* de $\mathbf{M}$.

Revenons aux algèbres stellaires, soit A une telle algèbre, avec unité. Le théorème de Hahn Banach appliqué au cône convexe d'intérieur non vide A^+, montre que l'ensemble $\mathcal{S} = \{\Phi \in A_+^*, \Phi(1) = 1\}$ des <u>états</u> de A est un convexe non vide qui sépare les points de A. On est donc assuré de l'existence de "mesures positives" et grâce à la construction de Gelfand Naimark Segal, de l'existence d'une représentation <u>isométrique</u> de A comme sous-algèbre stellaire de l'algèbre $\mathcal{L}(h)$, h espace hilbertien.

De plus $\mathcal{S}$ est $\sigma(A^*, A)$ compact, et est donc l'enveloppe convexe fermé de l'ensemble de ses points extrémaux : <u>les états purs</u>, caractérisés par la propriété suivante :

Φ état pur $\Leftrightarrow$ la représentation π_Φ est irréductible. En fait, plus généralement, on a une correspondance bijective entre la face de Φ dans le cône A_+^* et l'ensemble des éléments positifs de l'algèbre de von Neumann $R(\pi_\Phi)$. Elle est donnée par : $\Psi \in A_+^*$ est associé à $y \in R(\pi_\Phi)^+$ quand :

$$\Psi(a) = \langle \pi_\Phi(a)1, y1 \rangle$$

où $1 \in h_\Phi$ est le vecteur associé à l'unité de A.

Ainsi toute algèbre stellaire A admet suffisamment de représentations irréductibles. Dans le cas commutatif les représentations irréductibles de A se confondent avec les homomorphismes de A dans $\mathbb{C}$. Dans le cas non commutatif la nature de la relation d'équivalence, entre représentations irréductibles de A dans un hilbert fixe, détermine une classe privilégiée d'algèbre stellaire ; le théorème suivant de J. Glimm est fondamental : (Voir [16]).

THEOREME 3. - Soit A une algèbre stellaire de type dénombrable. Les conditions suivantes sur A sont équivalentes.

1) Toute représentation isotypique π de A dans un espace hilbertien $\mathcal{h}_\pi$ est multiple d'une représentation irréductible.

2) Pour toute représentation irréductible π de A, l'image $\pi(A)$ contient l'idéal $k(\mathcal{h}_\pi)$ des opérateurs compacts dans $\mathcal{h}_\pi$.

3) Soient $\mathcal{h}$ un espace hilbertien de type dénombrable et $\mathrm{Rep}(A,\mathcal{h})$ l'espace borélien des représentations irréductibles de A dans $\mathcal{h}$. Alors le quotient par la relation d'équivalence des représentations est dénombrablement séparé.

4) Si π_1 et π_2 sont deux représentations irréductibles de A, ayant même noyau, elles sont équivalentes.

Une algèbre stellaire vérifiant les conditions équivalentes ci-dessus est dite postliminaire, toute limite inductive d'algèbres postliminaires est nucléaire au sens ci-dessus, en particulier :

$$A \text{ postliminaire} \Rightarrow A \text{ nucléaire.}$$

IV. LE CADRE DE L'INTEGRATION NON COMMUTATIVE ET LA THEORIE DE TOMITA-TAKESAKI.

Pour pouvoir tenir compte de mesures positives non nécessairement finies, il est nécessaire d'introduire l'analogue non commutatif des mesures positives infinies.

La donnée de départ en intégration non commutative est alors un couple (M,Φ)

d'une algèbre de von Neumann M et d'un poids Φ sur M au sens suivant (dû à F. Combes, G. Pedersen et U. Haagerup (Voir [5] et [24])).

DEFINITION 1. - On appelle poids sûr une algèbre de von Neumann M, une application additive positivement homogène de M_+ dans $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$ telle que :

a) Φ est semi-fini, i.e. $\{x \in M_+, \Phi(x) < \infty\}$ est $\sigma(M,M_*)$ total.

b) Φ est normal, i.e. $\Phi(\operatorname{Sup} x_\alpha) = \operatorname{Sup} \Phi(x_\alpha)$ pour toute famille filtrante croissante majorée d'éléments de M_+.

L'exemple le plus simple de poids infini est celui de la trace usuelle sur les opérateurs bornés dans un espace hilbertien h. On pose $M = \mathcal{L}(h)$ et pour $T \in M_+$ et toute base orthonormale $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ de h on a :

$$\Sigma < T\xi_\alpha, \xi_\alpha > = \text{Trace } T = \sup_{0 \le A \le T} \text{Trace } (A)\ ,\ A \text{ de rang fini.}$$

En fait les premiers poids infinis étudiés étaient des traces au sens suivant :

DEFINITION 2. - Un poids Φ sur l'algèbre de von Neumann M est une trace si il est invariant par les automorphismes intérieurs de M.

Ainsi tout poids sur M qui a une propriété d'unicité est une trace. L'analogue des notions de convergence presque sûre et des espaces L^p $p \in [1,\infty]$, de la théorie classique, a été obtenu, principalement par Dixmier [14] et Segal [43] pour les traces.

Quand Φ est une trace, l'ensemble $C_p = \{x \in M, \Phi(|x|^p) < \infty\}$ est un idéal bilatère de M et $\|x\|_p = (\Phi(|x|^p))^{1/p}$ définit sur C_p une semi-norme. Les espaces complétés $L^p(M,\Phi)$ ont de nombreuses propriétés généralisant le cas commutatif et le cas classique des opérateurs de puissance p-ième-sommable dans un espace hilbertien. En particulier, quand $x \geq 0$, $\Phi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, (On dit alors que Φ

est fidèle), le prédual M_* de M s'identifie à l'espace $L^1(M,\Phi)$. De plus l'intersection $L^2(M,\Phi) \cap L^\infty(M,\Phi)$ est une algèbre hilbertienne :

DEFINITION 3. - On appelle algèbre hilbertienne toute algèbre involutive $\mathfrak{A}$ munie d'un produit scalaire préhilbertien séparé tel que :

1) $\langle x,y \rangle = \langle y^*,x^* \rangle \quad \forall\, x,y \in \mathfrak{A}$.

2) La représentation de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}$ par multiplications à gauche est bornée, involutive et non dégénérée.

La condition 1) définit une isométrie antilinéaire J de l'espace $\mathcal{h}$, complété de $\mathfrak{A}$, sur lui-même. La condition 2) permet de parler de la représentation régulière gauche λ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{h}$ et donc de lui associer une algèbre de von Neumann : $\lambda(\mathfrak{A})''$ dans $\mathcal{h}$. On a alors :

a) Le commutant de $\lambda(\mathfrak{A})$ est engendré par l'algèbre des multiplications à droite $\lambda'(\mathfrak{A}) = J\lambda(\mathfrak{A})J$.

b) L'algèbre de von Neumann associée à l'algèbre hilbertienne $L^2(M,\Phi) \cap L^\infty$ s'identifie à M.

c) Pour toute algèbre hilbertienne $\mathfrak{A}$, il existe sur l'algèbre de von Neumann $\lambda(\mathfrak{A})''$ une trace fidèle $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}(\lambda(y^*)\lambda(x)) = \langle x,y \rangle , \quad \forall\, x,y \in \mathfrak{A}$$

et $\mathfrak{A}$ est équivalente à l'algèbre hilbertienne associée à $\mathcal{T}$.

En général, une algèbre de von Neumann M ne possède pas de trace fidèle, par exemple si M est un facteur, il possède une trace fidèle si et seulement si il n'est pas de type III. On dit que M est semi finie si elle possède une trace fidèle (dans le cas où M agit dans un espace de type dénombrable cela équivaut à dire que M est une intégrale directe de facteurs dont aucun n'est du type III).

Pour M semi-finie, les outils supplémentaires issus de la théorie des algèbres hilbertiennes permettaient de démontrer des résultats inaccessibles dans le cas général comme :

THEOREME 4. - <u>Soit</u> $M_i, i = 1,2$ <u>une algèbre de von Neumann dans</u> $\mathfrak{h}_i, i = 1,2$ <u>alors le commutant</u> $(M_1 \otimes M_2)'$ <u>est engendré par</u> $M_1' \otimes M_2'$.

Pour des algèbres de von Neumann semi-finies M_1 et M_2 , ce résultat est conséquence du théorème de commutation a) pour les algèbres hilbertiennes. De même, si G est un groupe localement compact <u>unimodulaire</u> et dg une mesure de Haar sur G , l'algèbre, pour la convolution des fonctions continues à support compact, est une algèbre hilbertienne et le théorème de commutation a) entraîne :

THOREME 5. - <u>Le commutant</u> $R(\lambda)$ <u>de la représentation régulière gauche</u> λ <u>de</u> G <u>dans</u> $L^2(G,dg)$ <u>est engendré par la représentation régulière droite.</u>

Ce théorème a été démontré pour des groupes localement compacts non nécessairement unimodulaires, par J. Dixmier, qui introduisit la notion d'algèbre quasi-hilbertienne. Le théorème 4 a été démontré pour des algèbres de von Neumann non nécessairement semi-finies par M. Tomita en 1967. En fait sa théorie des algèbres hilbertiennes généralisées est le fondement de toute la théorie non commutative de l'intégration pour les poids qui ne sont pas nécessairement des traces.
La théorie de Tomita doit en fait beaucoup à M. Takesaki qui transforma le papier original incompréhensible en un texte fondamental. (Lecture-notes n° 128).
On peut résumer l'essentiel de la théorie de Tomita-Takesaki, grâce à la définition et au théorème suivant :

DEFINITION 6. - <u>On appelle algèbre hilbertienne à gauche toute algèbre involutive</u> $\mathfrak{A}$, <u>munie d'un produit scalaire préhilbertien séparé tel que</u> :

1) L'opérateur $x \to x^*$ est <u>préfermé</u>.

2) La représentation de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$ par multiplications à gauche est bornée, involutive et non dégénérée.

Ainsi la seule différence avec une algèbre hilbertienne et que la fermeture S de l'opérateur $x \to x^*$ peut avoir un module $|S| \neq 1$. Soit alors $\Delta = (\text{adjoint de } S) \circ S$ le carré du module de S on a : $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ où J est une involution isométrique et le résultat fondamental :

THEOREME 7. - <u>Soient</u> $\mathfrak{a}$ <u>une algèbre hilbertienne à gauche et</u> M <u>l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de</u> $\mathfrak{a}$. <u>Alors</u> $JMJ = M'$ <u>et pour tout</u> $t \in \mathbb{R}$ <u>on a</u> :

$$\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M \qquad \text{(Voir [45]).}$$

De plus, de même que les algèbres hilbertiennes sont associées aux traces, les algèbres hilbertiennes à gauche sont associées aux poids : ([5]) :
Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre hilbertienne à gauche et M l'algèbre de von Neumann associée, il existe alors sur M un poids fidèle Φ tel que :

$$\Phi(\lambda(y^*)\lambda(x)) = \langle y^*, x \rangle \qquad x, y \in \mathfrak{a} .$$

Inversement, soient M une algèbre de von Neumann et Φ un poids fidèle. Alors $\mathfrak{a}_\Phi = \{x \in M, \Phi(x^*x) < \infty , \Phi(xx^*) < \infty\}$ muni du produit de M et du produit scalaire $\langle x,y \rangle = \Phi(y^*x)$ est une algèbre hilbertienne à gauche, l'algèbre de von Neumann associée s'identifie à M et le poids correspondant s'identifie à Φ .
Comme toute algèbre de von Neumann possède un poids fidèle (si M agit dans un espace de type dénombrable elle possède en fait un état fidèle), il en résulte en particulier que toute algèbre de von Neumann est isomorphe à l'algèbre engendrée par la représentation régulière gauche d'une algèbre hilbertienne à gauche.
C'est là que se situe une découverte remarquable de Takesaki et Winnink qui relie la théorie de Tomita et plus exactement le groupe à un paramètre d'automorphismes

de l'algèbre de von Neumann M défini par $\sigma_t(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$ avec une équation fondamentale en mécanique statistique quantique. Bien sûr le groupe d'automorphisme σ_t n'est pas unique, il dépend de l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire du poids fidèle Φ sur M :

DEFINITION 8. - Soit φ un poids fidèle sur l'algèbre de von Neumann M on appelle groupe d'automorphismes modulaires sur M le groupe à un paramètre $(\sigma_t^{\varphi})_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de M associé à l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}_{\varphi}$.

En mécanique statistique quantique des systèmes finis, l'état d'équilibre à la température absolue T est l'état de l'algèbre $M = M_n(\mathbb{C})$ donné par l'égalité :

$$\Phi(x) = \frac{\text{Trace }(xe^{-\beta H})}{\text{Trace }(e^{-\beta H})}$$

où Trace est la trace usuelle, $\beta = {}^1/kT$ où k est la constante de Boltzmann et H est l'hamiltonien, i.e. le générateur du groupe à un paramètre d'évolution du système : $\alpha_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$ $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Il est facile dans ce cas de montrer que l'état Φ est caractérisé par la condition suivante qui le relie à l'évolution α :

$$\begin{cases} \forall\ x,y \in M\ ,\ \exists\ F_{x,y}(z)\ \text{, holomorphe pour } 0 < \operatorname{Im} z < 1 \text{ et continue bornée dans} \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\ \text{, telle que :} \end{cases}$$

$$F_{x,y}(t) = \Phi(x\alpha_t(y))\ ,\ F_{x,y}(t+i\beta) = \Phi(\alpha_t(y)x) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}\ .$$

C'est la condition de Kubo-Martin-Schwinger. Pour un système infini on s'attend à ce que la même relation ait lieu entre le groupe d'évolution $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de l'algèbre des observables, qui est une algèbre stellaire, et l'état d'équilibre. Ainsi Haag Hugenholtz et Winnink ont été amenés à proposer la condition ci-dessus pour un triplet (A,Φ,α) où A est une algèbre stellaire, Φ un état sur A et α

un groupe à un paramètre d'automorphismes de A .

THEOREME 9. (Takesaki-Winnink) [45]. - Soient M une algèbre de von Neumann et Φ un état normal fidèle sur M . Alors le groupe d'automorphismes modulaires $(\sigma_t^\Phi)_{t\in\mathbb{R}}$ est l'unique groupe à un paramètre d'automorphismes de M qui vérifie les conditions de Kubo-Martin-Schwinger pour $\beta = 1$.

V. FACTEURS DE POWERS, D'ARAKI ET WOODS ET DE KRIEGER.

L'analogue non commutatif d'un espace de probabilité est un couple (M,Φ) où M est une algèbre de von Neumann et Φ un état normal fidèle sur M . L'exemple le plus simple correspond à $M = M_n(\mathbb{C})$, tout état Φ sur M s'écrit $\Phi = \mathrm{Tr}(\rho\,.)$ où ρ est une matrice positive dont la somme des valeurs propres vaut 1 :

$$\Phi(x) = \mathrm{Tr}(\rho x) \quad \forall\, x\in M_n(\mathbb{C}) .$$

On peut donc supposer que ρ est diagonale avec la valeur propre $\lambda_i > 0$ à la ligne i et avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$.
La liste des valeurs propres de ρ est un invariant de Φ . Le groupe d'automorphismes modulaires de Φ est donné par

$$\sigma_t^\Phi(x) = e^{itH} x e^{-itH} \quad \text{où } H = \mathrm{Log}\,\rho .$$

En particulier, si e_{ij} désigne l'unité matricielle canonique on a :

$$\sigma_t^\Phi(e_{k\ell}) = \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}\right)^{it} e_{k\ell} .$$

Le système (M,Φ) est analogue à un espace probabilisé ayant un nombre fini de points. Pour obtenir des exemples plus intéressants le procédé le plus simple est d'effectuer l'analogue de la construction des produits infinis de mesures.

Soit donc $(M_\nu,\Phi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite de couples (algèbre de matrices, état fidèle), soit A la limite inductive des algèbres stellaires $M_1\otimes M_2\otimes\ldots\otimes M_\nu = A_\nu$ où $A_\nu\subset A_{\nu+1}$ grâce à : $x\to x\otimes 1$. Sur A qui est une algèbre stellaire avec unité, on définit un état $\Phi = \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}}\Phi_\nu$ par l'égalité :

$$\Phi(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_\nu\otimes 1\ldots) = \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\ldots\Phi_\nu(x_\nu)\ .$$

On considère alors le couple (M,Φ) = (algèbre de von Neumann, état normal) associé au couple (A,Φ) comme dans le paragraphe III.

Quand chaque Φ_ν est fidèle il en est de même de Φ et le groupe d'automorphismes modulaires de (M,Φ) est donné par :

$$\sigma_t^\Phi(x_1\otimes\ldots\otimes x_\nu\otimes 1\ldots) = \sigma_t^{\Phi_1}(x_1)\otimes\ldots\otimes\sigma_t^{\Phi_\nu}(x_\nu)\otimes 1\ldots$$

En fait, cette construction d'algèbres de von Neumann est due à von Neumann (Compos. Math. 1938), mais il fallut attendre jusqu'en 1967 pour qu'elle se révèle comme fondamentale.

Pendant 30 ans après la naissance des algèbres de von Neumann on ne connaissait que trois facteurs de type III deux à deux non isomorphes. R.T. Powers, qui avait une formation de physicien, réussit à montrer en 1967 que si l'on prend tous les couples (M_ν,Φ_ν) égaux au couple $M_2(\mathbb{C})$, $\Phi((a_{ij})) = \lambda a_{11}+(1-\lambda)a_{22}$ on obtient une famille à un paramètre continu $\lambda\in\,]0,\frac{1}{2}[$ de facteurs de type III deux à deux non isomorphes : R_α , $\alpha = {}^{\lambda}/1-\lambda\in\,]0,1[$ -([35]) . Après la découverte de Powers, H. Araki et E.J. Woods entreprenaient une classification à isomorphisme près des facteurs produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices ([2]). Ils démontraient en particulier que l'on peut calculer à partir de la liste des valeurs propres des Φ_ν : $(\lambda_{\nu,j})_{j=1,\ldots,n_\nu}$ les deux invariants suivants :

$$r_\infty(M) = \{\lambda \in]0,1[\ ,\ M \otimes R_\lambda \text{ isomorphe à } M\}$$

$$\rho(M) = \{\lambda \in]0,1[\ ,\ M \otimes R_\lambda \text{ isomorphe à } R_\lambda\}\ .$$

Ils montraient de plus que $r_\infty(M)$ est un sous-groupe fermé de R_+^* et que l'égalité $r_\infty(M) = \lambda^{\mathbb{Z}}$ caractérise le facteur de Powers R_λ parmi les produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices. En outre grâce à l'étude de $\rho(M)$, E.J. Woods réussit à montrer que la classification des facteurs est impossible par des invariants boréliens à valeurs réelles.

D'un autre côté W. Krieger avait commencé une étude systématique des facteurs associés à la théorie ergodique. Commençons d'abord par expliciter sa construction d'une algèbre de von Neumann à partir d'une relation d'équivalence à orbites dénombrables sur un espace borélien standard (X,B) et d'une mesure quasi-invariante μ . Cette construction généralise la première construction de Murray et von Neumann qui elle-même était inspirée des produits croisés de la théorie des algèbres simples centrales sur un corps. Sous sa forme définitive, elle est due à J. Feldmann et C. Moore (Voir [22]).

Soient donc (X,B,μ) un espace borélien standard probabilisé et $R \subset X \times X$ le graphe, supposé analytique, d'une relation d'équivalence à orbites dénombrables. On suppose μ quasi-invariante au sens où la saturation par R d'un ensemble borélien négligeable est encore négligeable. On considère alors l'algèbre hilbertienne à gauche des fonctions boréliennes bornées de R dans $\mathbb{C}$ telles que pour un $n < \infty$, $\{j, f(i,j) \neq 0\}$ soit de cardinalité $\leq n$ pour tout i .

Le produit scalaire est celui de $L^2(R,\tilde{\mu})$ où $\int f(i,j)d\tilde{\mu} = \int \sum_j f(i,j)d\mu(i)$. Le produit de convolution est donné par

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2)$$

où pour $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ on pose $\gamma_1\gamma_2 = \gamma$ quand $\gamma_1 = (i_1, j_1), \gamma_2 = (i_2, j_2)$, $j_1 = i_2$ et $\gamma = (i_1, j_2)$.

Ainsi l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$ apparaît comme une généralisation de l'algèbre des matrices carrées. Comme elle a une unité : la fonction f : $f(i,j) = 0$ si $i \neq j$, $f(i,i) = 1$ $\forall$ i , il lui correspond un couple (M, Φ) où M est une algèbre de von Neumann et Φ un état normal fidèle sur M . Nous noterons simplement $M = L^{\infty}(R, \tilde{\mu})$ où R désigne le graphe de la relation d'équivalence, muni de la loi de groupoïde $\gamma_1\gamma_2 = \gamma$. Il est intéressant d'un point de vue heuristique de faire jouer (en intégration non commutative) à R le rôle joué (en intégration classique) par <u>l'espace</u> X , la <u>non commutativité</u> est due à l'existence d'une loi de groupoïde non triviale sur R (la loi triviale sur l'ensemble X est $x.x = x$ pour tout $x \in X$) . A isomorphisme près, l'algèbre de von Neumann $L^{\infty}(R, \mu)$ ne dépend que de la classe de la mesure μ , on adopte alors la définition :

DEFINITION 1. - Soit (X_i, B_i, μ_i, R_i) , $i = 1,2$. une relation d'équivalence à orbites dénombrables comme ci-dessus ; on dit que R_1 est isomorphe à R_2 si il existe une bijection borélienne θ de X_1 sur X_2 telle que :

$$\theta(\mu_1) \text{ équivalente à } \mu_2 \text{ , et presque sûrement :}$$

$$\theta \text{ (classe de } x) = \text{classe de } \theta(x) \text{ .}$$

Soit alors T une transformation borélienne de l'espace borélien standard (X,B) et μ une mesure quasi invariante par T . Les orbites de T dans X définissent une relation d'équivalence R_T et on dit que T_1 <u>est faiblement équivalente</u> à T_2 quand R_{T_1} est isomorphe à R_{T_2} .

THEOREME 2. (M. Dye 1958) ([18]). - <u>Deux transformations ergodiques avec mesure invariante sont faiblement équivalentes</u>.

Soit ainsi T une telle transformation, l'état Φ (associé à la mesure invariante) sur l'algèbre de von Neumann $L^{\infty}(R_T,\mu)$ est une trace, de sorte que $M = L^{\infty}(R_T,\mu)$ qui est un facteur car R_T est ergodique est de type II_1. H. Dye démontre en outre qu'il s'agit du facteur hyperfini.

Vers 1967, W. Krieger entreprend une étude systématique de l'équivalence faible des transformations (X,B,μ,T) où μ est quasi invariante par T. Il introduit deux invariants : ([28])

$$r(T) = \{\lambda \in [0,+\infty[\ , \ \forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \forall \ A \subset X \ , \ \mu(A) > 0 \ , \ \exists \ B \subset A \ ,$$

$$\mu(B) > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad \left|\frac{d\mu(T^n x)}{d\mu(x)} - \lambda\right| \leq \varepsilon \ \ \forall \ x \in B \quad \text{et} \quad T^n B \subset A\}$$

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \exists \ \nu \sim \mu \quad \text{avec} \quad \frac{d\nu(T^k x)}{d\nu(x)} \in \lambda^{\mathbb{Z}} \ \forall \ x \in X \ , \ \forall \ k\}$$

et il montre que r et ρ sont non seulement des invariants de l'équivalence faible mais en fait que $r(T)$ coïncide avec l'invariant d'Araki-Woods $r_{\infty}(M) = \{\lambda, M \otimes R_{\lambda}$ isomorphe à $M\}$ où $M = L^{\infty}(R_T,\mu)$ et, de même, que $\rho(T) = \rho(M)$.

En fait, il s'agit là d'une généralisation des résultats d'Araki et Woods, en effet, soient $(M_{\nu},\Phi_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de couples (algèbre de matrice, état fidèle) et $(\lambda_{\nu,j})_{j=1,\dots,n_{\nu}}$ la liste de valeurs propres correspondante. Alors l'algèbre de von Neumann produit tensoriel infini : $\bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (M_{\nu},\Phi_{\nu})$ s'obtient également par la construction de Krieger à partir de l'espace et de la relation d'équivalence suivants :

$X = \prod_1^{\infty} X_{\nu}$ où pour chaque ν, $X_{\nu} = \{1,\dots,n_{\nu}\}$

B est la tribu engendrée par la topologie produit.

$\mu = \prod_1^{\infty} \mu_{\nu}$ où $\mu_{\nu}(j) = \lambda_{\nu,j}$, $j \in X_{\nu}$.

R est la relation $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i$ pour tout i assez grand.

La relation R est en fait égale à R_T où T est la transformation qui généralise l'opération d'addition de 1 dans les entiers p-adiques : Pour calculer Tx on regarde la première coordonnée x_i de x qui n'est pas égale au maximum possible n_i, on la remplace par x_i+1 et on remplace les précédentes $x_j, j<i$ par 1.

Il existe en fait des facteurs de Krieger i.e. de la forme $L^\infty(R_T,\mu)$ qui ne sont pas des produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices. Le point culminant de la théorie de Krieger est le théorème suivant, démontré vers 1973, grâce à des invariants des facteurs que nous discuterons plus bas :

THEOREME 3. (Krieger) ([29]. - Soit (X_i,B_i,μ_i,T_i) une transformation ergodique (μ_i quasi invariante et (X_i,B_i) borélien standard), alors T_1 est faiblement équivalente à T_2 (i.e. R_{T_1} isomorphe à R_{T_2}) si et seulement si les facteurs $L^\infty(R_{T_i},\mu_i)$ sont isomorphes.

VI. FACTEURS DE TYPE III_λ.

Le théorème de Radon Nikodym.

La théorie de Tomita-Takesaki associe à tout poids fidèle Φ sur une algèbre de von Neumann M un groupe à un paramètre σ_t^Φ d'automorphismes de M, le groupe d'automorphismes modulaires, défini par

$$\sigma_t^\Phi(x) = \Delta_\Phi^{it}\, x\, \Delta_\Phi^{-it}$$

où Δ_Φ est l'opérateur modulaire, le carré du module de l'involution $x \to x^*$ considérée comme opérateur non borné dans l'espace $L^2(M,\Phi)$, complété de $\{x\in M,\ \Phi(x^*x)<\infty\}$ pour le produit scalaire $<x,y> = \Phi(y^*x)$. D'un autre côté, la théorie d'Araki et Woods associe à tout facteur M les deux invariants r_∞ et ρ, $r_\infty(M) = \{\lambda, M\otimes R_\lambda \sim M\}, \rho(M) = \{\lambda, M\otimes R_\lambda \sim R_\lambda\}$.

Or pour les facteurs d'Araki et Woods un calcul direct à partir de leurs travaux montre les égalités suivantes :

1) $r_\infty(M) = \cap$ Spectre Δ_Φ , Φ état normal fidèle sur M

2) $\rho(M) = \{\exp(^{2\pi}/T_o)$, $\exists\ \Phi$ état normal fidèle sur M tel que $\sigma^\Phi_{T_o} = 1\}$.

Ces deux égalités suggèrent bien entendu les définitions suivantes, pour un facteur arbitraire M :

$S(M) = \cap$ Spectre Δ_Φ , Φ état normal fidèle sur M .

$T(M) = \{$périodes possibles de groupes d'automorphismes modulaires de $M\}$.

La première question étant évidemment de savoir si les égalités $r_\infty = S$ et $\rho = \exp(^{2\pi}/T)$, valables pour les facteurs d'Araki et Woods restent vraies en général. Une question immédiatement reliée est le problème de calcul des invariants S et T . Les définitions ci-dessus de ces invariants montrent que pour calculer S et T on doit passer en revue tous les états normaux fidèles sur M et calculer leurs groupes d'automorphismes modulaires. Or, en général, et ceci est clair pour les facteurs du paragraphe V, un facteur est donné avec un état ou un poids privilégié Φ pour lequel le calcul de Δ_Φ et σ^Φ_t est facile. Le problème était donc posé d'étudier dans quelle mesure exactement le groupe σ^Φ dépend de Φ .

La réponse complète à ce problème constitue en fait exactement la version non commutative du théorème de Radon Nikodym.

THEOREME ([8]). - Soient M une algèbre de von Neumann et Φ un poids fidèle sur M .

a) Pour tout poids fidèle ψ sur M il existe une unique application continue de R dans $\mathcal{U}$ le groupe unitaire de M muni de $\sigma(M,M_*)$ telle que :

$$u_{t+t'} = u_t\ \sigma_t^\Phi(u_{t'}) \quad \forall\ t,t' \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t\ \sigma_t^\Phi(x)u_t^* \quad \forall\ t \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ x \in M$$

$$\psi(x) = (\Phi(u_t^*\, x\, u_t))_{t=-i/2} \quad \forall\ x \in M\ .$$

On note $u_t = (D\psi ; D\Phi)_t$.

b) <u>Inversement, soit</u> $t \to u_t$ <u>une application continue de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $\mathcal{U}$ <u>telle que</u> $u_{t+t'} = u_t\ \sigma_t^\Phi(u_{t'})$, $\forall\ t,t' \in \mathbb{R}$, <u>alors il existe un unique poids fidèle</u> ψ <u>sur</u> M <u>tel que</u> $(D\psi : D\Phi) = u$.

Si M est commutative, $M = L^\infty(X,B,\mu)$, alors Φ et ψ sont des mesures positives sur X qui sont équivalentes à μ , il existe alors une densité de Radon Nikodym $h : X \to \mathbb{R}_+$. Les h^{it} , $t \in \mathbb{R}$ sont alors dans $M = L^\infty(X,B,\mu)$ et $h^{it} = (D\psi : D\Phi)_t$.

Si M est semi-finie et $\mathcal{T}$ est une trace fidèle sur M , il existe alors des opérateurs positifs affiliés à M tels que $\Phi = \mathcal{T}(\rho_\Phi \cdot)$, $\psi = \mathcal{T}(\rho_\psi \cdot)$ et on a :

$(D\psi : D\Phi)_t = \rho_\psi^{it}\ \rho_\Phi^{-it}$.

La propriété $\sigma_t^\psi(x) = u_t\ \sigma_t^\Phi(x)u_t^* \quad \forall\ x \in M$, montre que bien que le groupe d'automorphismes modulaires change en général avec Φ , sa classe modulo les automorphismes intérieurs ne varie pas. On peut alors se demander si elle n'est pas de toutes façons triviale mais un argument facile à partir du théorème ci-dessus montre que :

$$T(M) = \{T_o\ ,\ \sigma_{T_o}^\Phi \ \text{ est un automorphisme intérieur}\}.$$

En outre un théorème de J. Dixmier et M. Takesaki (voir ([45])) montre que, en supposant que M_* est de type dénombrable on a

$$T(M) \neq \mathbb{R} \Leftrightarrow M \ \text{ n'est pas semi-fini.}$$

On introduit alors le groupe $\mathrm{Out}\,M = \mathrm{Aut}\,M/_{\mathrm{Int}\,M}$ des classes d'automorphismes de M modulo les automorphismes intérieurs et on obtient, associée à toute algèbre de von Neumann, un homomorphisme canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Out}\,M$:

$$\delta(t) = \text{Classe de } \sigma_t^{\Phi} \text{ (indépendante du choix de } \Phi) .$$

En particulier $T(M) = \text{Noyau } \delta$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. En fait l'image de δ est même contenue dans le centre du groupe $\mathrm{Out}\,M$.

On peut de plus calculer $T(M)$ à partir d'un seul poids Φ fidèle sur M puisque il suffit de déterminer les t pour lesquels σ_t^{Φ} est un automorphisme intérieur.

Par exemple quand M est un facteur d'Araki Woods : $M = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu, \Phi_\nu)$, on connaît le groupe d'automorphismes modulaires de $\Phi = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$, c'est $\sigma_t^{\Phi} = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \sigma_t^{\Phi_\nu}$.

Un calcul simple à partir de la liste des valeurs propres $(\lambda_{\nu,j})_{j=1,\dots,n_\nu}$ de Φ_ν montre alors que :

$$T(M) = T_o , \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - |\sum_j \lambda_{\nu,j}^{1+iT_o}|) < \infty\} .$$

On en tire par exemple que $T(R_\alpha) = \{T_o , \alpha^{iT_o} = 1\}$.

Quand M est un facteur de Krieger, ou plus généralement quand $M = L^\infty(R,\mu)$ pour une relation d'équivalence R (Voir paragraphe V on ne suppose pas nécessairement R de la forme R_T) , on vérifie également par un calcul facile que :

$T(M) = {}^{2\pi}/\mathrm{Log}\,\rho(R)$ où $\rho(R)$ est l'ensemble des $\lambda > 0$ pour lesquels il existe $\nu \sim \mu$ telle que les dérivées de Radon Nikodym $\frac{d\nu(Sx)}{d\nu(x)}$ appartiennent à $\lambda^{\mathbb{Z}}$ pour toute transformation borélienne S prescrivant les orbites de R , i.e. l'invariant ρ de Krieger.

Ce deuxième calcul montre facilement que, en général, l'égalité $\rho(M) = \exp({}^{2\pi}/T(M))$ n'a pas lieu.

Les facteurs de type III_λ .

Le théorème de Radon Nikodym permet de calculer l'invariant $S(M)$ à partir d'un unique poids normal fidèle Φ sur M . On définit le centralisateur M_Φ de Φ par l'égalité :

$$M_\Phi = \{x \in M, \sigma_t^\Phi(x) = x \ \forall\ t \in \mathbb{R}\} .$$

Pour tout projecteur $e \neq 0$, $e \in M_\Phi$ on définit un poids fidèle Φ_e sur l'algèbre de von Neumann réduite $eMe = \{x \in M, ex = xe = x\}$ par l'égalité :

$$\Phi_e(x) = \Phi(x) , \forall\ x \in eMe , x \geq 0 .$$

On a alors la formule :

$$S(M) = \bigcap_{e \neq o} \text{Spectre } \Delta_{\Phi_e}$$

où e varie donc parmi les projecteurs non nuls de M_Φ . De plus comme e commute avec Φ le calcul de $\sigma_t^{\Phi_e}$ (et par conséquent du spectre de Δ_{Φ_e}) est immédiat, on a $\sigma_t^{\Phi_e}(x) = \sigma_t^\Phi(x)$, $\forall\ x \in eMe$. Ainsi la formule ci-dessus permet de calculer, par exemple, $S(M)$ pour $M = L^\infty(R,\mu)$, on obtient l'égalité :

$$S(M) = r(R)$$

où r est l'invariant défini par Krieger comme ensemble des valeurs essentielles des dérivées de Radon Nikodym. En général, donc, $S(M) \neq r_\infty(M)$. En outre on a une interprétation beaucoup plus satisfaisante de $S(M)$ comme spectre de l'homomorphisme modulaire δ .

Supposons que le prédual M_* est de type dénombrable, alors un groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'automorphismes de M est de la forme σ_t^{Φ}, pour un poids fidèle Φ sur M, si et seulement si la classe $\varepsilon(\alpha_t)$ de α_t dans $\operatorname{Out} M$ est égale à $\delta(t)$ pour tout t. Dit en d'autres termes cela signifie que l'ensemble de tous les groupes d'automorphismes modulaires de poids fidèles sur M constitue exactement l'ensemble des sections boréliennes multiplicatives de δ.

Pour tout poids fidèle Φ le spectre de Δ_Φ s'identifie au spectre de σ^Φ au sens suivant : Spectre $\sigma^\Phi = \{\lambda \in$ Groupe dual de $\mathbb{R}$, $\hat{f}(\lambda) = 0$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int f(t)\sigma_t^\Phi dt = 0\}$.

(On peut aussi définir le spectre de σ^Φ à partir des supports des distributions transformées de Fourier des $t \to \sigma_t^\Phi(x)$, on obtient ainsi des distributions à valeurs dans M et Spectre σ^Φ est la fermeture de la réunion des supports des $(\sigma^\Phi(x))^\wedge)$.

Notons également que dans la formule ci-dessus on identifie $\mathbb{R}_+^*$ avec le groupe dual de $\mathbb{R}$ par l'égalité $<\lambda, t> = \lambda^{it}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$, l'égalité précise est alors $\operatorname{Sp}\Delta\Phi \cap \mathbb{R}_+^* =$ Spectre σ^Φ.

On a donc $\mathbb{R}_+^* \cap S(M) = \bigcap_{\varepsilon\circ\alpha=\delta}$ Spectre α, et cette formule montre alors que $\mathbb{R}_+^* \cap S(M)$ est, quand M est un facteur, un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$. De plus $0 \in S(M) \Leftrightarrow M$ est de type III et on a les cas suivants :

III_0 $\quad S(M) = \{0,1\}$

III_λ, $\lambda \in]0,1[: S(M) = \lambda^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$

III_1 $\quad S(M) = [0,+\infty[$.

En un certain sens le λ ci-dessus exprime la distance entre M et les facteurs semi-finis, en fait λ est relié de manière monotone et biunivoque à une grandeur qui mesure l'obstruction à l'existence d'une trace sur M :

$$d(M) = \text{diamètre } \mathcal{S}/\mathrm{Int}\, M$$

où $\mathcal{S}$ désigne l'espace métrique (avec la distance $d(\Phi_1,\Phi_2) = \|\Phi_1-\Phi_2\|$) des états normaux sur M et où $\mathrm{Int}\, M$ agit sur $\mathcal{S}$ par $\Phi \to u\Phi u^*$, u unitaire de M . Pour M de type III_1 on a $d(M) = 0$ (voir [10]) de sorte que l'on ne peut distinguer deux états d'un facteur de type III_1 par une propriété fermée et invariante par les automorphismes intérieurs. Citons maintenant une autre interprétation de $S(M)$ d'un point de vue heuristique. Revenons d'abord à l'origine de la terminologie "automorphismes modulaires". Le premier exemple d'algèbre hilbertienne à gauche est l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur un groupe localement compact G . Soit dg une mesure de Haar à gauche sur G , le module du groupe est alors l'homomorphisme δ_G de G dans $\mathbb{R}_+^*$ associé à l'action de G à droite sur dg. De plus l'opérateur modulaire de l'algèbre hilbertienne à gauche est l'opérateur de multiplication par la fonction δ_G dans l'espace $L^2(G,dg)$, de sorte que son spectre est la fermeture de l'image de δ_G . On peut alors, toujours d'un point de vue heuristique interpréter pour un facteur M , l'invariant $S(M)$ comme "l'image du module de M" .

Les facteurs de type III_λ , $\lambda \in]0,1[$ sont caractérisés par l'égalité $S(M) = \lambda^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$; or c'est un exercice facile de voir que si G est un groupe localement compact et l'image du module δ_G de G est $\lambda^{\mathbb{Z}}$, G est le produit semi-direct d'un groupe unimodulaire : $H = \text{Noyau } \delta_G$ par un automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}\, H$ qui multiplie par λ toute mesure de Haar sur H . Inversement tout couple (H,α) , H unimodulaire et α multipliant toute mesure de Haar sur H par λ donne par produit semi-direct un groupe localement compact $G = H \times_\alpha \mathbb{Z}$ et $\delta_G(G) = \lambda^{\mathbb{Z}}$.

L'analogie se prolonge par le théorème suivant :

THEOREME 2. [8]. - Soit $\lambda \in]0,1[$.

a) Soit M un facteur de type III_λ, il existe un facteur N de type II_∞ et $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ multipliant toute trace de N par λ (on écrit alors $\mathrm{mod}\, \theta = \lambda$) tels que M soit isomorphe au produit croisé de N par θ .

b) Soient N un facteur de type II_∞ , et $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ avec $\mathrm{mod}\, \theta = \lambda$, le produit croisé de N par θ est alors un facteur de type III_λ .

c) Deux couples (N_i, θ_i) , $i = 1,2$ donnent des facteurs isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme σ de N_1 sur N_2 tel que les classes de $\sigma\theta_1\sigma^{-1}$ et θ_2 , modulo les automorphismes intérieurs de N_2 , soient les mêmes.

Avant détudier les implications de ce théorème sur le problème de classification des facteurs, notons quelques précisions importantes quant à la théorie générale des facteurs de type III_λ . La notion de trace est remplacée par la suivante :

DEFINITION 3. - Une trace généralisée Φ sur un facteur M de type III_λ $\lambda \in]0,1[$, est un poids fidèle Φ tel que $\mathrm{Sp}\Delta_\Phi = S(M)$ et $\Phi(1) = +\infty$.

On démontre ([8]) l'existence de traces généralisées sur M en étudiant les relations entre les invariantes $T(M)$ et $S(M)$ et en montrant que sauf quand $S(M) = \{0,1\}$, l'invariant $T(M)$ est déterminé par $S(M)$. (Alors que, dans le cas III_0 , $T(M)$ peut être n'importe quel sous-groupe dénombrable, non nécessairement fermé, de $\mathbf{R}$) .

De plus on a le résultat d'unicité suivant : si Φ_1 et Φ_2 sont deux traces généralisées sur M il existe un automorphisme intérieur α tel que Φ_2 soit proportionnelle à $\Phi_1 \circ \alpha$.

L'algèbre de von Neumann de type II_∞ , N du théorème n'est autre que le centralisateur M_Φ d'une trace généralisée Φ ; sa position dans M est unique aux automorphismes intérieurs près et on peut la caractériser comme sous-algèbre semi-finie maximale ([8]).

Le théorème 2 montre que le problème de classification des facteurs de type III_λ se ramène à :

1) Classifier les facteurs de type II_∞

2) Etant donné un facteur N de type II_∞, déterminer dans $\mathrm{Out}\,N = \mathrm{Aut}\,N/\mathrm{Int}\,N$ les classes de conjuguaison de θ tels que $\mathrm{mod}\,\theta = \lambda$.

Ce sont ces deux problèmes qui sont les motivations principales pour les paragraphes VII, VIII ci-dessous, le problème 2) étant englobé dans la théorie ergodique non commutative.

VII. THEORIE ERGODIQUE NON COMMUTATIVE.

Soient (X,B,μ) un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité μ , et T une transformation borélienne de (X,B) laissant μ invariante. Soient $M = L^\infty(X,B,\mu)$ et Φ l'état associé à μ , alors T détermine un automorphisme de M qui préserve Φ , par l'égalité :

$$\theta(f) = f \circ T^{-1} .$$

Inversement tout automorphisme de M préservant Φ est obtenu de cette manière. Ainsi la théorie ergodique classique est-elle, après traduction, la même chose que l'étude à conjuguaison près des automorphismes de M qui fixent Φ . Une des raisons d'être de cette théorie est en fait que tous les triplets (X,B,μ) (et par conséquent tous les couples (M,Φ)) avec $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall\, x \in X$, sont isomorphes). Ainsi à chaque construction différente d'un tel triplet va correspondre une famille d'automorphismes de (X,B,μ) et il s'agit de les comparer. De même, dans le cadre de l'intégration non commutative. Il existe de nombreuses constructions différentes du facteur hyperfini R , par exemple comme représentation régulière d'un groupe discret localement fini (voir le paragraphe I), comme produit tensoriel infini des couples $(M_n(\mathbb{C}),\mathfrak{T}_n)$ où $\mathfrak{T}_n$ est la trace normalisée par $\mathfrak{T}_n(1) = 1$, ou encore à partir du théorème de H. Dye (paragraphe V). A chacune de ces constructions correspondent des automorphismes de R . En fait on peut aussi construire R à partir des relations d'anticommutation canoniques sur un espace hilbertien réel E et obtenir ainsi un homomorphisme injectif du groupe orthogonal de E dans Aut R . Il en résulte que Out R contient en fait tout groupe localement compact de type dénombrable.

Bien entendu on ne veut pas distinguer deux automorphismes de R de la forme θ et $\sigma\theta\sigma^{-1}$ où $\sigma \in \mathrm{Aut}\, R$. Adoptons les définitions générales suivantes :

DEFINITION 1. - Soient M une algèbre de von Neumann, et $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Aut}\, M$ deux automorphismes de M .

a) On dit que θ_1 et θ_2 sont conjugués quand il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}\, M$ tel que $\theta_2 = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$.

b) On dit que θ_1 et θ_2 sont extérieurement conjugués quand il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}\, M$ tel que $\theta_2 = \sigma\theta_1\sigma^{-1}$ modulo $\mathrm{Int}\, M$.

Quand M est commutative les deux définitions coïncident car $\mathrm{Int}\, M = \{1\}$. Dans le cas général on a deux problèmes : conjuguaison et conjuguaison extérieure. Commençons par citer deux résultats qui étendent au cas non commutatif des résultats importants de théorie ergodique classique, nous discuterons plus loin les phénomènes spécifiquement non commutatifs, le lecteur intéressé uniquement aux automorphismes de R peut se reporter directement au théorème 8 ci-dessous.

Le théorème de Rokhlin.

Soient (X,B,μ) un espace borélien standard probabilisé et T une transformation borélienne de (X,B) préservant μ . Il existe alors une partition essentiellement unique de X , $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, où chaque X_i est invariant par T et où :

pour $i > 0$, la restriction de T à X_i est périodique de période i avec :

$$\mathrm{Card}\{T^j x\} = i \quad \forall\, x \in X_i$$

pour $i = 0$, la restriction de T à X_o est <u>apériodique</u>, i.e.

$$\mathrm{Card}\{T^j x\} = \infty \quad \forall\, x \in X_o\ .$$

Le théorème de Rokhlin s'énonce alors ainsi : soit T une transformation apériodique de (X,B,μ) , pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n > 0$ il existe un borélien $E \subset X$, tel que $E, TE, \ldots, T^{n-1}(E)$ soient deux à deux disjoints et

$$\mu(X \setminus \bigcup_{j=o}^{n-1} T^j E) < \varepsilon\ .$$

Soient alors $(N,\mathfrak{J})$ un couple (algèbre de von Neumann, trace fidèle normalisée $\mathfrak{J}(1) = 1$) et θ un automorphisme de N préservant $\mathfrak{J}$. Il existe alors une partition de l'unité dans N , $\sum_{j=o}^{\infty} e_j = 1$, où chaque e_j est un projecteur du <u>centre</u> de N invariant par θ et où :

- pour $j > 0$, la restriction de θ à l'algèbre de von Neumann réduite N_{e_j} vérifie : θ^j est intérieur et pour $k < j$ et tout projecteur $e \leq e_j, e \neq 0$, il existe un projecteur $f \neq 0$, $f \leq e$ tel que

$$\|f\theta^k(f)\| \leq \varepsilon\ .$$

- pour $j = 0$, la restriction de θ à l'algèbre de von Neumann N_{e_o} est apériodique : pour tout $k > 0$, tout projecteur non nul $e \leq e_o$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un projecteur $f \neq 0$, $f \leq e$ avec :

$$\|f\theta^k(f)\| \leq \varepsilon \ .$$

Comme dans le cas commutatif cette décomposition est unique. On dit que θ est apériodique quand $e_o = 1$.

THEOREME 2 [12]. - Soient $(N, \mathcal{T})$ un couple (algèbre de von Neumann, trace fidèle normalisée) et θ un automorphisme apériodique de N préservant $\mathcal{T}$. Pour tout entier $n > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition de l'unité $\sum_{j=o}^{n-1} E_j = 1$ dans N , où les E_j sont des projecteurs, telle que :

$$\|\theta(E_j) - E_{j+1}\|_2 \leq \varepsilon \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \quad (E_n = E_o) \ .$$

Ici, comme dans le premier paragraphe on pose, pour $x \in N, \|x\|_2 = (\mathcal{T}(|x|^2))^{\frac{1}{2}}$.

L'entropie (voir [11]).

Soient (X,B,μ,T) comme ci-dessus et $\mathcal{P}$ une partition borélienne de X , on appelle entropie de $\mathcal{P}$ relative à T un scalaire $h(T,\mathcal{P})$ qui compte asymptotiquement $\frac{1}{n}$ fois le logarithme du nombre d'éléments dans la partition composée de $\mathcal{P}, T\mathcal{P}, \ldots, T^{n-1}\mathcal{P}$:

$$h(T,\mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} h(\mathcal{P} \vee T\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{n-1}\mathcal{P})$$

où $h(Q)$, pour une partition $Q = (q_j)_{j \in \{1,\ldots,k\}}$, est $\sum \eta(N(q_j))$

$\eta(t) = -t \operatorname{Log} t \ , \ \forall \ t \in [0,1]$.

On définit alors l'entropie de T comme le sup des $h(T,\mathcal{P})$. C'est un invariant calculable grâce au théorème de Kolmogoroff-Sinai : on a $h(T) = h(T,\mathcal{P})$ pour toute partition $\mathcal{P}$ pour laquelle les $T^j\mathcal{P}$ engendrent la tribu B . En particulier l'entropie d'un shift de Bernouilli : la translation de 1 dans $\prod_{\nu \in \mathbb{Z}} (X_\nu, \mu_\nu)$ où tous les

X_ν sont égaux à $\{1,\dots,p\}$ et tous les μ_ν à la même mesure $j \in \{1,\dots,p\} \to \lambda_j$, on obtient $h(T) = \sum_1^p \eta(\lambda_j)$.

Or les shifts de Bernouilli ont un analogue dans le cas non commutatif, prenons le plus simple qui est associé à un entier p. On considère le produit tensoriel infini $\bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} (M_\nu, \Phi_\nu)$ où pour tout ν on a $M_\nu = M_p(\mathbb{C})$, algèbre des matrices $p \times p$, et Φ_ν = Trace normalisée. Le shift S_p donne alors un automorphisme du couple $(R, \mathfrak{T})$ où R est le facteur hyperfini et $\mathfrak{T}$ sa trace normalisée. On peut alors poser la question : Les S_p sont-ils deux à deux conjugués. Ce problème nous a conduit avec E. Størmer à la généralisation suivante de l'entropie et du théorème de Kolmogoroff-Sinai, qui a permis de distinguer les S_p à conjugaison près :

Le rôle des partitions finies $Q = (q_j)$ de l'expace X est joué par les sous-algèbres de dimension finie $K \subset M$ où M désigne l'algèbre de von Neumann. On définit une fonction $H(K_1,\dots,K_n)$, où $K_1,\dots,K_n$ varient parmi les sous-algèbres de dimension finies de M, qui joue le rôle de $h(P_1 \vee \dots \vee P_n)$. Les propriétés de cette fonction sont établies grâce aux inégalités de E. Lieb concernant l'information non commutative $S(x|y) = \mathfrak{T}(x(\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y))$ où $x, y \in M$ et $\mathfrak{T}$ est la trace normalisée. On définit $H(\theta, K) = \operatorname{lom}_{n\to\infty} H(K, \theta(K), \theta^2(K), \dots, \theta^{n-1}(K))$ et $H(\theta) = \operatorname{Sup}_K H(\theta, K)$. L'analogue du théorème de Kolmogoroff-Sinai montre alors que $H(S_p) = \operatorname{Log} p$ ce qui suffit à distinguer les shifts.

Mais passons maintenant aux phénomènes spécifiquement non commutatifs ; nous verrons par exemple que tous les S_p sont extérieurement conjugués.

Automorphismes approximativement intérieurs.

Soient M une algèbre de von Neumann et M_* son prédual. L'action de $\operatorname{Aut} M$ sur M_*, muni de la topologie normique, est équicontinue ; il en résulte que la topologie de la convergence simple normique dans M_* fait de $\mathrm{Aut}\, M$ un <u>groupe topologique</u>.

Dans la suite quand nous parlerons de $\mathrm{Aut}\, M$ comme groupe topologique nous ferons toujours référence à celle-ci. Pour s'assurer que c'est la bonne structure sur $\mathrm{Aut}\, M$ il suffit de noter que si M_* est de type dénombrable le groupe $\mathrm{Aut}\, M$ est alors <u>Polonais</u>.

En général le groupe $\mathrm{Int}\, M \subset \mathrm{Aut}\, M$ n'est pas fermé, par exemple pour le facteur hyperfini R on a $\overline{\mathrm{Int}\, R} = \mathrm{Aut}\, R$. Plus précisément pour que $\mathrm{Int}\, M$ soit fermé dans $\mathrm{Aut}\, M$, en supposant M fini, il faut et il suffit que M ne possède pas la propriété Γ du premier paragraphe (cf [7] et [40]).

Quand M est un facteur de type II_1 les automorphismes approximativement intérieurs de M sont caractérisés par l'équivalence suivante :

THEOREME 3 [9]. - <u>Soit</u> N <u>un facteur de type</u> II_1, <u>à prédual de type dénombrable, agissant dans l'espace hilbertien</u> $h = L^2(N,\mathfrak{T})$ <u>où</u> $\mathfrak{T}$ <u>désigne la trace normalisée de</u> N. <u>Soit</u> $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\theta \in \overline{\mathrm{Int}\, N}$, i.e. <u>est approximativement intérieur.</u>

b) $\|\sum_{i=1}^{n} \theta(a_i)\, b_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\|$ <u>pour</u> $a_1,\dots,a_n \in N$ et $b_1,\dots,b_n \in N'$ = <u>commutant de</u> N.

La condition b) montre qu'il existe alors un automorphisme α de l'algèbre stellaire $C^*(N\, N')$ engendrée par N et N', tel que $\alpha(a) = \theta(a)$ $\forall\, a \in N$ et $\alpha(b) = b$ $\forall\, b \in N'$.

COROLLAIRE 4. - <u>Soient</u> $(N_i)_{i=1,2}$ <u>des facteurs de type</u> II_1 <u>à prédual de type dénombrable et</u> $(\theta_i)_{i=1,2}$ <u>des automorphismes de</u> N_i, <u>alors</u> :

$\theta_1 \otimes \theta_2$ <u>approximativement intérieur</u> $\Leftrightarrow \theta_1$ <u>et</u> θ_2 <u>approximativement intérieurs.</u>

Automorphismes centralement triviaux.

Soient N un facteur de type II_1 à prédual séparable, $\mathcal{T}$ sa trace normalisée et θ un automorphisme approximativement intérieur de N : $\theta \in \overline{\mathrm{Int}\, N}$.
Il existe une suite d'unitaires de N : $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in N$ on ait :

$$\theta(x) = \lim_{k \to \infty} u_k x u_k^*$$

pour la topologie de $L^2(N, \mathcal{T})$: $\|x-y\|_2 = (\mathcal{T}|x-y|^2)^{\frac{1}{2}}$.
On traduit cette propriété sous forme d'une égalité :

$$\theta(x) = u x u^* \quad \forall\, x \in N$$

en introduisant une algèbre de von Neumann contenant N de la manière suivante :

DEFINITION 5. - Pour tout ultrafiltre $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, soit N^ω l'ultraproduit N^ω = algèbre de von Neumann $\ell^\infty(\mathbb{N}, N)$ quotientée par l'idéal des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n \to \omega} \|x_n\|_2 = 0$.

On démontre que cet ultraproduit est une algèbre de von Neumann finie (cf [17],[48]) bien que, en général l'idéal bilatère mentionné ne soit pas $\sigma(\ell^\infty, \ell^\infty_*)$ fermé.
De plus N se plonge canoniquement dans l'ultraproduit N^ω en associant à $x \in N$ la suite constante $(x)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite d'unitaires $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit un unitaire $u \in N^\omega$ et on a bien entendu $\theta(x) = uxu^*$, pour tout $x \in N$. Cette égalité détermine u de manière unique modulo le groupe unitaire d'une sous-algèbre de von Neumann de N^ω qui joue un rôle crucial dans la suite :

DEFINITION 6. - Soient N et ω comme ci-dessus, on appelle centralisateur asymptotique de N en ω le commutant de N dans N^ω :

$$N_\omega = \{y \in N^\omega \,,\ yx = xy \quad \forall\, x \in N\}.$$

La construction de N_ω est fonctorielle de sorte que chaque automorphisme θ de N définit un automorphisme θ_ω de N_ω.

Soient alors comme ci-dessus $\theta \in \overline{\mathrm{Int}\, N}$ et $u \in N^\omega$ unitaire tel que :

$$\theta(x) = u x u^* \quad \forall\, x \in N .$$

La question est : peut-on choisir u tel que $\theta^\omega(u) = u$.
On peut multiplier u par un unitaire v de N_ω sans changer l'égalité $\theta(x) = u x u^*$, $x \in N$, il s'agit donc, en posant $w = u^* \theta^\omega(u)$ de trouver $v \in N_\omega$, avec $v^* \theta_\omega(v) = u$. Par construction w est un unitaire de N_ω et il s'agit donc de caractériser les unitaires de N_ω de la forme $v^* \theta_\omega(v)$, $v \in N_\omega$. Le théorème de Rokhlin de théorie ergodique non commutative donne une réponse complète à ce problème sous la forme :

1) La partition de l'unité du centre de N_ω associée à l'automorphisme θ_ω de N_ω est formée d'un unique $e_j = 1$ et θ_ω^k est extérieur pour $k < j$ et égal à 1 pour $k = j$.

2) Pour qu'un unitaire $w \in N_\omega$ soit de la forme $v^* \theta_\omega(v), v \in N_\omega$ il faut et il suffit que $w\, \theta_\omega(w) \ldots \theta_\omega^{j-1}(w) = 1$.

De plus l'entier j ne dépend que de θ et non du choix de $\omega \in \beta\, \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ on le note $p_a(\theta)$ = période asymptotique de θ. C'est la période de θ modulo le sous-groupe normal $\mathrm{Ct}\, N$ de $\mathrm{Aut}\, N$ des automorphismes de N qui sont <u>centralement triviaux</u> au sens suivant :

$\theta \in \mathrm{Ct}\, N$ ssi $\theta_\omega = 1$ (pour un $\omega \in \beta\, \mathbb{N}/\mathbb{N}$ ou de manière équivalente pour tout $\omega \in \beta\, \mathbb{N}/\mathbb{N}$).

Revenons après cette définition au problème ci-dessus, il s'agit donc de savoir si avec $j = p_a(\theta)$ et $w = u^* \theta^\omega(u)$, on a $w \theta_\omega(w) \ldots \theta_\omega^{j-1}(w) = 1$. Cela revient à savoir si $(\theta^{\omega})^j(u) = u$. Or la période de θ^{ω} est la même que celle de θ et il s'agit de la comparer avec $p_a(\theta)$, on a :

$$\theta^{p_a} = 1\ ,\ \theta \in \overline{\operatorname{Int} N} \Rightarrow \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ unitaires de } N \text{ tels que}$$

$$\theta(u_n) - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ,\ \theta(x) = \lim_{n\to\infty} u_n x u_n^* \quad \forall\, x \in N\ .$$

En particulier si $p_a = 0$ la condition est satisfaite.

C'est là la motivation principale pour chercher à déterminer en général le groupe $\operatorname{Ct} N$. Le théorème suivant se déduit de [9].

THEOREME 7. - <u>Soient</u> N <u>un facteur de type</u> II_1, <u>à prédual de type dénombrable, agissant dans</u> $h = L^2(N,\mathfrak{T})$ <u>et</u> $\theta \in \operatorname{Aut} N$, U <u>l'unitaire de</u> $L^2(N,\mathfrak{T})$ <u>associé à</u> θ <u>(la construction de</u> L^2 <u>est fonctorielle). Soient</u> $p = p_a(\theta)$ <u>la période asymptotique de</u> θ <u>et</u> $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$. <u>Alors, pour que</u> $\lambda^p = 1$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un automorphisme</u> α_λ <u>de l'algèbre stellaire engendrée par</u> N, N' <u>et</u> U <u>tel que</u> :

$$\alpha_\lambda(U) = \lambda U\ ,\ \alpha_\lambda(A) = A \quad \forall\, A \in C^*(N,N')\ .$$

Pour $N = R$ le facteur hyperfini on a $\operatorname{Ct} R = \operatorname{Int} R$. Le théorème ci-dessus montre également que $\theta_1 \otimes \theta_2 \in \operatorname{Ct}(N_1 \otimes N_2)$ si et seulement si θ_1 et θ_2 sont centralement triviaux. Une autre caractérisation intéressante de $\operatorname{Ct} N$, pour N facteur de type II_1 tel que $\varepsilon(\overline{\operatorname{Int} N})$ soit non commutatif, où ε désigne l'application quotient : $\operatorname{Aut} N \to \operatorname{Out} N$, est la suivante : ([12]).

$$\varepsilon(\operatorname{Ct} N) \text{ est le commutant de } \varepsilon(\overline{\operatorname{Int} N}) \text{ dans } \operatorname{Out} N\ .$$

(Il suffit de connaître $\varepsilon(\operatorname{Ct} N)$ pour connaître $\operatorname{Ct} N$ car on a toujours $\operatorname{Int} N \subset \operatorname{Ct} N$).

L'obstruction $\gamma(\theta)$.

Soient M un facteur et $\theta \in \mathrm{Aut}\, M$. Soit $p_o(\theta) \in \mathbb{N}$ la période de θ modulo les automorphismes intérieurs :

$$\theta^j \in \mathrm{Int}\, M \Leftrightarrow j \in p_o \mathbb{Z} .$$

C'est un invariant de conjuguaison extérieure de θ , supposons $p_o \neq 0$, et cherchons θ' extérieurement conjugué à θ tel que $\theta'^{p_o} = 1$. On a un homomorphisme de $\mathbb{Z}/p_o\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Out}\, M$ et il s'agit de le relever dans $\mathrm{Aut}\, M$. Comme le centre du groupe unitaire $\mathcal{U}$ de M est égal au tore $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, l'obstruction associée à ce problème est un élément de $H^3(\mathbb{Z}/p_o\mathbb{Z}, \mathbb{T})$, où l'action de $\mathbb{Z}/p_o\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{T}$ est triviale. Cette obstruction $\gamma(\theta)$ est en fait la racine p_o - ième de 1 dans $\mathbb{C}$ caractérisée par l'égalité :

$$u \in \mathcal{U},\ \theta^{p_o}(x) = u x u^* \quad \forall\, x \in M \Rightarrow \theta(u) = \gamma u .$$

Le point important est alors l'existence d'automorphismes θ , de facteurs comme le facteur hyperfini, dont l'obstruction $\gamma(\theta)$ est $\neq 1$. On peut se convaincre facilement de cette existence par l'exemple suivant : partons de $(X,B,\mu,(F_t)_{t \in \mathbb{R}})$ où (X,B,μ) est un espace borélien standard probabilisé et où $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre (borélien) de transformations boréliennes préservant la mesure μ . Supposons que chaque $F_t, t \neq 0$ est ergodique (par exemple on peut prendre un flot de Bernouilli ([38])). Alors le produit croisé R de $L^\infty(X,B,\mu)$ par l'automorphisme associé à F_1 est le facteur hyperfini. L'algèbre de von Neumann $L^\infty(X,B,\mu)$ est contenue dans R et l'unitaire $U \in R$ correspondant à F_1 vérifie :

$$U f U^* = f \circ F_1 \quad \forall\, f \in L^\infty(X,B,\mu)$$

$$L^\infty(X,B,\mu) \text{ et } U \text{ engendrent } R .$$

Comme F_t, $t \in \mathbb{R}$, commute avec F_1, il définit un automorphisme θ_t de $\mathbb{R}$ tel que $\theta_t(U) = U$ et $\theta_t(f) = f \circ F_t$, $f \in L^\infty(X,B,\mu)$. De plus pour chaque nombre complexe λ de module 1, on définit un automorphisme σ_λ de R tel que $\sigma_\lambda(f) = f \quad \forall f \in L^\infty(X,B,\mu)$ et $\sigma_\lambda(U) = \lambda U$. Par construction les θ et les σ commutent entre eux et $\theta_1(x) = UxU^* \quad \forall x \in R$. Posons $\alpha = \theta_{\frac{1}{p}} \sigma_\gamma$ où $p \in \mathbb{N}$ alors $\alpha^p = \theta_1 \sigma_{\gamma^p}$ de sorte que si $\gamma^p = 1$ on a $\alpha^p(x) = UxU^* \quad \forall x \in R$ et $\alpha(U) = \gamma U$. On en déduit que $\gamma_o(\alpha) = p$ et que $\gamma(\alpha) = \gamma$.

Ce qui est intéressant dans cet invariant $\gamma(\theta)$ c'est que c'est un nombre complexe en général non réel, en particulier si on fait agir θ non sur M mais sur M^c, le facteur obtenu en remplaçant λx, $\lambda \in \mathbb{C}$ $x \in M$ par $\bar{\lambda} x$, on obtient $\gamma(\theta^c) = \bar{\gamma}(\theta)$. En fait c'est le premier invariant qui soit sensible à l'automorphisme $z \to \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ et c'est celui qui permet de construire un facteur (de type III ou de type II_1 ([6])) non antiisomorphe à lui-même (voir paragraphe 1, l'algèbre M^c est isomorphe à M^o pour l'opération $x \to x^*$).

La liste des automorphismes de R à conjuguaison extérieure près.

Pour le facteur hyperfini R, on a $\overline{\operatorname{Int} R} = \operatorname{Aut} R$ et $\operatorname{Ct} R = \operatorname{Int} R$.
En particulier $p_a(\theta) = p_o(\theta) \quad \forall \theta \in \operatorname{Aut} R$. On dispose donc de deux invariants de conjuguaison extérieure, l'entier $p_o(\theta)$ et la racine p_o-ième de 1, $\gamma(\theta)$, égale à 1 si $p_o(\theta) = 0$.

On a vu d'autre part l'existence d'un automorphisme de R ayant un couple (p_o, γ) d'invariants, donné à priori.

THEOREME 8 ([12]). - Soient θ_1 et θ_2 deux automorphismes de R. Alors θ_1 et θ_2 sont extérieurement conjugués si et seulement si :

$$p_o(\theta_1) = p_o(\theta_2)\,,\ \gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2)\,.$$

Pour $p_o = p \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma^p = 1$, il existe en fait un automorphisme s_p^γ, unique à conjuguaison près, de R, ayant pour invariants $p_o(s_p^\gamma) = p$ et $\gamma(s_p^\gamma) = \gamma$ et dont la période soit la plus petite compatible avec ces conditions c'est-à-dire égale à p ordre de γ.

En particulier, toutes les symétries extérieures de R, $\theta \in \mathrm{Aut}\, R$, $\theta^2 = 1$, $\theta \notin \mathrm{Int}\, R$ sont deux à deux conjuguées. La réalisation la plus simple de la symétrie s_2' consiste à prendre l'automorphisme de $R \otimes R$ qui transforme $x \otimes y$ en $y \otimes x$, pour tous $x, y \in R$.

Pour $p_o = 0$, il existe à conjuguaison extérieure près un seul automorphisme apériodique $\theta \in \mathrm{Aut}\, R$ (i.e. avec $p_o(\theta) = 0$). En particulier tous les shifts de Bernouilli bien que distingués à conjuguaison près par l'entropie, sont extérieurement conjugués.

COROLLAIRE 9. - <u>Le groupe</u> $\mathrm{Out}\, R$ <u>est un groupe simple ayant un nombre dénombrable de classes de conjuguaison.</u>

En fait on a un résultat plus général que le théorème ci-dessus, qui montre exactement le rôle joué par les égalités $\overline{\mathrm{Int}}\, R = \mathrm{Aut}\, R$ et $\mathrm{Ct}\, R = \mathrm{Int}\, R$. D'abord on démontre pour tout facteur M à prédual M_* de type dénombrable l'équivalence entre :

$$\overline{\mathrm{Int}\, M} / \mathrm{Int}\, M \text{ est non commutatif} \Leftrightarrow M \text{ isomorphe à } M \otimes R .$$

Soit alors $\theta \in \overline{\mathrm{Int}\, M}$, pour que θ soit extérieurement conjugué à l'automorphisme $1 \otimes s_p^\gamma$ de $M \otimes R$, pour p et γ convenables, il faut et il suffit que $p_o(\theta) = p_a(\theta)$.

En outre, pour que $\theta \in \mathrm{Aut}\, M$ soit extérieurement conjugué à $\theta \otimes s_q^1 \in \mathrm{Aut}\, M \otimes R$ il faut et il suffit que q divise la période asymptotique $p_a(\theta)$. En particulier tout automorphisme θ de M est conjugué extérieurement à $\theta \otimes 1$.

Ces résultats montrent l'intérêt de l'invariant $\chi(M) = \dfrac{\mathrm{Int}\, M \cap \mathrm{Ct}\, M}{\mathrm{Int}\, M}$, nous allons les appliquer au facteur d'Araki Woods de type II_∞ .

<u>Automorphismes du facteur d'Araki Woods</u> $R_{o,1}$ <u>de type</u> II_∞ .

Le produit tensoriel $R_{o,1}$ du facteur hyperfini R par un facteur de type I_∞ est l'unique facteur d'Araki Woods de type II_∞ (voir [2]). Rappelons que pour tout automorphisme θ d'un facteur de type II_∞ noté N on pose $\mathrm{mod}\,\theta =$ unique $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathfrak{T} \circ \theta = \lambda \mathfrak{T}$ pour toute trace sur N . Pour $N = R_{o,1}$ on a :

$$\overline{\mathrm{Int}}\, R_{o,1} = \text{Noyau de mod} = \{\theta, \mathrm{mod}(\theta) = 1\} .$$

De plus $\mathrm{Ct}\, R_{o,1}^{\bullet} = \mathrm{Int}\, R_{o,1}$. On en déduit :

THEOREME 10. ([12]). - a) <u>Soient</u> θ_1 <u>et</u> θ_2 <u>deux automorphismes de</u> $R_{o,1}$ <u>tels, pour que</u> θ_1 <u>soit extérieurement conjugué à</u> θ_2 <u>il faut et il suffit que</u>

$$\mathrm{mod}\,\theta_1 = \mathrm{mod}\,\theta_2 \quad p_o(\theta_1) = p_o(\theta_2) \quad \gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2) .$$

b) <u>Les relations suivantes sont les seules entre</u> mod, p_o <u>et</u> γ :

$$\mathrm{mod}\,\theta \neq 1 \Rightarrow p_o = 0 , \gamma = 1 ; \; p_o = 0 \Rightarrow \gamma = 1 .$$

Alors que le cas $\mathrm{mod}\,\theta = 1$ se réduit au cas traité ci-dessus, pour tout $\lambda \neq 1$, il résulte de [13] et du a) du théorème ci-dessus que tous les automorphismes $\theta \in \mathrm{Aut}\, R_{o,1}$ avec $\mathrm{mod}\,\theta = \lambda$ sont <u>conjugués</u> (et non seulement extérieurement conjugués). C'est là un phénomène remarquable, en effet on peut décrire, pour λ <u>entier</u>, la nature de θ avec précision comme un shift sur un produit tensoriel infini d'algèbres de matrices $\lambda \times \lambda$.

Ainsi, dès que $\mathrm{mod}\,\theta = \lambda$, il existe une algèbre de matrice $\lambda \times \lambda$ dans $R_{o,1}$ notons la $K \subset R_{o,1}$, telle que :

1) Les $\theta^j(K)$ commutent deux à deux.

2) Les $\theta^j(K)$ engendrent l'algèbre de von Neumann $R_{o,1}$.

Et cette propriété reste vraie chaque fois que l'on multiplie θ par un automorphisme de module 1.

En fin de compte, nous avons atteint la réponse au problème 2 du paragraphe sur les facteurs de type III_λ et nous pouvons conclure que pour chaque $\lambda \in]0,1[$ il y a un seul facteur de type III_λ dont le facteur de type II_∞ associé est $R_{o,1}$. On vérifie directement pour le facteur R_λ de Powers que le facteur de type II_∞ associé est $R_{o,1}$. Cela montre l'intérêt du sous-problème suivant du problème 1 du paragraphe des III_λ : caractériser le facteur $R_{o,1}$ parmi les facteurs de type II_∞, on adopte la définition suivante :

DEFINITION 11. - <u>Une algèbre de von Neumann</u> M <u>à prédual de type dénombrable est dite approximativement de dimension finie si elle est engendrée par une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie.</u>

(On peut aussi (voir [20]) de manière équivalente demander l'approximation de toute partie finie de M par une sous-algèbre de dimension finie).

Il est immédiat que $R_{o,1}$ et plus généralement tout facteur d'Araki Woods et même de Krieger est approximativement de dimension finie.

On peut alors reformuler le problème ci-dessus comme :

PROBLEME 3. - $R_{o,1}$ <u>est-il le seul facteur de type</u> II_∞ <u>qui soit approximativement de dimension finie.</u>

Ce problème revient à savoir si le commutant d'un facteur ayant cette propriété d'approximation l'a aussi. Vers 1967 V.Ya Golodets proposait une démonstration, malheureusement elle contenait une erreur irréparable. Cependant dans un autre article, le même Golodets utilisait son résultat pour en déduire qu'un produit croisé par un groupe commutatif n'affecte pas la propriété d'approximation ci-dessus.

Bien que bâtis sur une hypothèse non démontrée, ses raisonnements montraient cependant (cf [23]) que si un facteur M de type III_γ est approximativement de dimension finie, il en est de même du facteur de type II_∞ associé. Ceci renforçait donc considérablement l'intérêt du problème ci-dessus.

Pour clore ce paragraphe signalons que quand on ne suppose plus que le facteur de type II_∞, N, est isomorphe à $R_{0,1}$ il y a en général pour $\lambda \in]0,1[$ une infinité de classes de conjuguaison dans $\operatorname{Out} N$, d'automorphismes θ de module λ (cf [7] et [36]), à chacune de ces classes va correspondre un facteur de type III_λ et les facteurs correspondant seront deux à deux non isomorphes.

VIII. LES ALGEBRES DE VON NEUMANN MOYENNABLES.

Nous passons en revue dans ce paragraphe les propriétés reliées à l'approximation d'une algèbre de von Neumann M par des algèbres de dimension finie. Nous verrons ci-dessous qu'elles définissent en fait toutes la même classe d'algèbre de von Neumann.

Approximation par des algèbres de dimension finie.

Par définition une algèbre de von Neumann M est approximativement de dimension finie quand elle est engendrée par une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie.

Une raison importante de l'intérêt de cette classe est le résultat suivant dû à O. Maréchal, basé sur la démonstration du théorème de Glimm.

THEOREME 1. (O. Maréchal [30]). Soit A une algèbre stellaire de type dénombrable non postliminaire. Alors pour toute algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie M, sans trace finie non nulle, il existe un état $\Phi \in A^*$, tel que l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Phi(A)$ (paragraphe III) soit isomorphe à M.

Ainsi une théorie de l'intégration non commutative qui ne se limite pas aux algèbres stellaires postliminaires, c'est-à-dire aux algèbres de von Neumann de type I, voit apparaître nécessairement toutes les algèbres de von Neumann qui sont approximativement de dimension finie.
Inversement, pour l'algèbre stellaire A produit tensoriel infini d'algèbres de matrices 2×2 , il est immédiat que toutes les algèbres de von Neumann engendrées par A sont approximativement de dimension finie.

Les propriétés P de Schwartz, E de Hakeda et Tomiyama et l'injectivité.

Avant 1963, on avait seulement deux exemples de facteurs de type II , non isomorphes (à prédual de type dénombrable bien entendu). Ainsi la propriété Γ distinguait le facteur hyperfini R du facteur Z engendré par la représentation régulière du groupe libre à 2 générateurs. En 1963, J.T. Schwartz introduisit une propriété permettant de distinguer R de $Z \otimes R$ qui tous deux ont la propriété Γ .
Cette propriété P de R est basée sur la moyennabilité d'un groupe localement fini. En fait J. Schwartz montrait que pour G discret il y a équivalence entre :

1) G est moyennable i.e. il existe un état Φ invariant par translations sur $\ell^\infty(G)$.

2) $M = R(\lambda_G)$ agissant dans $h = \ell^2(G)$ a la propriété P suivante :
Pour tout $T \in \mathcal{L}(h)$ il existe un élément de M dans l'enveloppe convexe $\sigma(\mathcal{L}(h), \mathcal{L}(h)_*)$ fermée des uTu^* , u unitaire de M' . En outre, il construisait pour toute algèbre de von Neumann dans h vérifiant 2) une projection linéaire de norme 1 de $\mathcal{L}(h)$ sur M , vérifiant $P(aTb) = aP(T)b$, $\forall\, a,b \in M$, $T \in \mathcal{L}(h)$.
On vérifie directement que toute algèbre de von Neumann approximativement de dimension finie vérifie la propriété P de Schwartz.
Un résultat remarquable de J. Tomiyama montre que pour toute projection P de norme 1 d'une algèbre de von Neumann N sur une sous-algèbre de von Neumann M

on a automatiquement : (cf [47])

$$P(aTb) = aP(T)b \quad \forall\, a,b \in M\,,\ T \in N\ .$$

Dans [25] Hakeda et Tomiyama définissaient une propriété en apparence plus faible que la propriété P de Schwartz :

DEFINITION 2. - <u>Une algèbre de von Neumann</u> M <u>dans l'espace hilbertien</u> h <u>a la propriété</u> E <u>si il existe une projection de norme</u> 1 <u>de l'espace de Banach</u> $\mathcal{L}(h)$ <u>sur l'espace de Banach</u> $M \subset \mathcal{L}(h)$.

Bien sûr $P \Rightarrow E$, de plus le théorème mentionné ci-dessus de Tomiyama montrait que E joue le même rôle que P pour caractériser la moyennabilité de G discret par une propriété de $R(\lambda_G)$. De plus la propriété E ne dépend pas de l'espace hilbertien h dans lequel M agit et elle caractérise, grâce à un théorème de W. Arveson ([3]) les objets injectifs de la catégorie (algèbres de von Neumann, applications complètement positives). C'est pourquoi les algèbres de von Neumann vérifiant la propriété E sont aussi appelées <u>injectives</u>.

L'intérêt de la propriété E n'est pas descriptif : elle dit très peu en apparence sur l'algèbre de von Neumann M , mais d'un autre côté elle a des propriétés remarquables de stabilité :

1) Soit M une algèbre de von Neumann injective opérant dans l'espace hilbertien h , alors le commutant M' de M est injectif.

2) Soit $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante d'algèbres de von Neumann injectives alors $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha$ est injective.

3) Soit $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante croissante d'algèbres de von Neumann injectives, alors la fermeture de $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ l'est aussi.

4) Soit M une algèbre de von Neumann à prédual de type dénombrable

et $M = \int_X M(t)d\mu(t)$ une désintégration de M en facteurs $M(t)$, alors M est injective $\Leftrightarrow M(t)$ est injectif pour presque tout $t \in X$.

5) Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann et $\mathcal{G}$ un sous-groupe du normalisateur de N dans M, on suppose que N et $\mathcal{G}$ engendrent M que N est injective et $\mathcal{G}$ moyennable comme groupe discret, alors M est injective.

6) Soient M une algèbre de von Neumann injective et G un groupe discret moyennable agissant par automorphismes sur M, alors

$$N = M^G = \{x \in M, gx = x \quad \forall g \in G\}$$

est injective.

Les propriétés 2) et 3) montrent que si h est un espace hilbertien de type dénombrable, la classe monotone engendrée par les algèbres de von Neumann de type I ne contient que des algèbres de von Neumann injectives.
La propriété 4) permet essentiellement de limiter le problème de classification de ces algèbres à celle des facteurs injectifs. La propriété 5) montre que tout groupe moyennable d'unitaires engendre une algèbre de von Neumann injective.
Enfin, la propriété 6) permet de voir facilement que pour qu'un facteur M de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$ soit injectif il faut et il suffit que le facteur de type II_∞ associé le soit.
Parmi les exemples les plus importants d'algèbres de von Neumann injectives on a :

a) Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un groupe localement compact moyennable.

b) L'algèbre de von Neumann commutant d'une représentation unitaire continue quelconque d'un groupe localement compact connexe.

c) L'algèbre de von Neumann engendrée par une représentation arbitraire d'une algèbre stellaire nucléaire (voir paragraphe 2).

La démonstration de c) (voir [19] conduit à une nouvelle classe :

Algèbres de von Neumann semi-discrètes.

Soit M un facteur de type I dans un espace hilbertien h , il lui correspond alors une décomposition de h en produit tensoriel $h = h_1 \otimes h_2$ de sorte que $M = \mathcal{L}(h_1) \otimes 1$, $M' = 1 \otimes \mathcal{L}(h_2)$. On retrouve alors $\mathcal{L}(h)$ comme produit tensoriel de M par M' . Dans l'un des premiers articles de Murray et von Neumann, ceux-ci montrent que pour tout facteur M dans h , l'homomorphisme η du produit tensoriel algébrique $M \odot M' = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \text{ , } a_i \in M \text{ , } b_i \in M' \}$ dans $\mathcal{L}(h)$ défini par :

$$\eta(\Sigma\, a_i \otimes b_i) = \Sigma\, a_i b_i \in \mathcal{L}(h)$$

est injectif et d'image $\sigma(\mathcal{L}(h), \mathcal{L}(h)_*)$ dense.

Dans [19], E. Effros et C. Lance ont réussi à pousser l'analyse beaucoup plus loin en étudiant η d'un point de vue métrique. Soit A (resp B) une algèbre stellaire avec unité opérant dans l'espace hilbertien h_A (resp h_B) , et considérons sur le produit tensoriel algébrique $A \odot B$ la norme provenant de son action dans $h_A \otimes h_B$. Cette norme sur $A \odot B$ fait du complété une algèbre stellaire, ne dépend pas du choix des représentations (fidèles) de A dans h_A et B dans h_B , et est caractérisée grâce à un très utile théorème de M. Takesaki comme étant la plus petite norme sur $A \odot B$ qui fait du complété une algèbre stellaire. On la note $\| \; \|_{min}$ et on note $A \otimes_{min} B$ l'algèbre stellaire complétée ([44]).

E. Effros et C. Lance ont réussi à caractériser les facteurs M pour lesquels l'application η ci-dessus est isométrique par une propriété qui est un renforcement de la propriété d'approximation métrique pour le prédual M_* de M .

Le prédual M_* est non seulement un espace ordonné (par le cône M_*^+) il est matriciellement ordonné, au sens où l'espace vectoriel produit tensoriel $M_* \otimes M_n(\mathbb{C})$ est ordonné pour tout n, comme prédual de $M \otimes M_n(\mathbb{C})$. Une application complètement positive T de M_* dans M_* est par définition une application linéaire telle que $T \otimes 1_{M_n}$ soit positive pour tout n. Le résultat d'Effros et Lance est alors :

THEOREME 3. - Soit M un facteur opérant dans l'espace hilbertien h, pour que $\eta : M \otimes_{\min} M' \to \mathcal{L}(h)$ soit isométrique il faut et il suffit que l'application identique de M_* dans M_* soit une limite simple normique d'applications complètement positives de rang fini.

On définit alors une algèbre de von Neumann semi-discrète par la propriété d'approximation ci-dessus de son prédual M_*.

Notons que quand le facteur M est tel que ni M ni M' ne sont de type I_∞ ou II_∞, et quand h est de type dénombrable, un corollaire du théorème de Takesaki sur la norme min, permet de montrer :

COROLLAIRE 4. - Un facteur M opérant dans h de type dénombrable, tel que ni M ni M' ne sont de type I_∞ ou II_∞, est semi-discret si et seulement si l'algèbre $C^*(M,M')$ engendrée par M et M' dans h est simple (i.e. sans idéal bilatère non trivial).

Ce corollaire est très important si on le rapproche de la caractérisation suivante des facteurs de type II_1 ne possédant pas la propriété Γ :

THEOREME 5. ([9]). - Soit M un facteur de type II_1, à prédual de type dénombrable, opérant dans $L^2(M,\mathfrak{T}) = h$ et soit $C^*(M,M')$ l'algèbre stellaire engendrée par M et M' alors :

M n'a pas la propriété $\Gamma \Leftrightarrow C^*(M,M')$ contient l'idéal $k(h)$ des opérateurs compacts.

Un exemple de facteur de type II_1 pour lequel $C^*(M,M')$ contient l'idéal $k(\mathcal{h})$ avait été donné auparavant par C. Akemann et P. Ostrand dans [1]. Ainsi, joint au corollaire le théorème montre que tout facteur semi-discret de type II_1, à la propriété Γ.

En fait, dans leur article [19], E. Effros et C. Lance démontraient que tout facteur d'Araki-Woods est semi-discret et l'implication :

$$\text{Semi-discret} \Rightarrow \text{Injectif.}$$

On peut donc résumer les relations entre les diverses propriétés relatives à l'approximation par des algèbres de dimension finie sous forme d'un diagramme :

Approximativement de dimension finie

$\Downarrow$

Propriété P de Schwartz

$\Downarrow$ Semi discret $\swarrow$

Propriété E de Hakeda-Tomiyama = Injectivité

Heureusement la situation est en fait remarquablement simple :

THEOREME 6 ([9]). - Soit $\mathcal{h}$ un espace hilbertien de type dénombrable. Pour toute algèbre de von Neumann opérant dans $\mathcal{h}$ les quatre propriétés ci-dessus sont équivalentes.

Nous remettons au paragraphe suivant la description des corollaires de ce théorème relatifs au problème de classification. Commençons par un problème de terminologie : on dispose à coup sûr de la bonne classe d'algèbres de von Neumann pour la théorie non commutative de l'intégration vu que d'après le théorème de O. Maréchal, celle-ci doit traiter au moins le cas "approximativement de dimension finie" et d'après les résultats de Effros et Lance le cas "propriété E" suffit à rendre compte

de toutes les algèbres de von Neumann associées aux algèbres stellaires nucléaires. Dans [9] nous avons adopté la terminologie "algèbres de von Neumann injectives" pour désigner la classe ci-dessus, parmi les avantages de ce choix se trouve surtout la simplicité de la définition grâce à la propriété E . Mais cette terminologie a l'inconvénient de ne rendre compte ni qu'il s'agit d'une propriété d'approximation, ni de l'analogie avec la moyennabilité des groupes discrets.
La solution semble donc de choisir la terminologie "algèbres de von Neumann moyennables" qui heureusement est justifiée par l'équivalence entre les quatre propriétés ci-dessus et la cinquième :

DEFINITION 7. - _Une algèbre de von Neumann_ M _est moyennable si et seulement si pour tout bimodule de Banach dual normal_ X _sur_ M _toute dérivation de_ M _à coefficients dans_ X _est intérieure_.

Nous renvoyons aux articles de Johnson Kadison et Ringrose qui ont établi les bases de la cohomologie des algèbres de von Neumann à coefficients dans des bimodules de Banach ([26] [27]).
Ayant accepté le terme _moyennable_ pour désigner notre classe d'algèbres de von Neumann, on a alors le corollaire suivant des théorèmes ci-dessus, dû à Effros et Choi [4] (voir Aussi ([19])).

COROLLAIRE 8. - _Soit_ A _une algèbre stellaire de type dénombrable, alors_ A _nucléaire_ $\Leftrightarrow$ _l'algèbre de von Neumann_ $\pi_\Phi(A)''$ _engendrée par_ A _est moyennable pour tout état_ Φ _sur_ A .

IX. CLASSIFICATION DES FACTEURS MOYENNABLES ET LE PROBLEME III_1 .

Dans tout ce paragraphe toutes les algèbres de von Neumann étudiées sont supposées avoir un prédual de type dénombrable. Le seul obstacle qui reste, à la compréhension idéale des algèbres de von Neumann moyennables est le suivant :

Problème : Existe-t'il à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type III_1 .

Nous allons traiter tous les autres cas un par un et nous reviendrons ensuite à ce problème.

Facteurs de type II_1 . Il existe à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type II_1 , c'est R , le facteur hyperfini. En fait, on en a la caractérisation suivante, qui justifie la terminologie hyperfini et la terminologie moyennable.

THEOREME 1. ([9]). - *Soient h un espace hilbertien de type dénombrable et N un facteur (de dimension infinie) dans h alors :*

N isomorphe à $R \Leftrightarrow \exists\, \Phi$ état sur $\mathcal{L}(h)$ tel que

$$\Phi(xT) = \Phi(Tx) \quad \forall\, x \in N \,,\ T \in \mathcal{L}(h) \ .$$

Cela justifie le terme "hyperfini" car Φ est mieux qu'une trace sur N . Cela justifie le terme "moyennable" et en fait l'analogie avec la "moyennabilité" d'un groupe discret est très utile. Un tel groupe G est moyennable quand il existe un état ψ sur $\ell^\infty(G)$ invariant par translation. Ici le rôle de G est joué par N , celui de $\ell^\infty(G)$ par l'algèbre de von Neumann $\mathcal{L}(h)$ où $h = L^2(N,\mathfrak{T})$ et l'existence d'une hypertrace équivaut à l'existence d'une moyenne invariante.
A la condition de Følner caractérisant les groupes discrets moyennables :
$\forall\, g_1,\dots,g_n \in G$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F$ partie finie de G avec

$$\|\chi_F - g_i\chi_F\|_2 \leq \varepsilon\|\chi_F\|_2$$

où χ_F désigne la fonction caractéristique de F et $\|\ \|_2$ est la norme de l'espace $\ell^2(G)$, correspond la condition suivante sur N agissant dans $h = L^2(N,\mathfrak{T})$:

$\forall\, x_1,\dots,x_n \in N$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, P$ projecteur de dimension finie dans h avec :

$$\|x_i P - P x_i\|_{HS} \le \varepsilon \|P\|_{HS}$$

où $\|T\|_{HS} = (\mathrm{Trace}\ (|T|^2))^{\frac{1}{2}}$ désigne la norme de Hilbert Schmidt. C'est de cette condition que l'on déduit par exemple que N est alors semi-discret, on utilise ensuite les théorèmes de théorie ergodique non commutative pour aboutir au résultat : sur $N \otimes N$ la symétrie de Sakai $\sigma_N \in \mathrm{Aut}(N \otimes N)$ définie par

$$\sigma_N(x \otimes y) = y \otimes x \ , \ \forall\, x,y \in N \quad \text{vérifie} \quad \sigma_N \in \overline{\mathrm{Int}}(N \otimes N) \ .$$

Nous renvoyons à [9] pour plus de renseignements. Citons maintenant quelques corollaires du théorème :

COROLLAIRE 2. - <u>Tout sous-facteur</u> N <u>de</u> R <u>est soit de dimension finie (i.e. isomorphe à</u> $M_n(\mathbb{C})$) , <u>soit isomorphe à</u> R .

Ainsi R est <u>l'unique facteur</u> qui soit contenu dans tous les autres. De plus, et c'est là une conséquence de la <u>théorie de réduction</u>, on connaît à isomorphisme près toutes les sous-algèbres de von Neumann de R , ce sont les algèbres produit d'algèbres de von Neumann de la forme $C \otimes M_n(\mathbb{C})$, $n < \infty$ et $C \otimes R$ où C est abélienne.

Le facteur R restera sans doute le seul pour lequel une telle classification des sous-algèbres de von Neumann est possible.

COROLLAIRE 3. - <u>Soit</u> G <u>un groupe discret dénombrable moyennable et</u> $R(\lambda_G)$ <u>l'algèbre de von Neumann de sa représentation régulière dans</u> $\ell^2(G)$, <u>alors</u> $R(\lambda_G)$ <u>est un produit d'algèbres</u> $C \otimes M_n(\mathbb{C})$, $C \otimes R$, C <u>abélienne</u>.

En particulier tous les groupes discrets dénombrables résolubles n'ayant que des classes de conjuguaison infinies vérifient $R(\lambda_G)$ isomorphe à R .

Facteurs de type II_∞ .

Il existe à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type II_∞ , c'est le facteur d'Araki et Woods $R_{0,1}$. Ceci résout le problème 3 et montre que $R_{0,1}$ est le seul facteur de type II_∞ qui soit approximativement de dimension finie.

La démonstration est très indirecte puisqu'on part de N de type II_∞ on l'écrit $N = M \otimes F$ où M est de type II_1 et F de type I_∞ et on utilise uniquement le fait que M hérite de N la propriété E pour en déduire que M est isomorphe à R , d'où N à $R_{0,1}$.

COROLLAIRE 4. - Soient G un groupe localement compact connexe de type dénombrable, λ la représentation régulière de G dans $L^2(G)$. Alors les seuls facteurs qui apparaissent dans la désintégration de $R(\lambda_G)$ sont soit de type I soit isomorphe à $R_{0,1}$.

Ce résultat découle du théorème ci-dessus et d'un théorème de Dixmier et Pukanszky qui montre qu'aucun facteur de type III n'intervient dans la désintégration de $R(\lambda_G)$.

Facteurs de type III_λ $\lambda \in]0,1[$. Il existe à isomorphisme près un seul facteur moyennable de type III_λ , c'est le facteur de Powers R_λ .

On montre en effet que si M est un facteur de type III_λ ayant la propriété E , le facteur N de type II_∞ qui lui est associé comme au paragraphe VI, vérifie aussi E . Ainsi $N = R_{0,1}$ et les résultats de théorie ergodique non commutative montrent qu'il y a sur $R_{0,1}$. une seule classe d'automorphismes de module λ d'où le résultat.

Facteurs de type III_0 .

L'analyse des facteurs moyennables de type III_0 résulte de 3 contributions différentes : 1) Les théorèmes d'unicité cités plus haut. 2) La théorie de dualité de Takesaki utilisée par l'invariant des facteurs qu'elle fournit : le flot des poids. 3) La théorie de Krieger sur l'équivalence faible des transformations.

La discussion de 2) serait trop longue ici, disons simplement qu'à travers des problèmes précis comme celui de la distinction entre facteurs de Krieger et facteurs d'Araki-Woods, on est arrivé à affiner de mieux en mieux les invariants dans le cas III_o (voir [8] en particulier où on donne une décomposition de tout facteur de type III_o comme produit croisé d'une algèbre de von Neumann semi-finie par un automorphisme. C'est M. Takesaki qui avec sa théorie de la dualité a obtenu l'invariant sous sa forme précise : un groupe à un paramètre d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann abélienne. C'est ce qui a conduit W. Krieger à associer à toute transformation T d'un espace (X,B,μ) un flot $W(T)$. Le résultat remarquable de W. Krieger est alors :

THEOREME. (W. Krieger [29]). - Soient (X_i,B_i,μ_i) , $i = 1,2$ un espace borélien standard probabilisé et T_i une transformation ergodique laissant μ_i quasi invariante alors, soit $M_i = L^\infty(R_{T_i},\mu_i)$ le facteur associé, on a :

$$\begin{tikzcd} T_1 \text{ faiblement équivalente à } T_2 \arrow[dd, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ & W(T_1) \text{ isomorphe à } W(T_2) \arrow[dl, Leftrightarrow] \\ M_1 \text{ isomorphe à } M_2 & \end{tikzcd}$$

De plus les flots correspondants aux facteurs de type III_o sont exactement les flots ergodiques non transitifs.

Notre contribution se résume alors à :

THEOREME [9]. - Pour qu'un facteur de type III_o soit un facteur de Krieger (i.e. soit de la forme $L^\infty(R_T,\mu)$) , il faut et il suffit qu'il soit moyennable.

Facteurs de type III_1 .

Dans [46], M. Takesaki a réussi à montrer, grâce à sa théorie de la dualité pour les produits croisés, que l'on avait pour les facteurs de type III_1 l'analogue exact du théorème décrivant les facteurs de type III_λ , $\lambda \in]0,1[$.

THEOREME [46] (M. Takesaki). - a) Soit M un facteur de type III_1 , il existe un facteur N de type II_∞ et un groupe à un paramètre $(\theta_t)_{t \in \mathbf{R}}$ d'automorphismes de N , $\mathrm{mod}\,\theta_t = e^{-t}$, tel que M soit isomorphe au produit croisé de N par les θ_t .

b) Soient N un facteur de type II_∞ et $(\theta_t)_{t \in \mathbf{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de N vérifiant $\mathrm{mod}(\theta_t) = e^{-t}$ $\forall\, t$, alors le produit croisé de N par ce groupe est un facteur de type III_1 .

c) Deux couples (N_i, θ_i) comme dans b) donnent des facteurs isomorphes ssi les groupes à un paramètre θ_i sont conjugués par un isomorphisme de N_1 sur N_2 .

En outre, nous avons montré avec M. Takesaki, dans [13], que l'on avait là aussi une classe de poids privilégiée, les poids dominants, unique à automorphisme intérieur près, dont l'algèbre de von Neumann N est le centralisateur. De plus pour que M soit un facteur moyennable, il faut et il suffit que l'algèbre de type II_∞ associée N soit moyennable. On voit donc que le problème de classification des facteurs moyennables de type III_1 revient à la théorie ergodique non commutative des flots d'automorphismes de $R_{o,1}$.

Pour le moment, l'élaboration de cette théorie se heurte à une difficulté sérieuse : soit $(\theta_t)_{t \in \mathbf{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes disons du facteur fini N , alors la propriété de continuité de l'homomorphisme $t \to \theta_t$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathrm{Aut}\,N$ qui est toujours requise, n'entraîne pas la continuité de $t \to \theta_t^\omega$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathrm{Aut}\,N^\omega$, ω ultrafiltre sur N . Cependant on peut, par un chemin détourné, arriver à montrer que tous les facteurs <u>moyennables</u> de type III_1 qui vérifient la condition supplémentaire suivante sont isomorphes au facteur R_∞ d'Araki Woods de type III_1 :

C : Il existe un état Φ normal sur M tel que :

$$(\psi \in M_*, \|[\psi, x_n]\| \to 0 \text{ pour toute suite bornée d'éléments de } M \text{ telle que}$$

$$\|[\Phi, x_n]\| \to 0) \Rightarrow (\psi = \lambda\Phi \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{C}) .$$

Il est facile de montrer que si cette propriété est vraie pour un état normal Φ sur M elle est vraie pour tous, en utilisant [10]. Bien entendu elle est vraie pour $M = R_\infty$ et nous conjecturons qu'elle est vraie pour tout facteur de type III_1 .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. AKEMANN et P. OSTRAND. On a tensor product C^* algebra associated with the free group on two generators (Preprint).

[2] H. ARAKI et E.J. WOODS. A classification of factors. (Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.) t.4. (1968) p. 51-130.

[3] W. ARVESON Subalgebras of C^* algebras Acta Math 123 (1969) 141-224.

[4] M. CHOI et E. EFFROS Separable nuclear C^* algebras and injectivity, (à paraître).

[5] F. COMBES Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. (Compos. Math. t. 23 (1971) p. 49-77).

[6] A. CONNES Sur la classification des facteurs de type II . (C.R. Acad. Sci. Paris t. 281 (1975) p. 13-15).

[7] A. CONNES — Almost periodic states and factors of type III_1 . J. Funct. Analysis 16 (1974) p. 415-445.

[8] A. CONNES — Une classification des facteurs de type III . (Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 4ème Serie tome 6 fasc. 2 (1973) p. 133-252).

[9] A. CONNES — Classification of injective factors. (Annals of Math. 104 (1976) p. 73-115).

[10] A. CONNES et E. STØRMER — Homogeneity of the state space of factors of type III_1 . (Preprint).

[11] A. CONNES et E. STØRMER — Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras. (Acta Math. t. 134 (1975) p. 289-306).

[12] A. CONNES — Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. (Annales Scient. Ecole Norm. Sup.).

[13] A. CONNES et M. TAKESAKI — The flow of weights on factors of type III . (A paraître).

[14] J. DIXMIER — Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs (Bull. Soc. Math. France 81 (1953 p. 9-39).

[15] J. DIXMIER — Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2ème édition Paris, Gauthier-Villars 1969.

[16] J. DIXMIER — Les C^* algèbres et leurs représentations Paris Gauthier Villars.

[17] D. Mc. DUFF — Central sequences and the hyperfinite factor Proc. London Math. Soc. XXI (1970) p. 443-461.

[18] H. DYE — On groups of measure preserving transformations I (Am. J. of Math. t. 81 (1959). p. 119-159) et II (t. 85 (1963) p. 551-576.

[19] E. EFFROS et C. LANCE — Tensor products of operator algebras. (A paraître).

[20] G. ELLIOTT et E. J. WOODS — The equivalence of various definitions of hyperfinitences of a property infinite von Neumann algebra (preprint).

[21] G. ELLIOTT — On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite dim. algebras. J. of Algebra 38 (1976), p. 29-44.

[22] J. FELDMAN et C. MOORE — Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I, (à paraître).

[23] V. Ya. GOLODETS — Cross products of von Neumann algebras Y. Math. N. 26 N° 5 (1971) p. 3-50, voir (A. Connes, P. Ghez, R. Lima, D. Testard et E.J. Woods : Review of a paper of Golodets).

[24] U. HAAGERUP — Normal weights on W^* algebras. (J. Funct. Analysis t. 19 (1975) p. 302-317).

[25] J. HAKEDA et J. TOMIYAMA — On some extension properties of von Neumann algebras. (Tohoku Math. J. t. 19 (1967) p. 315-323).

[26] B. JOHNSON — Cohomology in Banach Algebras. Memoir A.M.S. 127 (1972).

[27] B. JOHNSON, R. V. KADISON et J. RINGROSE — Cohomology in operator algebras III, Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p. 73-96.

[28] W. KRIEGER — On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non singular transformations of a Measure space. (Dans "contributions to ergodic theory and probability, Lecture notes n° 160 (1970)).

[29] W. KRIEGER — On ergodic flows and the isomorphism of factors. (Math. Ann. 223 (1976) p. 19-70).

[30] O. MARECHAL — Une remarque sur un théorème de Glimm. (Bull. Soc. Math. France 2ème Série 99 (1975) p. 41-44).

[31] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN — On rings of operators. (Ann. of Math. t. 37 (1936) p. 116-229).

[32] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN — On rings of operators, II (Trans. Amer. Math. Soc. t. 41 (1937) p. 208-248).

[33] J. von NEUMANN — On rings of operators III . (Ann. of Math. t. 41 (1940) p. 94-161).

[34] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN — On rings of operators IV. (Ann. of Math. t. 44 (1943) p. 716-808).

[35] J. von NEUMANN — On rings of operators : Reduction theory. (Ann. Math. t. 50 (1949) p. 401-485).

[36] J. PHILLIPS — Automorphisms of full II_1 factors with applications to type III factors.

[37] R.T. POWERS — Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings. (Ann. of Math. t. 86 (1967) p. 138-171).

[38] P. SCHIELDS — The theory of Bernouilli shifts (Chicago press).

[39] S. SAKAI — Automorphisms and tensor products of operator algebras (à paraître dans American Journal of Math).

[40] S. SAKAI — On automorphism groups of type II factors Tohôku Math. J. 26 (1974) p. 423-430.

[41] S. SAKAI — C^* and W^* algebras. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60.

[42] J. SCHWARTZ — Two finite, non hyperfinite, non isomorphic factors. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 19-26.

[43] I. SEGAL — A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. 57 (1953) p. 401-457.

[44] M. TAKESAKI — On the cross norm of the direct product of C^* algebras. Tohoku Math. J. 16 (1964) 111-122.

[45] M. TAKESAKI — Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. (Lecture notes N° 128, Springer Verlag 1970).

[46] M. TAKESAKI — Duality in cross products and the structure of von Neumann algebras of type III . Acta Math. 131 (1973) p. 249-310.

[47] J. TOMIYAMA — On the projection of norm one in W^* algebras. Proc. Japan Acad. 33 (1957) 608-612.

[48] J. VESTERSTRØM — Quotients of finite W^* algebras (J. Funct. Analysis t. 9 (1972) p. 322-335).

[49] F.J. YEADON A new proof of the existence of a trace on a finite von Neumann algebra. (Bull. Am. Math. Soc. t. 77 (1971), p. 257-260).