

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

M. DUNEAU

D. IAGOLNITZER

Propriétés de décroissance des corrélations et analyticité en mécanique statistique classique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1974, tome 21
« Conférences de : Y. Colin de Verdière, J. Faraut, D. Iagolnitzer, C. Itzykson, C.V. Stan-
jevic et W. Thirring », , exp. n  3, p. 1-44

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1974__21__A3_0

  Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n  25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETES DE DECROISSANCE DES CORRELATIONS

ET ANALYTICITE EN MECANIQUE STATISTIQUE CLASSIQUE

M. DUNEAU

Centre de Physique Théorique
Ecole Polytechnique, Palaiseau

D. IAGOLNITZER

Service de Physique Théorique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette

Résumé

Nous présentons des résultats rigoureux sur la décroissance "forte" des corrélations et ses liens avec les propriétés d'analyticité de la pression et des corrélations. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec B. Souillard.

*
* *

I.- INTRODUCTIONa) Présentation des modèles étudiés

L'étude des systèmes à un grand nombre de particules, tels que les gaz, les liquides et les cristaux, présente une double difficulté : il est pratiquement impossible de décrire l'état dynamique, à un instant donné, d'un ensemble de quelques 10^{23} atomes ou molécules, et il est tout aussi impossible de le préparer dans un état initial arbitraire en fixant toutes les positions et toutes les impulsions. La résolution mathématique explicite du problème dynamique correspondant, tenant compte d'interactions réalistes entre les particules, semble tout aussi problématique.

Cependant, il est relativement facile d'imposer au système étudié des contraintes "macroscopiques" telles que son volume (ou sa pression), son énergie totale (ou sa température) et le nombre total de particules (ou son potentiel chimique). Un tel système présente, en général, à l'observation un "état d'équilibre" caractérisé par sa stabilité dans le temps et son homogénéité dans l'espace. Ces propriétés sont à l'origine de l'introduction des notions de densité et, plus généralement, des fonctions de corrélations.

Une formalisation mathématique possible de ces données constitue la mécanique statistique de l'équilibre, dont nous rappelons quelques éléments [1].

Gaz sur un réseau

Un tel système est défini par la donnée d'une "boîte" finie arbitraire $\Lambda \subset \mathbb{Z}^v$ contenant le gaz (v est la dimension spatiale), et par l'ensemble de ses configurations $(n_x)_{x \in \Lambda}$, ($n_x = 0$ ou 1), où $n_x = 1$ (resp. 0) indique que le site x est occupé par une particule (resp. inoccupé) ; une configuration $(n_x)_{x \in \Lambda}$ sera représentée par l'ensemble $X = \{x \in \Lambda, n_x = 1\}$ des sites occupés.

La situation en dehors de Λ , encore appelée "condition au bord", est fixée arbitrairement par la donnée des sites de $\mathbb{Z}^v \setminus \Lambda$

occupés. Dans le cas de la condition au bord "libre" (tous les sites de $\mathbb{Z}^v \setminus \Lambda$ inoccupés, c'est-à-dire pas d'interaction entre Λ et $\mathbb{Z}^v \setminus \Lambda$), l'hamiltonien H du système est une fonction numérique des configurations que nous supposons de la forme :

$$(1) \quad H(X) = -\mu |X| + U(X)$$

ou

$$(2) \quad U(X) = \sum_{(x,x') \subset X} \Phi(x,x')$$

μ est le potentiel chimique, $|X|$ le nombre de points de X ; la somme $\sum_{(x,x') \subset X}$ est étendue à tous les couples non ordonnés de X et Φ est un potentiel d'interaction à deux corps que nous supposons invariant par translation :

$$\Phi(x+a, x'+a) = \Phi(x, x') \quad \forall a \in \mathbb{Z}^v, \quad \text{et tel que :}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^v \setminus \{0\}} |\Phi(0, x)| < \infty.$$

L'état d'équilibre de Gibbs à la température $T = \beta^{-1}$ est la mesure de probabilité sur l'espace des configurations définie par :

$$(3) \quad \mu(X) = \left(\sum_{Y \subset \Lambda} e^{-\beta H(Y)} \right)^{-1} e^{-\beta H(X)} \\ = Z_{\Lambda}(\beta, z)^{-1} z^{|X|} e^{-\beta U(X)}$$

où $z = e^{\beta\mu}$ est l'activité, considérée comme variable indépendante de β et où nous avons introduit la fonction de partition :

$$(4) \quad Z_{\Lambda}(\beta, z) = \sum_{X \subset \Lambda} z^{|X|} e^{-\beta U(X)}.$$

La "pression" du système et les fonctions de corrélation sont données respectivement par :

$$(5) \quad p_{\Lambda}(\beta, z) = \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln Z_{\Lambda}(\beta, z)$$

$$(6) \quad \rho_{\wedge}(X; \beta, z) = Z_{\wedge}(\beta, z)^{-1} z^{|X|} \sum_{Y \subset \wedge \setminus X} z^{|Y|} e^{-\beta U(X, Y)}$$

$\rho_{\wedge}(X; \beta, z)$ exprimant la probabilité pour que les sites de X soient tous occupés par une particule.

Gaz continu

L'espace des configurations d'un nombre quelconque de particules indiscernables dans une boîte bornée $\wedge \subset \mathbb{R}^v$ est $\sum_{N \geq 0} \wedge^N / S_N$ où S_N est le groupe des permutations d'ordre N . Une telle représentation est possible lorsque l'impulsion des particules n'intervient que dans l'énergie cinétique.

L'énergie d'interaction d'une configuration $X = (x_1, \dots, x_N)$ est de nouveau donnée par la formule (2), soit :

$$U(X) = \sum_{i < j} \Phi(x_i, x_j)$$

où Φ est un potentiel symétrique, continu sauf peut-être à l'origine, que nous supposerons de plus stable : il existe une constante $B \geq 0$ telle que, pour tout N et $X = (x_1, \dots, x_N)$:

$$(7) \quad U(X) \geq -N.B.$$

L'état d'équilibre grand-canonique est défini par la densité de probabilité suivante pour tout $X \in \wedge^N$:

$$(8) \quad \mu(X) = Z_{\wedge}(\beta, z)^{-1} \frac{z^N}{N!} e^{-\beta U(X)} \quad \text{où}$$

$$(9) \quad Z_{\wedge}(\beta, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\wedge^n} dX e^{-\beta U(X)}$$

l'activité z représentant la contribution du potentiel chimique et de l'énergie cinétique.

La pression et les fonctions de corrélation (qui sont les densités de probabilité pour que des points X soient tous occupés par une particule) sont données respectivement par :

$$(10) \quad p_{\Lambda}(\beta, z) = \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln Z_{\Lambda}(\beta, z)$$

$$(11) \quad \rho_{\Lambda}(X; \beta, z) = Z_{\Lambda}(\beta, z)^{-1} z^N \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^n} dY e^{-\beta U(X, Y)}$$

Remarque : Dans le cas d'un gaz sur un réseau, en posant par convention $\Phi(x, x) = +\infty$, les formules (4) et (6) peuvent s'écrire sous la même forme que (9) et (11) en remplaçant $\int_{\Lambda^n} dY$ par $\sum_{Y \in \Lambda^n}$.

Système de spins

C'est aussi un système discret défini dans une boîte Λ arbitraire et finie de \mathbb{Z}^v par l'ensemble de ses configurations $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \Lambda}$, ($\sigma_x = -1$ ou $+1$), où $\sigma_x = 1$ (resp. -1) correspond à un spin en haut (resp. en bas) au site x .

Dans le cas de conditions au bord libre (par d'interaction avec l'extérieur de Λ) l'hamiltonien H est donné par :

$$(12) \quad H(\sigma) = h_0 \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x + U(\sigma)$$

$$(13) \quad U(\sigma) = \sum_{(x, x') \subset \Lambda} J(x, x') \sigma_x \cdot \sigma_{x'}$$

où h_0 est un champ magnétique extérieur, la somme $\sum_{(x, x') \subset \Lambda}$ est ici étendue à tous les couples (x, x') de Λ et J est le potentiel d'interaction entre deux spins que l'on suppose invariant par translation et tel que :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^v \setminus \{0\}} |J(0, x)| < \infty$$

l'état de Gibbs à la température $T = \beta^{-1}$ est défini par :

$$(14) \quad \begin{aligned} \mu(\sigma) &= \left(\sum_{\sigma \in \Lambda} e^{-\beta H(\sigma)} \right)^{-1} e^{-\beta H(\sigma)} \\ &= Q_{\Lambda}(\beta, h)^{-1} e^{-h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \beta U(\sigma)} \end{aligned}$$

où la somme $\sum_{\sigma_{\Lambda}}$ est étendue à toutes les configurations dans Λ ,
 $h = \beta h_0$ est considéré comme une variable indépendante de β et :

$$(15) \quad Q_{\Lambda}(\beta, h) = \sum_{\sigma_{\Lambda}} e^{-h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \beta U(\sigma)}$$

La pression et les fonctions de corrélation sont données respectivement par :

$$(16) \quad p_{\Lambda}(\beta, h) = \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln Q_{\Lambda}(\beta, h)$$

$$(17) \quad \langle \sigma(X) \rangle_{\Lambda}(\beta, h) = Q_{\Lambda}(\beta, h)^{-1} \sum_{\sigma_{\Lambda}} \sigma(X) e^{-h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \beta U(\sigma)}$$

$\langle \sigma(X) \rangle_{\Lambda}(\beta, h)$ est ici la valeur moyenne du produit $\sigma(X) = \prod_{x \in X} \sigma_x$.

Nous utiliserons dans la suite un isomorphisme naturel entre les systèmes discrets de gaz et de spins [2], obtenu de la façon suivante :

A toute configuration de spins σ dans Λ , l'on associe les nombres d'occupation : $n_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + 1)$ ainsi que l'ensemble $X = \{x \in \Lambda : n_x = 1\}$; alors :

$$U(\sigma) = 4 \sum_{(x, x') \subset \Lambda} J(x, x') (n_x - \frac{1}{2})(n_{x'} - \frac{1}{2})$$

En posant $C_{\Lambda}(x) = \sum_{x' \in \Lambda \setminus \{x\}} J(x, x')$, on obtient :

$$U(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Lambda} C_{\Lambda}(x) - 2 \sum_{x \in X} C_{\Lambda}(x) + 4 \sum_{(x, x') \subset X} J(x, x')$$

et par conséquent :

$$e^{-h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \beta U(\sigma)} = \exp \left[h |\Lambda| - \frac{\beta}{2} \sum_{x \in \Lambda} C_{\Lambda}(x) \right] e^{-2 \sum_{x \in X} (h - \beta C_{\Lambda}(x))} e^{-4 \beta \sum_{(x, x') \subset X} J(x, x')}$$

Le premier facteur ne dépend que de Λ et disparaît dans l'expression de la mesure de Gibbs.

Le système initial de spins avec une condition au bord "nulle" est donc équivalent à un gaz dont l'interaction est donnée par $\Phi(x, x') = 4 J(x, x')$ et dont l'activité est maintenant fonction de Λ et de $x \in \Lambda : z_{\Lambda}(x) = e^{-2(h - \beta C_{\Lambda}(x))}$. Remarquons que la dépendance spatiale de l'activité n'est sensible que vers le bord de Λ et que $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} z_{\Lambda}(x) = \exp \left[-2h + 2\beta \sum_{x \neq 0} J(0, x) \right]$.

Compte tenu de l'isomorphisme ainsi introduit, l'on a :

$$(18) \quad 2^{|X|} \rho_{\Lambda}(X) = \left\langle \prod_{x \in X} (\sigma_x + 1) \right\rangle_{\Lambda} = \sum_{Y \subset X} \langle \sigma(Y) \rangle_{\Lambda}.$$

Limite thermodynamique

Pour des raisons tant physiques que mathématiques, on est amené à étudier les systèmes précédents lorsque Λ tend vers l'infini dans un certain sens. On prouve alors que pour certains systèmes et certaines valeurs de β , z (ou h), en particulier à basse activité, la pression et les fonctions de corrélation ont une limite thermodynamique unique, indépendante des conditions au bord : il n'y a qu'un seul état d'équilibre.

Dans d'autres cas, les fonctions de corrélation ont des limites différentes selon les conditions au bord : il existe dans ce cas plusieurs états d'équilibre obtenus comme combinaisons linéaires d'états extrémaux ou phases pures ; on dit aussi que l'on est en un point de transition de phase.

L'observation des fonctions de corrélation à un point (densité) et à deux points (par la diffusion de neutrons, par exemple) fournit des renseignements très significatifs sur les systèmes étudiés en particulier aux transitions de phase et au point critique (discontinuité de la densité, corrélation à longue distance).

Dans l'étude théorique, on pense qu'en dehors de la région de transition de phase, d'une part la pression et les fonctions de corrélations obtenues à la limite thermodynamique restent analytiques par rapport à β , z (ou h), d'autre part les fonctions de corrélations

ont des propriétés géométriques de décroissance dans l'espace correspondant à la décroissance du potentiel à l'infini.

Cette dernière idée a été confirmée depuis longtemps par le calcul explicite d'Onsager [3] sur le modèle d'Ising à deux dimensions et à champ magnétique nul ; plus récemment, de nouveaux résultats dans ce domaine ont été obtenus dans le cadre de la mécanique statistique classique rigoureuse.

Dans cet article, nous allons décrire certains de ces résultats concernant en particulier les liens entre propriétés de décroissance et propriétés d'analyticité (ou de différentiabilité).

Il se révèle essentiel dans cette étude, d'introduire les fonctions de corrélation tronquées, ou parties connexes des corrélations, pour un nombre quelconque de points.

b) Fonctions de corrélation tronquées

Les fonctions de corrélation tronquées $\rho^T(X)$ sont introduites de façon à décrire les corrélations impliquant simultanément tous les points de X . Plus précisément, elles sont définies à partir de $\rho(X)$ en soustrayant, de toutes les façons possibles, les corrélations impliquant seulement des sous-groupes de points ; par exemple :

$$\rho^T(x_1) = \rho(x_1)$$

$$\rho^T(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2) - \rho(x_1) \cdot \rho(x_2)$$

$$\begin{aligned} \rho^T(x_1, x_2, x_3) = & \rho(x_1, x_2, x_3) - \rho(x_1) \cdot \rho^T(x_2, x_3) - \rho(x_2) \cdot \rho^T(x_3, x_1) \\ & - \rho(x_3) \cdot \rho^T(x_1, x_2) - \rho(x_1) \rho(x_2) \rho(x_3) \end{aligned}$$

et plus généralement :

$$(19) \quad \rho^T(X) = \rho(X) - \sum_{\{X_1, \dots, X_k\}} \prod_{i=1}^k \rho^T(X_i)$$

où la somme $\sum_{\{X_1, \dots, X_k\}}^X$ est étendue à toutes les partitions non triviales (i.e. : $k > 1$) de $X = (x_1, \dots, x_N)$ en sous-ensembles X_1, \dots, X_k (deux points x_i et x_j sont distingués par leur indice $i \neq j$ même si $x_i = x_j$).

Ces équations fournissent, par induction, une définition des fonctions tronquées en terme de fonctions non tronquées. Par exemple :

$$\begin{aligned} \rho^T(x_1, x_2, x_3) &= \rho(x_1, x_2, x_3) - \rho(x_1) \rho(x_2, x_3) - \rho(x_2) \rho(x_3, x_1) \\ &\quad - \rho(x_3) - \rho(x_1, x_2) + 2 \rho(x_1) \rho(x_2) \rho(x_3). \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$(20) \quad \rho^T(X) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{\{X_1, \dots, X_k\}}^X \prod_{i=1}^k \rho(X_i)$$

où la somme $\sum_{\{X_1, \dots, X_k\}}^X$ est étendue aux partitions de X en k sous-ensembles non vides X_1, \dots, X_k .

Notons que la définition précédente, relative aux fonctions de corrélations d'un gaz discret ou continu, s'étend aux systèmes de spins sur un réseau par la formule :

$$(21) \quad \langle \sigma(X) \rangle^T = \langle \sigma(X) \rangle - \sum_{\{X_1, \dots, X_k\}}^X \prod_{i=1}^k \langle \sigma(X_i) \rangle$$

En outre, l'isomorphisme introduit précédemment entre les systèmes de gaz et de spins sur un réseau caractérisé par la formule (18) permet d'obtenir la correspondance suivante, très simple, entre les fonctions tronquées de deux systèmes :

$$(22) \quad 2^{|X|} \hat{\rho}^T(X) = \langle \sigma(X) \rangle^T$$

où les fonctions $\hat{\rho}^T(X)$ sont certaines combinaisons linéaires de fonctions

tronquées (voir [4]) et coïncident avec $\rho^T(X)$ si tous les points $x_1 \dots x_N$ de X sont différents.

Dans des conditions appropriées, par exemple dans une phase pure, l'on pense que les fonctions de corrélations présentent des propriétés de factorisation quand des points, ou des groupes X_1, \dots, X_k de points, sont séparés les uns des autres ; plus précisément $\rho(X) - \prod_{i=1}^k \rho(X_i)$ tend vers zéro lorsque les distances $d(X_i, X_j)$ entre les différents clusters tendent vers l'infini, la décroissance étant déterminée par les corrélations entre les deux clusters les plus proches, c'est-à-dire par la plus petite distance $d(X_i, X_j)$.

On peut voir par induction que cette propriété de factorisation est équivalente à la propriété suivante de décroissance pour les fonctions tronquées : $\rho^T(X)$ tend vers zéro dès que des points ou des clusters sont éloignés les uns des autres, d'une façon qui dépend maintenant de la plus grande distance $d(X', X'')$ où (X', X'') est une partition de X en deux sous-ensembles quelconques.

Cependant, $\rho^T(X)$ est défini de telle façon que sa décroissance devrait être plus forte (pour $N > 2$), et en fait, dépend de la séparation de tous les points x_1, \dots, x_N les uns par rapport aux autres (décroissance forte) et pas seulement de la séparation en deux clusters.

Remarquons qu'une telle décroissance forte de $\rho^T(X)$ n'implique pour $\rho(X) - \prod_{i=1}^k \rho(X_i)$ que la décroissance déjà mentionnée.

Nous verrons qu'une telle décroissance forte est effectivement obtenue dans différentes situations.

Dans la partie II, après un rappel des développements de Mayer des fonctions de corrélation à basse activité dans a), nous déduirons les propriétés de décroissance forte d'un gaz sur un réseau dans b) lorsque l'interaction a une portée finie et dans c) lorsque

la portée est infinie. Les résultats sont prouvés d'abord à basse activité et plus généralement ensuite, en introduisant des hypothèses d'analyticité par rapport à l'activité. Enfin, dans d) nous prouvons des propriétés de décroissance forte analogues pour un système continu convenablement discrétisé et à basse activité sans discrétisation.

Dans la partie III, nous rappelons les formules liant les fonctions tronquées aux dérivées partielles de la pression dans a), puis nous indiquons les résultats obtenus à partir de la localisation des zéros de la fonction de partition dans b). Enfin dans c) nous présentons des résultats obtenus par la méthode de la matrice de transfert.

Dans la partie IV, nous décrivons certains résultats généraux sur les liens entre propriétés de décroissance et propriétés d'analyticité.

II.- PROPRIETES DE DECROISSANCE OBTENUES A PARTIR DES DEVELOPPEMENTS DE
MAYER DES FONCTIONS DE CORRELATION

a) Développements de Mayer à basse activité

Considérons un gaz sur un réseau, dans une boîte finie Λ ; en posant $\Phi(x,x) = +\infty$, la fonction de partition (4) et les fonctions de corrélation (6) s'écrivent :

$$Z_{\Lambda}(\beta, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{X \in \Lambda^n} e^{-\beta U(X)}$$

$$\rho_{\Lambda}(X; \beta, z) = Z_{\Lambda}(\beta, z)^{-1} z^{|X|} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{Y \in \Lambda^n} e^{-\beta U(X, Y)} \quad (23)$$

les configurations $X \in \Lambda^n$ ayant deux points confondus ou plus, donnent une contribution nulle pour $\beta > 0$.

On peut alors montrer [5] que la pression et les fonctions de corrélation tronquées ont les développements suivants, convergents à basse activité [7] :

$$\beta p_{\Lambda}(\beta, z) = \sum_{n \geq 0} z^n b_{\Lambda, n}(\beta) \quad (24)$$

où

$$b_{\Lambda, n}(\beta) = \frac{1}{n! |\Lambda|} \sum_{X \in \Lambda^n} \varphi(X; \beta) \quad (25)$$

et

$$\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z) = z^{|X|} \sum_{n \geq 0} z^n c_{\Lambda, n}(X; \beta) \quad (26)$$

où

$$c_{\Lambda, n}(X; \beta) = \frac{1}{n!} \sum_{Y \in \Lambda^n} \varphi(X, Y; \beta) \quad (27)$$

Ces développements utilisent les fonctions d'Ursell :

$$\varphi(X; \beta) = \sum_{G \in \mathcal{G}_c(X)} \prod_{(x, x') \in G} (e^{-\beta \Phi(x, x')} - 1)$$

où la somme $\sum_{G \in \mathcal{G}_c(X)}$ est étendue aux graphes connexes construits sur X et où le produit $\prod_{(x, x') \in G}$ est étendu à toutes les lignes de G .

Les fonctions φ sont les parties connexes des "fonctions de Boltzmann" $e^{-\beta U(X)}$.

En ce qui concerne les gaz continus, on a des développements analogues, obtenus en remplaçant les sommes discrètes $\sum_{Y \in \Lambda^n}$ par des intégrales $\int_{\Lambda^n} dY$.

b) Décroissance forte dans le cas d'une interaction à portée finie

L'argument suivant est une extension de la méthode employée dans [6] pour prouver certaines propriétés de factorisation des fonctions de corrélations .

Etant donné un potentiel à portée finie λ , ($|x-x'| > \lambda \Rightarrow \Phi(x,x') = 0$ et $e^{-\beta\Phi(x,x')} - 1 = 0$), considérons le développement de Mayer de $\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z)$ et plus particulièrement la décomposition en graphes connexes des fonctions d'Ursell $\varphi(X, Y; \beta)$ apparaissant dans les coefficients $C_{\Lambda, n}(X; \beta)$. Il est clair que si un graphe $G \in \mathcal{G}_c(X, Y)$ a une contribution non nulle, toutes ses lignes sont de longueur inférieure ou égale à λ ; dans ce cas, on peut construire sur (X, Y) un arbre connexe de $N+n-1$ lignes, dont la longueur totale est $\leq (N+n-1)\lambda$. Inversement, si tout arbre connexe construit sur (X, Y) a une longueur supérieure à $(N+n-1)\lambda$, $\varphi(X, Y; \beta)$ est nécessairement nul. Cette propriété suggère les définitions suivantes de longueurs attachées à un ensemble de points, introduites dans [4].

$$i) \quad \hat{L}(X) = \inf_{T \in \mathcal{T}(X)} l(T) \quad \text{où} \quad l(T) = \sum_{(x, x') \in T} |x-x'|$$

et où $\mathcal{T}(X)$ est l'ensemble des arbres connexes construits sur X .
L'on a :

$$\hat{L}(X, Y) > (N+n-1)\lambda \Rightarrow \varphi(X, Y; \beta) = 0$$

$$ii) \quad L(X) = \inf_{n \geq 0} \inf_{Y = \{y_1 \dots y_n\}} \hat{L}(X; Y)$$

Cette longueur est la longueur minimale de tous les arbres connexes

joignant les points de X avec éventuellement des points intermédiaires Y en nombre et positions arbitraires ; on a alors :

$$\frac{1}{2} \hat{L}(X) \leq L(X) \leq \hat{L}(X) \tag{28}$$

L'on a de nouveau $L(X) > (N+n-1)\lambda \implies C_{\wedge, n}(X; \beta) = 0$; autrement dit, le développement (29) de $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ ne commence qu'à l'ordre $n_0(X)$, premier entier positif supérieur ou égal à $\frac{L(X)}{\lambda} - N+1$. Cette propriété cruciale est à l'origine du théorème suivant :

THEOREME I : Le développement de Mayer de $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ est absolument convergent pour $|z| < r(\beta) = e^{-2\beta B-1} C(\beta)^{-1}$ et on a la borne suivante pour \wedge fini ou infini :

$$|\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)| < \frac{e^{-2\beta B} r(\beta)}{1 - \alpha \frac{|z|}{r(\beta)}} \frac{1}{(\alpha-1)^N} \mathcal{N}(X) \left(\frac{\alpha|z|}{r(\beta)}\right)^{\frac{L(X)}{\lambda}} \tag{29}$$

où B est la constante de stabilité du potentiel (définie par la formule (7)) $C(\beta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} |e^{-\beta \Phi(0, x)} - 1|$, α est un nombre réel arbitraire tel

que $1 < \alpha < \frac{r(\beta)}{|z|}$ et $\mathcal{N}(X)$ est un facteur numérique qui vaut 1 si tous les points x_1, \dots, x_N sont différents et qui vaut $N_1! \dots N_p!$ si x_1, \dots, x_N n'occupent que p positions différentes apparaissant respectivement N_1, \dots, N_p fois.

Preuve : Les propriétés d'intégrabilité suivantes des fonctions d'Ursell sont démontrées directement dans [7] et sont aussi une conséquence simple de la relation (33) démontrée plus loin :

$$\sum_{x_2, \dots, x_p} |\varphi(x_1, \dots, x_p; \beta)| \leq e^{-2\beta B} (e^{2\beta B+1} \cdot C(\beta))^{p-1} (p-1)!$$

d'où compte tenu de la définition(27):

$$\sum_{x_2, \dots, x_N} \in \wedge |C_{\wedge, n}(X; \beta)| \leq \frac{(N+n-1)!}{n!} \frac{e^{-2\beta B}}{r(\beta)^{N+n-1}}$$

On en déduit par un argument combinatoire que :

$$|c_{\wedge, n}(X; \beta)| < \frac{e^{-2\beta B}}{r(\beta)^{N+n-1}} \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!} \mathcal{N}(X) .$$

La sommation de la série majorante s'obtient en utilisant l'identité suivante pour $|t| < 1$:

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{(N+n-1)!}{n!} t^n = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} \left(\frac{t^{N+n_0-1}}{1-t} \right)$$

d'où le résultat annoncé en utilisant une formule de Cauchy.

Cette borne est du type $AC^N \mathcal{N}(X) e^{-\chi L(X)}$ où A, C et χ sont indépendants de N, X et \wedge et ne dépendent que des paramètres du système z, β, Φ ; la propriété ainsi prouvée est appelée "strong cluster property" dans [4] et [8], le facteur de décroissance spatiale $e^{-\chi L(X)}$ tient compte, comme annoncé dans l'introduction, de la séparation de tous les points x_1, \dots, x_N , les uns par rapport aux autres. Comme nous le verrons dans la partie IV, la dépendance d'une telle borne par rapport à N est aussi cruciale pour l'obtention de propriétés d'analyticité.

Le résultat précédent n'est obtenu qu'à basse activité ; en fait, la méthode utilisée implique dans ce cas simultanément l'analyticité par rapport à z (déjà connue) et la décroissance forte pour $|z| < r(\beta)$.

Il semble qu'au moins dans certains cas, l'analyticité de la pression par rapport à l'activité implique l'unicité de l'état d'équilibre et suggère fortement des propriétés de décroissance forte pour les fonctions de corrélation tronquées.

Dans l'immédiat, nous avons le résultat suivant, un peu plus faible, mais valable pour tous les potentiels à portée finie.

THEOREME II : Si pour $\beta > 0$ fini, les fonctions $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ ont un prolongement analytique en z dans un domaine ouvert commun \mathcal{D} de \mathcal{C} con-

tenant zéro, et satisfont une borne du type :

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z)| < A_o C_o^N \mathcal{N}(X) \quad (30)$$

où A_o et C_o sont indépendants de Λ , N , X et $z \in \mathcal{D}$, alors :

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z)| < \frac{A_o}{1 - |t(z)|} C_o^N \mathcal{N}(X) |t(z)|^{\frac{L(X)}{\lambda}} \quad (31)$$

où $t : z \rightarrow t(z)$ est un mapping conforme de \mathcal{D} sur l'intérieur du cercle unité, tel que $t(0) = 0$.

Preuve : La méthode utilisée est une adaptation de celles utilisées dans [6].

La mapping t étant choisi tel que $t(0) = 0$, on a un développement du type suivant, absolument convergent pour $|t| < 1$:

$$\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z(t)) = t^N \sum_{n \geq 0} t^n \gamma_{\Lambda, n}(X; \beta) \quad (32)$$

où $t \rightarrow z(t)$ est le mapping inverse.

Il est facile de vérifier que $\gamma_{\Lambda, n}(X; \beta)$ est une combinaison linéaire de coefficients $C_{\Lambda, m}(X; \beta)$ où $m \leq n$; par conséquent $L(X) > (N+n-1)\lambda$ entraîne $\gamma_{\Lambda, n}(X; \beta) = 0$ et le développement (32) ne commence, comme précédemment, qu'à l'ordre $n_o(X)$.

L'analyticité de $\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z(t))$ dans le cercle $|t| < 1$ et la borne $A_o C_o^N \mathcal{N}(X)$ dans cette région, impliquent, en utilisant une formule de Cauchy, que $|\gamma_{\Lambda, n}(X; \beta)| < A_o C_o^N \mathcal{N}(X)$, d'où le résultat annoncé.

La formule (31), qui est aussi valable à la limite thermodynamique d'après le théorème de Vitali, est de nouveau une propriété de "strong clustering" puisque $|t(z)| < 1$ pour $z \in \mathcal{D}$. Signalons que pour z fixé, la décroissance optimale est d'autant plus forte que le domaine \mathcal{D} est plus grand.

Nous verrons dans la troisième partie que les hypothèses du théorème II sont réalisées lorsqu'on a des renseignements suffisants sur la localisation des zéros des fonctions de partition $Z_{\wedge}(\beta, z)$.

c) Décroissance forte dans le cas d'une interaction à portée infinie

Si le potentiel a une portée infinie, la méthode développée dans b) n'est plus applicable, car, contrairement au cas précédent, les premiers termes du développement (26) des fonctions tronquées ne sont pas identiquement nuls, même si les points de X sont éloignés.

Nous allons voir qu'on peut néanmoins extraire des fonctions d'Ursell $\varphi(X, Y)$, puis des coefficients $C_{\wedge, n}(X, \beta)$, un facteur de décroissance tel qu'à basse activité, $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ satisfait encore des propriétés de décroissance forte analogues à (29).

Le point de départ est le lemme suivant, valable pour les systèmes discrets comme pour les systèmes continus :

LEMME I : Si Φ est un potentiel stable, on a pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$|\varphi(X; \beta)| \leq (e^{2\beta B})^{N-2} \sum_{T \in \mathcal{O}(X)} \prod_{(x, x') \in T} |K(x, x')| \quad (33)$$

où B est la constante de stabilité et $K(x, x') = e^{-\beta\Phi(x, x')} - 1$.

Si, Φ est un potentiel à cœur dur, c'est-à-dire $\Phi(x, x') = +\infty$ si $|x - x'| < a$ pour un certain $a > 0$, on a :

$$|\varphi(X; \beta)| \leq (e^{\beta B})^{N-2} \sum_{T \in \mathcal{O}(X)} \prod_{(x, x') \in T} |\hat{K}(x, x')| \quad (34)$$

où B est la constante de stabilité et où :

$$\hat{K}(x, x') = \text{Sup} \{ 1 - e^{-\beta\Phi(x, x')}, e^{\beta A} (1 - e^{\beta\Phi(x, x')}) \} \quad (35)$$

avec : $A = \sum_{x \in \mathbb{Z}^v} \Phi_-(0, x)$, $\Phi_- = \text{Sup} \{ 0, -\Phi \}$

dans le cas d'un réseau, et

$$A = \sup_{N > 0} \sup_{x_1, \dots, x_N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_-(0, x_i) \\ U(0, x_1 \dots x_N) < \infty$$

dans le cas d'un système continu.

Ce résultat a été démontré dans [9] et [10] pour des potentiels positifs ou à cœur dur.

Nous présentons ci-dessous une méthode plus générale [11], valable pour tout potentiel stable, qui est une adaptation de méthodes employées pour prouver des bornes (sans décroissance) sur les fonctions d'Ursell ou leurs intégrales : voir [7] et [12].

Preuve : Soit $\varphi(\{X_0\}; X; \beta) = \sum_{G \in \mathcal{G}_c(\{X_0\}; X)} \prod_{(x, x') \in G} K(x, x')$ où

$\mathcal{G}_c(\{X_0\}; X)$ désigne l'ensemble des graphes construits sur les points de $X_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_{N_0}})$ et de $X = (x_1, \dots, x_N)$, connexes par rapport au bloc X_0 et aux points x_1, \dots, x_N .

La relation de récurrence suivante du type Kirkwood-Salsburg se vérifie directement d'après la définition précédente :

$$\varphi(\{X_0\}; X; \beta) = e^{-\beta I(\tilde{X}_0, x_0)} \sum_{X' \subset X} \prod_{x \in X'} K(x_0, x) \cdot \varphi(\{\tilde{X}_0, X'\}; X \setminus X'; \beta)$$

où x_0 est un point quelconque de X_0 et $\tilde{X}_0 = X_0 \setminus \{x_0\}$ et $I(\tilde{X}_0, x_0) = \sum_{x \in \tilde{X}_0} \hat{\phi}(x, x_0)$.

En choisissant le point x_0 tel que $e^{-\beta I(\tilde{X}_0, x_0)} \leq e^{2\beta B}$ ce qui est toujours possible grâce à la stabilité, on obtient l'inégalité suivante par induction sur le nombre total de points $N_0 + N$:

$$|\varphi(\{X_0\}; X; \beta)| \leq (e^{2\beta B})^{N_0 + N - 2} \sum_{T \in \mathcal{T}(\{X_0\}; X)} \prod_{(x, x') \in T} |K(x, x')|$$

où $\mathcal{C}(\{X_0\}; X)$ désigne l'ensemble des graphes construits sur $X_0 X$ tels que :

- i) il n'y a pas de ligne interne dans X_0
- ii) le graphe obtenu en identifiant tous les points de X_0 est un arbre connexe.

La borne (33) est obtenue dans le cas particulier où $N_0 = 1$.

On peut aussi écrire une relation de récurrence du type Mayer-Montroll :

$$\varphi(\{X_0\}; X; \beta) = e^{-\beta U(X_0)} \sum_{\substack{X' \subset X \\ X' \neq \emptyset}} \prod_{x \in X'} K(X_0; x) \varphi(\{X'\}; X \setminus X'; \beta)$$

où $K(X_0; x) = e^{-\beta I(X_0, x) - 1}$.

Dans le cas d'un potentiel positif ou à cœur dur, on a [12] :

$$|K(X; y)| \leq \sum_{x \in X} \hat{K}(x, y)$$

où \hat{K} est défini par (35) ; on obtient par induction sur $N_0 + N$:

$$|\varphi(\{X_0\}; X; \beta)| \leq (e^{\beta B})^{N_0 + N - 2} \sum_{T \in \mathcal{C}(\{X_0\}; X)} \prod_{(x, x') \in T} \hat{K}(x, x'),$$

d'où la borne (34).

Dans la suite nous utiliserons la borne (33), mais des résultats similaires, et éventuellement meilleurs dans certaines situations, peuvent être obtenus à partir de (34).

Hypothèses de décroissance du potentiel

Nous supposons désormais que l'on peut écrire :

$$|K(x, x')| = e^{-\delta(x, x')} K_{\delta}(x, x') \quad (36)$$

où i) δ est une distance invariante par translation :

$$\delta(x, x') = \delta(0, x' - x)$$

$$\text{ii) } \sum_{x \in \mathbb{Z}^{\nu}} K_{\delta}(0, x) = C_{\delta}(\beta) < \infty$$

Ces conditions sont satisfaites en particulier dans les deux cas suivants :

1) Φ est borné par : $Cste \cdot e^{-a|x|}$
 pour $|x|$ suffisamment grand, on peut dans ce cas choisir
 $\delta(x, x') = a_1|x - x'|$ où $0 < a_1 < a$; alors $K_{\delta}(0, x)$ est intégrable.

2) Φ est borné par l'inverse d'une puissance : $|\Phi(0, x)| < \frac{Cste}{(1+|x|)^s}$
 pour $|x|$ suffisamment grand avec $s > \nu$; on peut prendre
 $\delta(x, x') = s_1 \ln(1 + |x - x'|)$, avec $s - \nu > s_1 > 0$; alors
 $K_{\delta}(0, x)$ est intégrable.

Nous définissons à nouveau à partir de la distance δ appropriée, les longueurs suivantes attachées à un ensemble de points :

$$\text{i) } \hat{L}_{\delta}(X) = \inf_{T \in \mathcal{C}(X)} l_{\delta}(T) \quad \text{où} \quad l_{\delta}(T) = \sum_{(x, x') \in T} \delta(x, x')$$

$$\text{ii) } L_{\delta}(X) = \inf_{n \geq 0} \inf_{Y = \{y_1, \dots, y_n\}} \hat{L}_{\delta}(X, Y)$$

On a toujours la relation suivante [4] :

$$\frac{1}{2} \hat{L}_{\delta}(X) \leq L_{\delta}(X) \leq \hat{L}_{\delta}(X)$$

Les propriétés de décroissance des coefficients $C_{\wedge, n}(X; \beta)$ sont données par :

LEMME II : Si Φ vérifie la propriété de décroissance (36), on a, pour \wedge fini ou infini :

$$|c_{\wedge, n}(X; \beta)| < \frac{(N+n)^{N+n-2}}{(N-1)!n!} (e^{2\beta B})^{N+n-2} c_{\delta}(\beta)^{N+n-1} \mathcal{N}(X) e^{-L_{\delta}(X)}$$

où $\mathcal{N}(X)$ est le facteur de multiplicité introduit dans (29), et où B est la constante de stabilité.

Preuve : D'après le Lemme I et l'hypothèse de décroissance (36) :

$$|\varphi(X, Y; \beta)| < (e^{2\beta B})^{N+n-2} e^{-L_{\delta}(X)} \sum_{T \in \mathcal{T}(X, Y)} \prod_{(x, x') \in T} K_{\delta}(x, x')$$

le nombre d'arbres construits sur N+n points étant $(N+n)^{N+n-2}$ [13], on a :

$$\sum_{x_2, \dots, x_N} \sum_{y_1, \dots, y_n} \left[\sum_{T \in \mathcal{T}(X, Y)} \prod_{(x, x') \in T} K_{\delta}(x, x') \right] \leq (N+n)^{N+n-2} c_{\delta}(\beta)^{N+n-1}$$

et le résultat annoncé se déduit d'un argument combinatoire.

Chaque terme du développement de Mayer de $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ a donc au moins la décroissance spatiale $e^{-L_{\delta}(X)}$, ce qui conduit au :

THEOREME III : Si Φ satisfait la propriété de décroissance (36), le développement de Mayer de $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)$ est absolument convergent pour $|z| < r_{\delta}(\beta) = e^{-2\beta B - 1} c_{\delta}(\beta)^{-1}$, \wedge fini ou infini, et l'on a :

$$|\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z)| < |z| e^{-2\beta B + 1} \left(\frac{|z|}{r_{\delta}(\beta) - |z|} \right)^{N-1} \mathcal{N}(X) e^{-L_{\delta}(X)} \quad (37)$$

La preuve se déduit immédiatement du lemme II, compte tenu de l'identité

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(N+n-2)!}{n!} t^n = \frac{(N-2)!}{(1-t)^{N-1}} \quad \text{et de l'inégalité } e^{N+n} \geq \frac{(N+n)^{N+n-2}}{(N+n-2)!} .$$

Ce résultat généralise ceux obtenus par J. Groeneveld [9] et O. Penrose [10] concernant la décroissance de la fonction à deux points $\rho^T(x_1, x_2)$.

Remarque : L'hypothèse de décroissance (36) implique

$$|K(x, x')| \leq K_{\delta}(x, x'), \quad \text{et par suite } C(\beta) \leq c_{\delta}(\beta) \quad \text{et } r(\beta) \geq r_{\delta}(\beta) ;$$

autrement dit, la méthode consistant à extraire de la décroissance de chaque terme du développement de Mayer, implique simultanément la diminution du rayon de convergence théorique ; on peut d'ailleurs vérifier que $r_\delta(\beta)$ est d'autant plus proche de $r(\beta)$ que la distance δ est voisine de zéro.

De même que dans le cas des interactions à portée finie, nous avons le théorème suivant sur l'extension des propriétés de décroissance forte.

THEOREME IV : Si pour $\beta > 0$ fini, les fonctions $\rho_\Lambda^T(X; \beta, z)$ ont un prolongement analytique en z dans un domaine ouvert commun \mathcal{D} de \mathcal{C} contenant zéro, et satisfont une borne du type :

$$|\rho_\Lambda^T(X; \beta, z)| < A_0 C_0^N \mathcal{N}(X) \quad (38)$$

où A_0 et C_0 sont indépendants de Λ , N , X et $z \in \mathcal{D}$, alors pour tout compact $\Delta \subset \mathcal{D}$, il existe des constantes A , C et χ indépendantes de Λ , N , X et $z \in \Delta$, telles que :

$$|\rho_\Lambda^T(X; \beta, z)| < A C^N \mathcal{N}(X) e^{-\chi L_\delta(X)}. \quad (39)$$

Preuve : Soit $t : z \rightarrow t(z)$ un mapping conforme de \mathcal{D} sur l'intérieur du cercle unité tel que $t(0) = 0$; on en déduit comme dans le théorème II le développement :

$$\rho_\Lambda^T(X; \beta, z(t)) = t^N \sum_{n \geq 0} t^n \gamma_{\Lambda, n}(X; \beta)$$

où $t \rightarrow z(t)$ est la mapping inverse, et par conséquent :

$$|\gamma_{\Lambda, n}(X; \beta)| < A_0 C_0^N \mathcal{N}(X). \quad (40)$$

D'autre part, si α est un nombre arbitraire tel que $0 < \alpha < 1$, il existe, d'après le théorème III des constantes A_1 et C_1 telles que :

$$|\rho_\Lambda^T(X; \beta, z)| < A_1 C_1^N \mathcal{N}(X) e^{-L_\delta(X)}$$

pour tout z dans le cercle de rayon $\alpha r_\delta(\beta)$; on en déduit par une formule de Cauchy :

$$|\gamma_{\wedge, n}(X; \beta)| < A_1 C_1^N \mathcal{N}(X) \frac{e^{-L_\delta(X)}}{\tau^{N+n}}$$

où $\tau = \text{Inf } \{|t(z)| : |z| = \alpha r_\delta(\beta)\}$

Soit n_0 un nombre positif quelconque, on a, en utilisant l'inégalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq n < n_0} |t^n \gamma_{\wedge, n}(X; \beta)| &< A_1 \left(\frac{C_1}{\tau}\right)^N \mathcal{N}(X) \sum_{0 \leq n < n_0} \left(\frac{|t|}{\tau}\right)^n e^{-L_\delta(X)} \\ &< A_1 \left(\frac{C_1}{\tau}\right)^N \mathcal{N}(X) \left(1 + \frac{|t|}{\tau}\right)^{n_0} e^{-L_\delta(X)} \end{aligned}$$

En utilisant (40), on a d'autre part,

$$\sum_{n \geq n_0} |t^n \gamma_{\wedge, n}(X; \beta)| < A_0 C_0^N \mathcal{N}(X) \frac{|t|^{n_0}}{1 - |t|}$$

Si l'on choisit $n_0 = L_\delta(X) \left[\ln \frac{|t| + \tau}{|t|}\right]^{-1}$, on obtient finalement :

$$|\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z(t))| < |t|^N \left[\frac{A_0}{1 - |t|} C_0^N + A_1 \left(\frac{C_1}{\tau}\right)^N \right] \mathcal{N}(X) e^{\frac{L_\delta(X) \ln |t|}{\ln \frac{|t| + \tau}{|t|}}}$$

d'où le résultat annoncé par un choix convenable des constantes.

d) Systemes continus

Dans le cas des systemes continus, les demonstrations precedentes des decroissances fortes a basse activite ne s'appliquent plus ; en effet, ces demonstrations (theoreme I et lemme II) reposent sur une majoration des coefficients $C_{\wedge, n}(X; \beta)$ que l'on obtient par comparaison avec les sommes discretes $\sum_{x_2, \dots, x_N} |C_{\wedge, n}(X; \beta)|$, ce qui n'est plus possible lorsque la somme discrete est remplacee par une integrale.

On peut cependant démontrer des propriétés de décroissance forte concernant des fonctions de corrélation tronquées "moyennées" dans l'espace de façon appropriée [11], par exemple comme suit :

Soit a un nombre positif arbitraire, et pour tout $x \in \mathbb{Z}^v$ soit $\chi_x(\cdot)$ la fonction caractéristique du cube de côté a centré en $a.x$; relativement à cette discrétisation de l'espace, nous définissons les fonctions de corrélation "moyennées" par :

$$\bar{\rho}(X) = \int \prod_{i=1}^N dy_i \frac{\chi_{x_i}(y_i)}{a^v} \rho(y_1, \dots, y_N)$$

On peut alors vérifier, en utilisation de la définition (19) que la troncation et l'opération de moyenne commutent,

$$\bar{\rho}^T(X) = \int \prod_{i=1}^N dy_i \frac{\chi_{x_i}(y_i)}{a^v} \rho^T(y_1, \dots, y_N)$$

Cela étant, ces fonctions admettent un développement de Mayer convergent à basse activité de la forme :

$$\bar{\rho}_{\wedge}^T(X; \beta, z) = z^N \sum_{n \geq 0} z^n \bar{C}_{\wedge, n}(X; \beta)$$

où

$$\bar{C}_{\wedge, n}(X; \beta) = \frac{1}{n!} \int \prod_{i=1}^N dx'_i \frac{\chi_{x_i}(x'_i)}{a^v} \prod_{j=1}^n dy_j \varphi(X', Y; \beta)$$

pourvu que le potentiel Φ soit stable et que :

$$C(\beta) = \int dx |e^{-\beta\Phi(0, x)} - 1| < \infty .$$

On vérifie alors aisément que tous les résultats des sections b) et c) s'étendent aux fonctions tronquées moyennées définies ci-dessus, c'est-à-dire les propriétés de décroissance forte à basse activité pour des potentiels à portée finie ou infinie et l'extension de ces propriétés par des hypothèses supplémentaires d'analyticité et de borne.

Nous présentons maintenant une méthode nouvelle [21] qui évite, à basse activité, le recours à la discrétisation pourvu que le potentiel satisfasse la condition générale suivante analogue à (36).

Hypothèse de décroissance du potentiel

Nous supposons dans cette section que le potentiel est tel que :

$$|K(x, x')| \leq e^{-\delta(x, x')} K_\delta(\beta) < \infty \tag{41}$$

où δ est une distance invariante par translation telle que :

$$\int dx e^{-\frac{1}{2} \delta(0, x)} = C(\delta) < \infty$$

Ces conditions sont vérifiées en particulier dans les cas suivants :

- 1) Φ est borné par Cste $e^{-a|x|}$ à l'infini, on peut alors choisir $\delta(x, x') = a|x-x'|$.
- 2) Φ est borné par $\frac{Cste}{(1 + |x|)^s}$ à l'infini avec $s > 2\nu$; dans ce cas on peut prendre $\delta(x, x') = s \ln(1 + |x-x'|)$.

On a alors le résultat suivant :

THEOREME V : Si Φ est un potentiel stable vérifiant l'hypothèse de décroissance (41), le développement de Mayer de $\rho_\wedge^T(X; \beta, z)$ est absolument convergent pour $|z| < r_\delta(\beta) = e^{-2\beta B - 1} K_\delta(\beta)^{-1} C(\delta)^{-1}$, \wedge fini ou infini et l'on a :

$$|\rho_\wedge^T(X; \beta, z)| < \frac{2|z|e^{-2\beta B}}{(1 - |z|e^{2\beta B - 1} K_\delta(\beta) C(\delta))} \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} (|z|e^{2\beta B - 1} K_\delta(\beta))^{N-1} \prod_{(x, x') \in C} H_{\beta, \delta}(x, x'; z) \tag{42}$$

où $\mathcal{C}(X)$ est l'ensemble des chaînes construites sur X et où la fonction $H_{\beta, \delta}$ définie par :

$$H_{\beta, \delta}(x, x'; z) = \sum_{n \geq 0} (|z| e^{2\beta B + 1} K_{\delta}(\beta))^n \int_{\mathbb{R}^{nv}} dY e^{-\frac{1}{2}[\delta(x, y_1) + \delta(y_1, y_2) + \dots + \delta(y_n, x')]} \quad (43)$$

est intégrable par rapport à $x-x'$.

Preuve : On a d'après le lemme I :

$$|\varphi(X; \beta)| < (e^{2\beta B})^{N-2} \sum_{T \in \mathcal{C}(X)} \prod_{(x, x') \in T} |K(x, x')|$$

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse de décroissance (41) :

$$|\varphi(X; \beta)| < (e^{2\beta B})^{N-2} K_{\delta}(\beta)^{N-1} \sum_{T \in \mathcal{C}(X)} e^{-l_{\delta}(T)}$$

où $l_{\delta}(T) = \sum_{(x, x') \in T} \delta(x, x')$. Nous montrons dans le lemme III ci-dessous que

$$\sum_{T \in \mathcal{C}(X)} e^{-l_{\delta}(T)} \leq 2 \frac{N^{N-2}}{N!} \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C)} \quad (44)$$

On a donc :

$$|\varphi(X, Y; \beta)| < 2 (e^{2\beta B})^{N+n-2} K_{\delta}(\beta)^{N+n-1} \frac{(N+n)^{N+n-2}}{(N+n)!} \sum_{C \in \mathcal{C}(X, Y)} e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C)} \quad (45)$$

Or, à chaque chaîne $C \in \mathcal{C}(X, Y)$ nous pouvons associer la chaîne $C_X \in \mathcal{C}(X)$ des points de X pris dans le même ordre que celui de C ; en outre, toutes les chaînes de $\mathcal{C}(X, Y)$ sont obtenues à partir des chaînes de $\mathcal{C}(X)$ en "ajoutant" les points de Y de toutes les façons possibles la correspondance étant biunivoque. On peut ainsi vérifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^{nv}} dY \sum_{C \in \mathcal{C}(X, Y)} e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C)} = n! \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} \sum_{\substack{\{n_0, \dots, n_N\}: \\ n_i \geq 0, \sum n_i = n}} \prod_{i=0}^N \int_{\mathbb{R}^{n_i v}} dY e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C_i)} \quad (46)$$

où C_i ($1 \leq i < N$) est la chaîne joignant le $(i-1)^{\text{ème}}$ point de C au $i^{\text{ème}}$ point avec n_i points y intermédiaires, C_0 et C_N n'ayant qu'un point de X et respectivement n_0 et n_N points y .

Le résultat annoncé s'obtient à partir de (45) et (46) en remarquant que $(N+n)^{N+n-2} \leq (N+n-1)^{N+n-1} < e^{N+n-1} (N+n)!$ pour $N \geq 2$ et $n \geq 0$, et que :

$$\int_{\mathbb{R}^{nv}} dY e^{-\frac{1}{2}[\delta(x,y_2)+\dots+\delta(y_{n-1},y_n)]} = C(\delta)^n.$$

La formule (42) est de la forme :

$$|\rho^T(X)| < AC^N \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} \prod_{(x,x') \in C} H(x,x') \quad (47)$$

où H est intégrable par rapport à $x-x'$.

Une propriété de ce type est une nouvelle forme de décroissance forte, qui prend en compte la séparation de tous les points les uns par rapport aux autres.

Dans le cas où Φ est borné par $Cste e^{-a|x|}$ à l'infini, on vérifie que $H_{\beta,\delta}(x,x';z)$ décroît comme $e^{-a'|x-x'|}$ où a' dépend de z et tend vers zéro lorsque $|z| \rightarrow r_\delta(\beta)$. Pour le voir, on peut, par exemple, considérer les propriétés d'analyticité par rapport à k de la transformée de Fourier de $H_{\beta,\delta}$ par rapport à $x-x'$:

$$H_{\beta,\delta}(k;z) = \sum_{n \geq 0} (|z| e^{2\beta B+1} K_\delta(\beta))^n \tilde{h}_\delta(k)^{n+1} = \frac{\tilde{h}_\delta(k)}{1 - |z| e^{2\beta B+1} K_\delta(\beta) \tilde{h}_\delta(k)}$$

où \tilde{h}_δ est la transformée de Fourier $e^{-\frac{a}{2}|x|}$.

Dans le cas où Φ est borné par $\frac{Cste}{(1+|x|)^s}$ à l'infini

avec $s > 2v$, on peut vérifier directement que $H_{\beta,\delta}(x,x';z)$ est borné

par $\frac{Cste}{(1+|x-x'|)^{s/2}}$ pour $|z|$ suffisamment petit.

Remarquons enfin que dans le cas d'un gaz sur un réseau, la formule (47) est en fait équivalente (au moins dans le premier cas ci-dessus) à la propriété de strong clustering introduite dans la section b).

Nous terminerons cette section par la démonstration du :

LEMME III : Soit (E, δ) un espace métrique quelconque ; alors pour tout $X = (x_1, \dots, x_N)$, $N \geq 2$, $x_i \in E$, on a :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(X)} e^{-l_\delta(T)} \leq 2 \frac{N^{N-2}}{N!} \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} e^{-\frac{1}{2} l_\delta(C)}$$

où $\mathcal{T}(X)$ est l'ensemble des arbres construits sur X et $\mathcal{C}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{T}(X)$ constitué par les chaînes.

Preuve : A chaque arbre $T \in \mathcal{T}(X)$, nous associons un ensemble \mathcal{C}_T de chaînes obtenues de la façon suivante :

Nous considérons tous les "parcours" de T ne passant qu'au plus deux fois par chaque ligne de T , i.e. toutes les suites

$(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$, $(p \geq N)$ telles que :

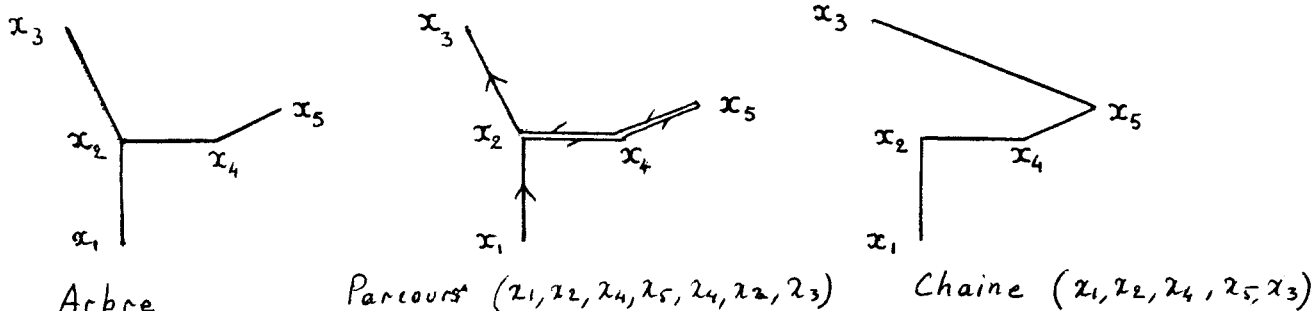
i) $X = \bigcup_{\alpha=1}^p \{x_{i_\alpha}\}$

ii) pour tout $\alpha < p$, $(x_{i_\alpha}, x_{i_{\alpha+1}})$ est une ligne de T

iii) chaque ligne (x, x') de T apparaît au moins une fois et au plus deux fois dans le parcours $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$.

Un tel parcours est toujours possible, par exemple en "tournant" autour de l'arbre dans un sens convenu.

A chaque parcours, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ nous associons une chaîne $(x_{j_1}, \dots, x_{j_N})$ obtenue en supprimant tous les x_{i_α} tels que $i_\alpha = i_\beta$ avec $\beta < \alpha$ (voir figure).



On a alors par l'inégalité triangulaire :

$$2 l_{\delta}(T) \geq \sum_{\alpha=1}^{p-1} \delta(x_{i_{\alpha}}, x_{i_{\alpha+1}}) \geq \sum_{\alpha=1}^{N-1} \delta(x_{j_{\alpha}}, x_{j_{\alpha+1}})$$

soit :

$$2 l_{\delta}(T) \geq l_{\delta}(C).$$

Soit $v(T)$ le nombre total de chaînes distinctes associées à un arbre T par le procédé précédent ; alors :

$$e^{-l_{\delta}(T)} \leq \sum_{C \in \mathcal{C}_T} \frac{1}{v(T)} e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C)}$$

Par conséquent :

$$\sum_{T \in \mathcal{C}(X)} e^{-l_{\delta}(T)} \leq \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} e^{-\frac{1}{2} l_{\delta}(C)} \left(\sum_{T : C \in \mathcal{C}_T} \frac{1}{v(T)} \right)$$

Le dernier facteur est évalué de la façon suivante (en posant $\delta \equiv 0$) :

$$\sum_{T \in \mathcal{C}(X)} 1 = N^{N-2} = \sum_{C \in \mathcal{C}(X)} \left(\sum_{T : C \in \mathcal{C}_T} \frac{1}{v(T)} \right)$$

Or, d'après le procédé d'association, $v(T)$ est indépendant de l'indexation particulière des points ; il en est de même de $\sum_{T : C \in \mathcal{C}_T} \frac{1}{v(T)}$

qui est donc le même pour les $\frac{N!}{2}$ chaînes ; autrement dit,

$$\sum_{T : C \in \mathcal{C}_T} \frac{1}{v(T)} = 2 \frac{N^{N-2}}{N!}$$

d'où le résultat annoncé.

III.- PROPRIETES DE DECROISSANCE OBTENUES A PARTIR DE LA LOCALISATION DES ZEROS DE LA FONCTION DE PARTITION ET DE LA MATRICE DE TRANSFERT

a) Les fonctions de corrélation tronquées à activité ou champ variable

Dans cette partie, nous considérons un système discret, un gaz sur un réseau par exemple, dans une boîte Λ finie arbitraire, avec une activité z_x réelle ou complexe, pouvant dépendre du site x dans Λ . La fonction de partition est alors définie par :

$$Z_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{X \in \Lambda^n} \frac{z^X}{n!} e^{-\beta U(X)}$$

où $z_{\Lambda} = \{z_x\}_{x \in \Lambda}$ et $z^X = \prod_{x \in X} z_x$.

Les fonctions de corrélation sont données, si $Z_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda}) \neq 0$ par :

$$\rho_{\Lambda}(X; \beta, z_{\Lambda}) = Z_{\Lambda}^{-1}(\beta, z_{\Lambda}) z^X \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \in \Lambda^n} \frac{z^Y}{n!} e^{-\beta U(X, Y)}$$

Il est facile de vérifier par induction, en utilisant la formule (19), que les fonctions de corrélation tronquées vérifient :

$$\rho^T(X; \beta, z_{\Lambda}) = z^X \left(\prod_{x \in X} \frac{\partial}{\partial z_x} \right) \ln Z_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda}) \quad (48)$$

De manière analogue, on peut montrer que dans le cas d'un réseau de spins dans un champ h_x dépendant du site, on a :

$$\langle \sigma(X) \rangle_{\Lambda}^T(\beta, h_{\Lambda}) = (-1)^{|X|} \left(\prod_{x \in X} \frac{\partial}{\partial h_x} \right) \ln Q_{\Lambda}(\beta, h_{\Lambda}) \quad (49)$$

où $Q_{\Lambda}(\beta, h_{\Lambda}) = \sum_{\sigma \in \Lambda} e^{-\sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x} e^{-\beta U(\sigma)}$.

D'autre part, on vérifie, en utilisant par exemple une méthode inspirée de [11], Appendice I, que la pression et les fonctions

de corrélation tronquées ont les développements suivants, convergents à basse activité :

$$\beta p_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{n \geq 0} \sum_{X \in \Lambda^n} \frac{z^X}{n!} \varphi(X; \beta)$$

$$\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}) = z^X \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \in \Lambda^n} \frac{z^Y}{n!} \varphi(X, Y; \beta).$$

Les résultats des théorèmes I et III sur les propriétés de décroissance à basse activité, s'étendent alors au cas où l'activité dépend du site, la condition $|z| < r$ étant remplacée par $\forall x \in \Lambda : |z_x| < r$.

En ce qui concerne les théorèmes d'extension II et IV, on utilisera dans la section b) , la généralisation suivante :

Supposons que pour tout Λ fini $t \rightarrow z_{\Lambda}(t) = \{z_x(t)\}_{x \in \Lambda}$ soit, pour tout $x \in \Lambda$, un mapping conforme du cercle unité dans un domaine commun \mathcal{D} de \mathbb{C} contenant zéro, tel que :

i) $\forall x \in \Lambda, z_x(0) = 0$

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists r(\epsilon) > 0$ tel que $|t| < r(\epsilon)$ implique $\forall x \in \Lambda, |z_x(t)| < \epsilon$.

Alors :

THEOREME VI : Si pour $\beta > 0$ fini, les fonctions $\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}(t))$ ont un prolongement analytique en t dans le cercle unité, et satisfont une borne du type :

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}(t))| < A_0 C_0^N \mathcal{N}(X)$$

où A_0 et C_0 sont indépendants de Λ, N, X et t , on a pour $|t| < 1$:

i) $|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}(t))| < \frac{A_0}{1 - |t|} C_0^N \mathcal{N}(X) |t|^{\frac{L(X)}{\lambda}}$

si le potentiel a une portée finie λ

$$ii) \quad \left| \rho_{\wedge}^T(X; \beta, z_{\wedge}(t)) \right| < A C^N \mathcal{N}(X) e^{-\chi L_{\delta}(X)}$$

si le potentiel vérifie l'hypothèse de décroissance (36), les constantes A, C et χ étant indépendantes de \wedge , N et X, et ne dépendant que de β , Φ et t.

Preuve : Pour $|t|$ suffisamment petit, tous les $z_x(t)$ sont dans le cercle de convergence du développement de Mayer ; on peut donc écrire :

$$\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z_{\wedge}(t)) = z(t)^X \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \in \wedge^n} \frac{z(t)^Y}{n!} \varphi(X, Y; \beta)$$

Comme $z_x(0) = 0$, on obtient de la même façon que dans les théorèmes II et IV, le développement suivant en t, absolument convergent dans le cercle unité :

$$\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z_{\wedge}(t)) = t^N \sum_{n \geq 0} t^n \gamma'_{\wedge, n}(X; \beta)$$

où $\gamma'_{\wedge, n}(X; \beta)$ est une combinaison linéaire de $\varphi(X, Y; \beta)$ avec $Y \in \wedge^{n'}$ et $n' \leq n$.

Les résultats annoncés sont alors obtenus sans difficulté, comme précédemment.

b) Résultats obtenus à partir des zéros de la fonction de partition

Gaz sur un réseau

Le lemme suivant montre que les hypothèses d'analyticité et de borne des théorèmes d'extension II, IV et VI sont réalisées lorsqu'on a des renseignements suffisants sur les zéros de la fonction de partition.

LEMME IV : Si pour $\beta > 0$ fini et \wedge assez grand, il existe un domaine D de \mathcal{C} tel que $Z_{\wedge}(\beta, z_{\wedge}) \neq 0$ lorsque $z_x \in D$, $\forall x \in \wedge$, alors :

i) les fonctions $\rho_{\wedge}^T(X; \beta, z_{\wedge})$ sont analytiques par rapport aux variables z_x dans D

ii) pour tout domaine $\mathcal{D} \subset D$ dont la distance au bord de D est strictement positive, il existe des constantes A et C indépendantes de Λ , N et X , telles que pour tout $z_x \in \mathcal{D}$ et tout $x \in \Lambda$:

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda})| < A C^N \mathcal{N}(X).$$

Preuve : La fonction $\ln Z_{\Lambda}(\beta; z_{\Lambda})$ étant analytique par rapport aux variables $z_x \in D$, on peut, en utilisant la formule de Cauchy, écrire (48) sous la forme :

$$\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}) = z^X \frac{\mathcal{N}(X)}{(2i\pi)^p} \oint_{\gamma} d\xi_{x_1} \dots d\xi_{x_p} \frac{\ln Z_{\Lambda}(\beta; \xi_X, z_{\Lambda \setminus X})}{\prod_{i=1}^p (\xi_{x_i} - z_{x_i})^{N_i+1}}$$

pour $X = \{\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{N_1}, \dots, \overbrace{x_p, \dots, x_p}^{N_p}\}$ ($\mathcal{N}(X) = N_1! \dots N_p!$), le contour d'intégration γ étant pris à l'intérieur de D .

En posant :

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda}) &= z_{x_1} Q_{\Lambda}(\beta; z_{\Lambda \setminus x_1}) + R_{\Lambda}(\beta; z_{\Lambda \setminus x_1}) \\ &= [z_{x_1} - a(z_{\Lambda \setminus \{x_1\}})] Q_{\Lambda}(\beta; z_{\Lambda \setminus x_1}) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}) = z^X \frac{\mathcal{N}(X)}{(2i\pi)^{p N_1}} \oint_{\gamma} \frac{d\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_p}}{[\xi_{x_1} - a(\xi_{x_2}, \dots, \xi_{x_p}, z_{\Lambda \setminus X})] (\xi_{x_1} - z_{x_1})^{N_1} \prod_{i=2}^p (\xi_{x_i} - z_{x_i})^{N_i+1}}$$

Soit \mathcal{D} un domaine de \mathcal{C} , inclus dans D , dont la distance au bord de D est non nulle ; d'après l'hypothèse, la racine $a(z_{\Lambda \setminus \{x_1\}})$ de

$Z_{\Lambda}(\beta, z_{\Lambda})$ par rapport à z_{x_1} ne peut être qu'à l'extérieur de D , d'où le résultat annoncé par un choix convenable de γ .

Il a été démontré dans [14], qu'à température suffisamment haute, la fonction de partition $Z_{\Lambda}(\beta; z_{\Lambda})$ d'un gaz sur un réseau est différente de zéro lorsque toutes les activités z_x sont dans un cer-

tain domaine D du plan complexe, contenant l'axe réel positif.

En appliquant le lemme précédent et les théorèmes II (potentiel à portée finie), IV (potentiel à portée infinie) ou VI (activité variable), on obtient les propriétés de décroissance forte correspondantes dans D.

Systemes de spins

Considérons des systèmes ferromagnétiques ($J(x,x') \leq 0$) ; on sait [2] qu'à toute température la fonction de partition $Q_{\Lambda}(\beta, h_{\Lambda})$ est différente de zéro dès que $Re h_x > 0$ pour tout $x \in \Lambda$.

En outre, si $Q_{\Lambda}(\beta, h) \neq 0$ lorsque le champ unique h appartient à un certain voisinage complexe de zéro, il en est de même [15] pour $Q_{\Lambda}(\beta; h_{\Lambda})$.

Dans chaque cas, il existe un domaine correspondant D_i ($i = 1, 2$) de \mathcal{C} tel que si $h_x \in D_i$ pour tout $x \in \Lambda$, alors $Q_{\Lambda}(\beta, h_{\Lambda}) \neq 0$.

En partant de la formule (49) et en adaptant le lemme IV, on montre alors que pour tout domaine $\mathcal{D}_i \subset D_i$ dont la distance au bord de D est non nulle, il existe des constantes A_i et C_i telles que :

$$|\langle \sigma(X) \rangle_{\Lambda}^T(\beta, h_{\Lambda})| < A_i C_i^N \mathcal{N}(X) \tag{50}$$

dès que $h_x \in \mathcal{D}_i$ pour tout $x \in \Lambda$.

En utilisant d'une part, l'isomorphisme entre systèmes de spins et gaz sur un réseau, caractérisé par la formule (22), et d'autre part le résultat ci-dessus et le théorème VI, on prouve que $\langle \sigma(X) \rangle_{\Lambda}^T(\beta; h)$ (où h est ici un champ unique) satisfait des propriétés de décroissance forte dans $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Plus précisément, on déduit de (22) et de (50) qu'il existe des constantes A et C telles que :

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z_{\Lambda}(t))| < A C^N \mathcal{N}(X)$$

pour tout t dans le cercle unité, avec $z_x(t) = e^{-2(h(t) - \beta C_{\Lambda}(x))}$, où $t \rightarrow h(t)$ est un mapping conforme du cercle unité sur \mathcal{D} tel que

$$h(0) = + \infty.$$

On est alors dans les conditions d'application du théorème VI, et le résultat annoncé s'obtient en utilisant de nouveau l'isomorphisme et la formule (22).

c) Formalisme de la matrice de transfert [16] et décroissance des corrélations

Nous considérons ci-dessous un système de spins sur un réseau \mathbb{Z}^{ν} avec interactions à plus proche voisin ($J(x, x') = 0$ si $|x - x'| > 1$) et à champ magnétique nul.

Les méthodes suivantes peuvent cependant s'étendre à des potentiels plus généraux.

Il est possible d'étudier un tel système en introduisant une direction privilégiée $\hat{\ell}$ du réseau et des boîtes Λ de la forme $K \times L$, où K est une base constante bornée (de dimension $\nu - 1$) perpendiculaire à $\hat{\ell}$ et où L est un intervalle de \mathbb{Z} . Le système dans Λ est décomposé en "couches" correspondantes de "largeur" K . Etant donné l'ensemble des configurations σ d'une couche et l'espace vectoriel \mathcal{H}_K sur \mathcal{C} qu'elles engendrent, la matrice de transfert pour $\beta > 0$ fixé est l'opérateur symétrique sur \mathcal{H}_K défini par ses éléments :

$$T(\sigma, \sigma') = \exp \left[-\beta \left(\frac{H(\sigma)}{2} + \frac{H(\sigma')}{2} + I(\sigma, \sigma') \right) \right] \quad (51)$$

où $H(\sigma)$ est l'énergie de la configuration σ (voir éq.(12)), et $I(\sigma, \sigma')$ est l'énergie d'interaction entre σ et σ' considérés sur deux couches successives ($I(\sigma, \sigma') = \sum_{x, x' \in K} J(x, x') \sigma_x \cdot \sigma'_{x'}$).

Nous dénoterons ci-dessous par $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots$ ($\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_j \dots$) et $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |j\rangle, \dots$, les valeurs propres et vecteurs propres de T ; le fait que $\lambda_0 > \lambda_1$ peut être prouvé à l'aide du théorème de Perron-Frobenius.

L'on peut vérifier que dans la limite d'un nombre infini de couches ($|L| = + \infty$) :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_N} \rangle_K = \langle 0 | \tilde{\sigma}_{x_1} \dots \tilde{\sigma}_{x_N} | 0 \rangle_K$$

où :

$$\tilde{\sigma}_{x_i} = \left(\frac{T}{\lambda_0}\right)^{\ell_i} \hat{\sigma}_{x_i} \left(\frac{T}{\lambda_0}\right)^{-\ell_i}$$

et $\hat{\sigma}_x$ est l'opérateur sur \mathcal{H}_K défini par $\hat{\sigma}_x |\sigma\rangle = \sigma_x |\sigma\rangle$ pour tout $\sigma = \{\sigma_x\}_{x \in K}$.

La même identité s'applique aux fonctions tronquées :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_N} \rangle_K^T = \langle 0 | \tilde{\sigma}_{x_1} \dots \tilde{\sigma}_{x_N} | 0 \rangle_K^T.$$

Décroissance des corrélations

Pour $N = 2$, l'on a :

$$\langle \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rangle_K^T = \langle 0 | \tilde{\sigma}_{x_1} Q \tilde{\sigma}_{x_2} | 0 \rangle_K$$

où $Q = 1 - |0\rangle\langle 0|$. En utilisant les relations $\frac{T}{\lambda_0} |j\rangle = \frac{\lambda_j}{\lambda_0} |j\rangle$ et

$\frac{\lambda_j}{\lambda_0} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ ($j \geq 1$), l'on obtient sans difficulté une décroissance du type $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\ell_2 - \ell_1}$.

On montre que le même résultat est encore valable dans la limite d'une longueur K infinie si $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ est strictement inférieur à 1 dans cette limite. Par un choix convenable de $\hat{\ell}$, on obtient alors en conséquence pour toutes les configurations x_1, x_2 :

$$|\langle \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rangle_K^T| \leq C e^{-\chi |x_1 - x_2|} \quad (\chi > 0).$$

Pour $N > 2$, [4], la même méthode implique une décroissance du type :

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\ell_N - \ell_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\ell_2 - \ell_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\ell_3 - \ell_2} \dots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\ell_N - \ell_{N-1}}$$

pour $\langle 0 | \tilde{\sigma}_{x_1} Q \tilde{\sigma}_{x_2} Q \dots Q \tilde{\sigma}_{x_N} | 0 \rangle$. Ce terme n'est plus la fonction de corrélation tronquée, puisqu'il ne correspond qu'à des soustractions de corrélations dans un ordre donné. La formule suivante peut cependant s'appliquer :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_N} \rangle^T = \langle 0 | \tilde{\sigma}_{x_1} Q \dots Q \tilde{\sigma}_{x_N} | 0 \rangle - \sum_N^r \prod_{j=1}^k \langle \sigma(X_j) \rangle^T \quad (52)$$

($\pi_1 \dots \pi_k$)

où la somme \sum_N^r porte sur toutes les partitions "recouvrantes" de (1...N) (c'est-à-dire telles que l'ensemble des segments joignant les points extrêmes de chaque partie fasse un recouvrement de 1...N et où $\sigma(X_j) = \prod_{i \in \pi_j} \sigma_{x_i}$). On obtient alors aisément par induction une décroissance du type $(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})^{\ell N - \ell}$ pour $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_N} \rangle^T$ et plus généralement (par un choix convenable de $\hat{\ell}$) une borne du type :

$$| \langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_N} \rangle^T | \leq C^N N! e^{-\chi D(X)}$$

où C et χ sont indépendants de N et X et D(X) est le diamètre de la configuration X ($D(X) = \text{Max}_{i,j=1,\dots,N} |x_i - x_j|$).

La décroissance du facteur $e^{-\chi D(X)}$ est plus "faible" que celle d'un facteur du type $e^{-\chi L(X)}$ introduit dans la partie II, dès que les points $x_1 \dots x_N$ ne sont pas alignés. La constante $C^N N!$ croît aussi plus vite pour $N \rightarrow \infty$ que $C^N \mathcal{N}(X)$.

Les conséquences de ce type de "faiblesse", qui sont dues au fait qu'une direction et un ordre sont privilégiés dans la méthode de la matrice de transfert, apparaîtront clairement dans la partie IV où les liens entre propriétés de décroissance et d'analyticité sont étudiés.

Pour un modèle à une dimension ($\nu = 1$), $D(X) \equiv L(X)$. Cependant même dans ce cas la seconde "faiblesse" mentionnée plus haut ($N!$ au lieu de $\mathcal{N}(X)$) subsiste. Dans le cas d'interaction à plus proches voisins, on peut cependant faire un calcul explicite, qui montre que cela est dû à l'utilisation par induction de la formule (52). En fait, la formule suivante semble valable dans ce cas :

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_{2N}} \rangle^T = (-1)^{N+1} \sum_{\{v_1, \dots, v_{2N-1}\}} \prod_{i=1}^{2N-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{v_i (x_{i+1} - x_i)}$$

où la somme est étendue aux suites $\{v_1, \dots, v_{2N-1}\}$ de nombres entiers,

telles que $v_1 = v_{2N-1} = 1$, $v_{i+1} = v_i \pm 1$ et $v_i \geq 1$.

Résultats sur le gap

Comme nous venons de le voir, l'obtention de propriétés de décroissance est liée à la persistance d'un "gap" au sommet du spectre de la matrice de transfert ($\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1$), dans la limite d'une largeur K infinie. Cela a d'abord été prouvé par Onsager [3] par un calcul explicite dans le cas d'un système ferromagnétique à 2 dimensions, à interactions entre plus proches voisins et à $\beta < \beta_c$ (il a été montré que la température d'Onsager β_0^{-1} coïncide avec la température critique β_c^{-1} au-dessous de laquelle il y a transition de phase).

Plus récemment, la persistance du gap a été prouvée dans les cas suivants :

- i) à haute température et, pour chaque phase pure, à basse température, la dimension ν étant quelconque [17].
- ii) à $h = 0$ et $\beta > \beta_c$ pour chaque phase pure dans le modèle à 2 dimensions d'Onsager [18].
- iii) à l'aide de l'isomorphisme de Lee et Yang et du théorème récent suivant, dû à Lebowitz et Penrose [19], dans le cas d'un gaz sur un réseau.

THEOREME VII : Si pour $\beta > 0$ fixé et pour tout Λ assez grand, il existe un domaine commun \mathcal{D} de \mathcal{C} contenant zéro tel que $z \in \mathcal{D}$ implique $Z_\Lambda(\beta; z) \neq 0$, alors il y a persistance du gap à la limite thermodynamique pour tout $z \in \mathcal{D}$.

Remarquons que pour une activité z arbitraire, réelle ou complexe, la matrice de transfert correspondante, relative au gaz sur un réseau, n'est pas, en général, symétrique ; le gap est alors défini par rapport aux deux plus grands modules des valeurs spectrales $\lambda_0(z)$ et $\lambda_1(z)$.

Ce résultat a des liens étroits avec les théorèmes de la section b). L'hypothèse $Z_{\wedge}(\beta; z) \neq 0$ (où z est une activité unique) semble cependant plus faible que l'hypothèse correspondante sur $Z_{\wedge}(\beta; z_{\wedge})$ (où $z_{\wedge} = \{z_x\}_{x \in \wedge}$), bien qu'elle coïncide pour des systèmes ferromagnétiques.

Le théorème est prouvé dans [19] en montrant que pour chaque largeur K , la fonction $v(z, K) = \ln \left| \frac{\lambda_1(z, K)}{\lambda_0(z, K)} \right|$ est une fonction sous-harmonique de $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

Un lemme sur les fonctions sous-harmoniques montre que si, pour une suite croissante de K , la suite des fonctions négatives $v(z_0, K)$ prend des valeurs arbitrairement petites en un point z_0 donné arbitraire de \mathcal{D} , alors il en est de même pour "presque" tous les points de \mathcal{D} ([19] lemme 1).

Il ne peut en être ainsi dans le cas étudié ; en effet, en vue de la décroissance exponentielle des corrélations à basse activité énoncée précédemment dans la partie II, on montre que $v(z, K)$ ne peut s'approcher de zéro pour $|z|$ petit.

IV.- ANALYTICITE ET PROPRIETES DE DECROISSANCE ; QUELQUES RESULTATS GENERAUX

De l'analyticité aux propriétés de décroissance

Nous avons vu dans les parties II et III que l'analyticité joue un rôle important dans l'obtention des propriétés de décroissance. En particulier, l'analyticité par rapport à z des corrélations dans un domaine \mathcal{D} contenant $z = 0$, est l'hypothèse de base des théorèmes II, IV et VI. Ces théorèmes utilisent, par ailleurs, comme hypothèse une borne uniforme dans \mathcal{D} (indépendante de N, X, \wedge). Ces hypothèses sont vérifiées dans le cas de l'absence de zéro de $Z_{\wedge}(\beta; z_{\wedge})$ (voir partie III) ou encore dans le cas où les corrélations sont analytiques par rapport aux variables $z_x \in \mathcal{D}$ et où l'on a une borne sur la fonction à 1 point $\rho_{\wedge}(x; \beta, z_{\wedge})$.

Par ailleurs, des résultats plus généraux peuvent être obtenus en utilisant des hypothèses d'analyticité par rapport à β , ou d'autres constantes de couplage.

Il n'est pas encore connu si l'analyticité de la pression seule par rapport à z , et non de l'ensemble des corrélations, est suffisante en général.

Certains résultats sur les potentiels positifs (ou systèmes de spins antiferromagnétiques), ainsi que le résultat ci-dessus de la référence [19] suggèrent qu'il pourrait en être ainsi.

La condition $Z_{\Lambda}(\beta, z) \neq 0$ dans \mathcal{D} de [19] implique en fait l'analyticité de la pression, mais non a priori celle des fonctions de corrélation.

Des propriétés de décroissance à l'analyticité

Réciproquement, il est facile de voir que des propriétés de décroissance des corrélations en des points réels (β, z) impliquent des propriétés de régularité ou d'analyticité en ces points.

Ceci découle des relations reliant les dérivées de la pression, ou des corrélations, à des sommes (ou intégrales) de fonctions de corrélation tronquées. Par exemple :

$$z_0^n \beta_0 \frac{\partial^n p_{\Lambda}(\beta_0, z_0)}{\partial z^n} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{X \in \Lambda^n} \rho_{\Lambda}^T(X; \beta_0, z_0) \quad (53)$$

L'on obtient par exemple le théorème suivant :

THEOREME VIII : Si en un point (β_0, z_0) réel, les fonctions de corrélation tronquées ρ_{Λ}^T satisfont, pour tout Λ suffisamment grand, la propriété de décroissance forte :

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z)| < A C^N \sum_{T \in \mathcal{C}(X)} \prod_{(x, x') \in T} H(x-x') \quad (54)$$

où H est une fonction intégrable ($\sum_{x \in \mathbb{Z}^v} H(x) < \infty$) indépendante de

N, X, Λ et si les fonctions ρ_Λ ont une limite thermodynamique ($\Lambda \rightarrow \infty$) au point (β_0, z_0) , alors la pression et les fonctions de corrélation sont analytiques par rapport à z au point (β_0, z_0) (pour Λ fini ou infini).

Preuve ; Le résultat pour la pression par exemple se déduit de la formule (53) impliquant dans ce cas :

$$\left| z_0^n \beta_0 \frac{\partial^n \rho_\Lambda}{\partial z^n} (\beta_0, z_0) \right| < D^n n!$$

où D est indépendant de Λ et de n .

L'analyticité des corrélations se démontre de la même façon.

Des méthodes analogues permettent aussi d'obtenir des propriétés d'analyticité par rapport à β , ou d'autres existantes de couplage, à partir de bornes appropriées, étendant (54), sur des fonctions de corrélation "partiellement" tronquées (c'est-à-dire tronquées par rapport à des groupes de points).

Théorème d'équivalence

Nous nous restreignons par simplicité à des potentiels à portée finie ou à décroissance exponentielle et à un gaz sur un réseau. A l'aide de la relation (28), l'on démontre l'équivalence entre des propriétés de décroissance forte du type (39) ou du type (54) avec pour H une fonction exponentiellement décroissante (l'une entraîne l'autre et réciproquement, avec éventuellement des constantes différentes).

Les théorèmes II, IV et VIII permettent alors d'établir :

THEOREME IX : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes (pour $\beta > 0$ fixé)

i) analyticité des corrélations ρ_Λ dans un voisinage complexe

(dans \mathcal{C}) indépendant de Λ , N , X d'un intervalle réel $]0, z_0]$, et

$$|\rho_{\Lambda}^T(X; \beta, z)| < A C^N \mathcal{N}(X)$$

dans ce voisinage.

- ii) propriétés de décroissance forte du type (39) ou (54), en chaque point z réel de $]0, z_0]$.

Preuve : Le fait que (i) implique (ii) découle des théorèmes II ou IV. Le fait que (ii) implique l'analyticité dans un voisinage complexe de $]0, z_0]$ découle du théorème VIII. L'on peut montrer de plus que la propriété de décroissance forte en un point z implique non seulement l'analyticité en ce point, mais de plus une propriété de décroissance analogue dans un voisinage complexe de z , en particulier la borne $|\rho_{\Lambda}^T| < AC^N \mathcal{N}(X)$.

Des résultats analogues utilisant l'analyticité par rapport aux variables z_x , $x \in \Lambda$ sont obtenus.

Propriétés de régularité

Dans la partie II des propriétés de décroissance des corrélations ont été obtenues à partir de propriétés d'analyticité. En vue du théorème VIII, l'on peut réciproquement déduire des propriétés d'analyticité à partir de décroissance forte.

Il n'existe cependant jusqu'à présent pas de situation pour laquelle une décroissance forte a été prouvée alors que l'analyticité n'était pas connue, ou supposée.

D'autre part, la section III c) décrit des situations où des propriétés de décroissance plus "faibles" ont été obtenues en des points réels où il n'existait pas d'information directe sur l'analyticité ou la régularité par rapport à h : en particulier, à $h = 0$ et $\beta < \beta_c$ ou $\beta > \beta_c$ pour chaque phase pure, dans le système d'Ising ferromagnétique à deux dimensions et à interactions à plus proches voisins.

Ces résultats ne sont plus suffisants pour prouver l'analyticité, mais permettent cependant (par des procédés un peu plus compliqués) de déduire au moins que la pression et les fonctions de corrélation sont (dans la limite thermodynamique) infiniment différentiables [20].

Cela pose la question intéressante suivante : l'on s'attend physiquement en dehors de la région de transition de phases à des propriétés de décroissance forte et d'analyticité. Qu'en est-il pour chaque phase pure dans la région de transition de phases? Les décroissances fortes, si elles pouvaient être prouvées impliqueraient non seulement l'infinie différentiabilité, mais l'analyticité (c'est-à-dire l'existence de prolongements analytiques des fonctions obtenues par exemple pour $h > 0$ ou $h < 0$ à travers la région $h = 0$, $\beta > \beta_c$, dans le système considéré ci-dessus).

Cette question est aujourd'hui controversée et il ne semble pas y avoir d'unanimité chez les spécialistes.

REFERENCES

- [1] Ruelle D. : Rigorous results in statistical mechanics, Benjamin, (1969).
Yvon J. : Les corrélations et l'entropie en Mécanique statique classique, Dunod.
- [2] Yang C.N. and Lee T.D. : Phys. Rev. 87, 410 (1952)
- [3] Onsager L. : Phys. Rev., 65, 117 (1944)
- [4] Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B. : Commun. Math. Phys. 31, 191 (1973)
- [5] Voir par exemple Uhlenbeck G.E. and Ford G.W. dans Studies in Statistical Mechanics, vol 1, p. 143, North Holland Publishing Co (1962) ; [7] ; [11] Appendice I.
- [6] Lebowitz J.L. and Penrose O. : Commun. Math. Phys, 11, 99 (1968).
Gallavotti G. and Miracle-Sole S. : Commun. Math. Phys. 12, 269 (1969).
- [7] Voir Ruelle D. [1] § 4.
- [8] Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B., Commun Math. Phys., 35 307 (1974)
- [9] Groeneveld J. dans Statistical Mechanics, Proceeding of the I.U.P.A.P. Meeting, Copenhagen (1966).
- [10] Penrose O. dans le même volume que [9].
- [11] Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B. : Decay of correlations for infinite-range interactions. A paraître dans J. Math. Phys. August 1975.
- [12] Penrose O. : J. Math. Phys., 4, 1312 (1963)
- [13] Cayley A. : Quart. J. Math. 23, 376 (1889) et dans "A seminar on graph theory", p. 70 édité par Harary F., Holt Pineharte and Wiston, New-York, (1967).

- [14] Ruelle D. : Phys. Rev. Letters 26, 303 (1971)
- [15] Voir Theorem III de Lieb E.H. and Ruelle D. : J. Math. Phys. 13, 265 (1973)
- [16] Voir par exemple Camp W.J. and Fisher M.E. : Phys. Rev. B6 946 (1972), et les références citées .
- [17] Minlos R.L. and Sinai J.G. : Teor. Matem. Fiz. 2, N°2, 230, (1970)
- [18] Wu T.T. : Phys. Rev. 149, 380 (1965) et Abraham D.B. and Martin-Löf A. : Commun Math. Phys., 32, 245 (1973)
- [19] Lebowitz J.L and Penrose O. : Commun Math. Phys, 39, 165 (1974)
- [20] Lebowitz J.L. : Commun Math. Phys. 28, 313 (1972)
- [21] Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B., à paraître .