

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

MICHEL LASSALLE

Produit de composition associé à un graphe et programme non linéaire en théorie axiomatique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1974, tome 20
« Conférences de : M. Lassalle et A. Martin », , exp. n° 1, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1974__20__A1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PRODUIT DE COMPOSITION ASSOCIE A UN GRAPHE ET
PROGRAMME NON LINEAIRE EN THEORIE AXIOMATIQUE DES CHAMPS

Michel LASSALLE

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes - 75230 Paris Cedex 05 - France

A189.0374

I - INTRODUCTION

A partir d'une formulation mathématique précise de quelques principes généraux et physiquement raisonnables [1,2], la théorie axiomatique des champs souhaite établir des propriétés générales des amplitudes de diffusion des particules élémentaires. Depuis les premières preuves des relations de dispersion [3], de nombreuses contributions ont été consacrées aux propriétés d'analyticité de ces amplitudes. Nous présentons ici quelques résultats dans ce domaine.

Précisons d'abord quelques notations. On considère n particules élémentaires et l'on note $X = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices les dénombrant. Une réaction physique entre ces particules c'est la donnée d'un ensemble de particules "entrantes" I et d'un ensemble de particules "sortantes" $X \setminus I$. Dans la suite on assigne à chaque particule $i \in X$ un quadri-moment de l'espace-temps $p_i \in \mathbb{R}^4$; on note $\mathcal{P}^*(X)$ l'ensemble des parties propres de X .

L'amplitude de diffusion $f_I(p_1, \dots, p_n)$ qui décrit la réaction $I \rightarrow X \setminus I$ est alors une distribution sur la variété "région physique" :

$$\mathcal{M}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4n} : p_1 + \dots + p_n = 0 ; p_i^2 = p_i^0^2 - \vec{p}_i^2 = m_i^2$$

$$\forall i \in X ; p_i \in V^+ \forall i \in X \setminus I ; p_i \in V^- \forall i \in I\} .$$

$\mathcal{M}_I$ n'est qu'une des composantes connexes de la variété "couche de masse" $\mathcal{M}$ ainsi définie :

$$\mathcal{M} = \{p \in \mathbb{R}^{4n} : p_1 + \dots + p_n = 0, p_i^2 = m_i^2 \forall i \in X\} .$$

La première égalité correspond à la "conservation de l'énergie-impulsion",

les suivantes aux conditions de masse et de positivité de l'énergie pour chaque particule. V^+ (resp. V^-) désigne l'intérieur du cône futur (resp. passé) de lumière dans $\mathbb{R}^4$.

On souhaite établir que ces diverses distributions $f_I(p_1, \dots, p_n)$ sont valeurs au bord de fonctions analytiques sur la variété "couche de masse complexifiée" $\mathcal{M}^c$ ainsi définie :

$$\mathcal{M}^c = \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^{4n} : k_1 + \dots + k_n = 0 ; k_i^2 = m_i^2 \ \forall i \in X\} .$$

Un premier pas dans cette direction est obtenu à l'aide des "formules de réduction" prouvées heuristiquement par Lehmann, Symanzik et Zimmermann [4] et rendues complètement rigoureuses par Hepp [5]. Celles-ci affirment que chaque distribution $f_I(p_1, \dots, p_n)$ est la restriction à $\mathcal{M}_I$ d'une même distribution $T(p_1, \dots, p_n)$ définie dans l'espace ambiant :

$$f_I(p_1, \dots, p_n) = T(p_1, \dots, p_n)|_{\mathcal{M}_I} .$$

Le second pas est obtenu à l'aide des travaux de Ruelle [6] qui a montré que cette distribution $T(p_1, \dots, p_n)$ définie dans $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ est une valeur au bord particulière d'une fonction $H(k_1, \dots, k_n)$ définie dans $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ et appelée "fonction de n points".

Les propriétés d'analyticité des amplitudes de diffusion résultent alors de celles de la fonction de n points sur la couche de masse complexifiée $\mathcal{M}^c$. Comme conséquence des axiomes de causalité, invariance par translation, condition spectrale (ou positivité de l'énergie), comportement distributionnel près des réels, on a pu montrer pour celle-ci l'existence de deux types de propriétés [6,7,8,9] :

i) propriétés analytiques : $H(k_1, \dots, k_n)$ est analytique dans la

réunion d'une certaine famille de tubes $\{\tau_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ dans $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ avec des voisinages complexes appropriés de régions réelles qui connectent les divers tubes entre eux.

ii) propriétés algébriques : ses diverses valeurs au bord $\{H_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$, (où H_λ désigne la valeur au bord prise à l'intérieur du tube τ_λ) satisfont certaines relations linéaires. Cependant le domaine d'analyticité ainsi dégagé (connu sous le nom de "domaine primitif" de la fonction de n points) ne rencontre pas la couche de masse complexifiée $\mathcal{M}^c$. Comme ce n'est pas un domaine naturel d'holomorphie, on a pu penser que des techniques de complétion analytique permettraient d'atteindre celle-ci. Malheureusement les résultats de ce "programme linéaire" n'ont été substantiels que dans le cas $n=4$ où l'on a pu prouver que l'amplitude de diffusion à quatre particules est la valeur au bord d'une fonction analytique sur $\mathcal{M}^c$ [10].

Cependant l'extension du domaine d'analyticité obtenue pour $n=4$ par Martin [11] (en partant des résultats du programme linéaire sur la couche de masse et en appliquant la positivité des parties absorptives et les relations d'unitarité pour les amplitudes de diffusion) suggère que les résultats du programme linéaire pourraient être considérablement améliorés si l'on savait exploiter toute l'information "non linéaire" (formules de réduction, complétude des états asymptotiques) contenue dans la théorie.

Dans cet exposé, nous présentons une méthode proposée en 1960 par K. Symanzik [12] et reformulée dans le langage analytique des fonctions de n points par J. Bros en 1967 [13] qui devrait permettre d'exploiter au moins une partie des propriétés non linéaires de la théorie axiomatique des champs. Cet exposé comprend trois parties. Dans la section II nous rappelons les propriétés analytiques et algébriques de la fonction de n

points. Dans la section III nous introduisons la notion de "produit de composition de fonctions de n points associé à un graphe" et nous en énonçons les principales propriétés. Dans la section IV, nous montrons en quoi cette notion est nécessaire au développement de "programme non linéaire" de Symanzik et Bros, et nous esquissons les étapes ultérieures de ce programme.

II - STRUCTURE PRIMITIVE DE LA FONCTION DE n POINTS

1. Le domaine primitif d'analyticité

Pour le décrire, nous avons besoin d'introduire l'espace auxiliaire $\mathbb{R}^{n-1}$ des n variables indépendantes $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ liées par la relation $\sum_{i=1}^n S_i = 0$. Nous considérons la triangulation de cet espace par la famille de plans $\{S_I = 0, I \in \rho^*(X)\}$ où la notation S_I désigne $\sum_{i \in I} S_i$. Les plans $S_I = 0$ et $S_{X \setminus I} = 0$ coïncident. Nous appelons cellules la famille des cônes ouverts convexes ainsi définis dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On vérifie facilement que chaque cellule γ_λ de la triangulation peut s'écrire :

$$\gamma_\lambda = \{S \in \mathbb{R}^{n-1} : \lambda(I)S_I > 0 \ \forall I \in \rho^*(X)\}$$

où λ est une fonction signe définie sur $\rho^*(X)$, à valeurs dans $\{+1, -1\}$ et satisfaisant en particulier aux conditions de compatibilité :

$$i) \quad \forall I \in \rho^*(X) \quad \lambda(I) = -\lambda(X \setminus I)$$

$$ii) \quad \forall I, J \in \rho^*(X) \text{ avec } I \cap J = \emptyset \text{ et } \lambda(I) = \lambda(J), \text{ alors } \lambda(I \cup J) = \lambda(I) = \lambda(J) \quad .$$

Nous désignons par $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ la famille des cellules de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Nous pouvons alors décrire le domaine d'analyticité de la fonction de n points. A chaque cellule γ_λ associons le cône $\mathcal{C}_\lambda$ suivant dans $\mathbb{R}^{4(n-1)}$:

$$\mathcal{C}_\lambda = \{q \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : \lambda(I)q_I \in V^+ \quad \forall I \in \mathcal{P}^*(X)\} .$$

Il est clair qu'on obtient $\mathcal{C}_\lambda$ à partir de γ_λ en remplaçant toutes les conditions ≥ 0 par les conditions correspondantes $\in V^\pm$. Remarquons cependant que nous sommes loin d'avoir construit une triangulation de $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ puisque à l'intérieur d'un cône $\mathcal{C}_\lambda$ les vecteurs q_I sont toujours dans V^+ .

A chacun des cônes $\mathcal{C}_\lambda$ associons maintenant le tube $\mathcal{T}_\lambda$ de $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ ayant pour base $\mathcal{C}_\lambda$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{T}_\lambda = \{k \in \mathbb{C}^{4(n-1)} : \lambda(I)Imk_I \in V^+ , \quad \forall I \in \mathcal{P}^*(X)\} .$$

Nous pouvons alors énoncer la

Propriété 1 : La fonction de n points $H(k)$ est analytique dans la réunion des tubes de la famille $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$.

Remarquons que ces tubes sont disjoints deux à deux : c'est seulement grâce à certaines propriétés de prolongement analytique que nous allons décrire que nous pouvons parler d'une seule fonction H analytique dans leur réunion. Introduisons en effet les valeurs au bord réelles

$$H_\lambda(p) = \lim_{\substack{k \rightarrow p \\ q \in \mathcal{C}_\lambda}} H(k)$$

Ces valeurs au bord possèdent certaines propriétés de coïncidence que

nous allons rappeler.

Considérons dans l'espace auxiliaire $\mathbb{R}^{n-1}$ deux cellules γ_{λ_1} et γ_{λ_2} telles que le plan $S_I = S_{X \setminus I} = 0$ soit une face commune à ces deux cônes. Nous dirons que la partition $(I, X \setminus I)$ sépare les deux cellules adjacentes γ_{λ_1} et γ_{λ_2} . Nous le dirons aussi pour les deux tubes $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_2}$. Il est clair que les deux fonctions signes λ_1 et λ_2 prennent partout la même valeur sauf précisément sur I et $X \setminus I$, où en vertu de ce qui précède, nous avons

$$\lambda_1(I) = -\lambda_2(I) = \lambda_2(X \setminus I) = -\lambda_1(X \setminus I) \quad .$$

Nous pouvons alors énoncer la

Propriété 2 : Les valeurs au bord $H_{\lambda_1}(p)$ et $H_{\lambda_2}(p)$ associées à deux tubes adjacents $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_2}$ séparés par la partition $(I, X \setminus I)$ coïncident au sens des distributions sur l'ouvert

$$\mathcal{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < M_I^2, p_I^2 \neq m_I^2\}$$

où m_I et M_I sont certaines masses de la théorie. C'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathcal{R}_I \quad H_{\lambda_1}(p) = H_{\lambda_2}(p) \quad .$$

Appliquant alors le théorème "edge of the wedge" général [14] nous concluons que H est certainement analytique dans un voisinage complexe de $\mathcal{R}_I$ qui connecte les deux tubes $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_2}$.

La réunion des tubes de la famille $\{\mathcal{T}_{\lambda}, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ et de l'ensemble de ces voisinages complexes constitue le "domaine primitif" d'analyticité de la fonction de n points.

2. Les relations de Steinmann

Revenons à l'espace auxiliaire $\mathbb{R}^{n-1}$ et considérons quatre cellules $\{\gamma_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq 4\}$ possédant la propriété suivante (il en existe dès que $n > 3$) :

i) il existe deux partitions $(I, X \setminus I)$ et $(J, X \setminus J)$ telles que

$$I \cap J \neq \emptyset \quad I \cap (X \setminus J) \neq \emptyset$$

ii) γ_{λ_1} et γ_{λ_2} (resp. γ_{λ_3} et γ_{λ_4}) sont des cellules adjacentes séparées par $(J, X \setminus J)$

iii) γ_{λ_1} et γ_{λ_3} (resp. γ_{λ_2} et γ_{λ_4}) sont des cellules adjacentes séparées par $(I, X \setminus I)$.

Nous disons alors que ces cellules (et aussi les tubes correspondants) constituent un "quatuor". Nous avons la

Propriété 3 : Les valeurs au bord $\{H_{\lambda_i}(p), 1 \leq i \leq 4\}$ prises à l'intérieur d'un quatuor de tubes $\{\tau_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq 4\}$ satisfont la relation suivante au sens des distributions : $\forall p \in \mathbb{R}^{4(n-1)}$:

$$H_{\lambda_1}(p) + H_{\lambda_4}(p) = H_{\lambda_2}(p) + H_{\lambda_3}(p) \quad .$$

Les valeurs au bord $\{H_{\lambda}(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfont alors au système engendré par toutes ces "relations à quatre", qui est connu sous le nom de "relations de Steinmann" [7].

3. Fonctions de n points générales

L'ensemble des propriétés que nous venons de rappeler (existence d'un domaine primitif d'analyticité, relations de Steinmann) constitue la

structure primitive de la fonction de n points, telle qu'on a pu l'établir à partir des propriétés du champ supposées par la théorie. Par la suite nous allons utiliser des fonctions qui possèdent toutes ces propriétés, mais sans bénéficier d'une interprétation sous-jacente en termes de produits du champ. Nous dirons qu'il s'agit de fonctions de n points "générales". Plus précisément nous appelons ainsi toute fonction F définie dans $\mathbb{C}^{4(n-1)}$ telle que

i) F soit analytique et à croissance lente près des réels dans le tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$. Les valeurs au bord $\{F_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ sont alors des distributions.

ii) Deux valeurs au bord adjacentes $F_{\lambda_1}(p)$ et $F_{\lambda_2}(p)$ coïncident sur un ouvert réel $\mathcal{R}_I$ ainsi défini :

$$\mathcal{R}_I = \{p \in \mathbb{R}^{4(n-1)} : p_I^2 < M_I^2 ; p_I^2 \neq m_I^2\}$$

où m_I et M_I sont maintenant des nombres positifs quelconques, sans rapport avec la théorie des champs.

iii) Les valeurs au bord $\{F_\lambda(p), \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$ satisfont le système des relations de Steinmann.

III - PRODUIT DE COMPOSITION ASSOCIE A UN GRAPHE

Donnons d'abord quelques définitions : étant donné un graphe G , nous disons qu'une ligne et un vertex sont incidents si le vertex est une extrémité de la ligne. Nous disons qu'une ligne est externe si elle n'est incidente qu'à un seul vertex. Nous supposons que chaque vertex est au moins incident à trois lignes. Nous utilisons les notations

n : nombre de lignes externes de G

ℓ : nombre de boucles indépendantes de G.

A n'importe quel graphe connexe G nous associons maintenant un "produit de composition" H^G par la méthode suivante :

1. Pour chaque ligne de G, nous associons à chacune de ses extrémités un quadrivecteur complexe, de telle sorte qu'à tout vertex il y ait conservation de l'énergie-impulsion. Nous désignons par $\{k_i, 1 \leq i \leq n\}$ les n quadrivecteurs complexes associés ainsi aux lignes externes de G. On vérifie facilement que si l'on veut que la loi de conservation globale $\sum_{i=1}^n k_i = 0$ soit vérifiée, il faut qu'à chacune des extrémités de toute ligne interne soient associés des quadrivecteurs opposés.
2. A chaque vertex v de G incident à n_v lignes, nous associons une fonction de n_v points générale $H^{(n_v)}_v$ dont les arguments sont les quadrivecteurs associés en 1. aux n_v lignes considérées.
3. A chaque ligne interne de G, nous associons l'inverse $[H^{(2)}]^{-1}$ d'une fonction de deux points générale ("propagateur") dont les arguments sont les deux quadrivecteurs opposés associés en 1. aux extrémités de la ligne considérée.
4. Il est facile de vérifier qu'au-dessus d'un point externe $k = (k_1, \dots, k_n)$ fixé, les variables associées aux lignes internes de G décrivent une fibre de dimension complexe 4ℓ (ℓ est le nombre de boucles indépendantes). Fixons alors $k = (k_1, \dots, k_n)$ à l'intérieur du domaine primitif de la fonction de n points : nous allons construire un contour d'intégration γ_k de dimension réelle 4ℓ dans cette fibre et définir :

$$H^G(k) = \int_{\gamma_k} \prod_i \pi [H^{(2)}(z_i)]^{-1} \prod_v H^{(n_v)}_v(z_1, z_2, \dots, z_{n_v}) d\mu \quad (1)$$

$d\mu$ est l'élément de surface dans γ_k ; le premier produit est pris sur les lignes internes de G, z_i désigne le quadrivecteur complexe associé à l'une

quelconque des extrémités de i ; le second produit est pris sur les vertex de G , $(z_1, \dots, z_{n_v})$ désigne les n_v quadrivecteurs complexes associés aux n_v lignes incidentes à v . Nous appellerons H^G le produit de composition associé au graphe G ou plus rapidement "G-produit".

5. On démontre alors que pour un choix convenable du contour γ_k , le produit de composition H^G est bien défini comme fonction analytique des n variables $(k_1, \dots, k_n)$ liées par la relation $\sum_{i=1}^n k_i = 0$. Plus précisément, on démontre que H^G possède les propriétés d'une fonction de n points générale, à savoir :

- analyticité et croissance lente dans les tubes $\{\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda^{(n)}\}$
- relations de coïncidence entre valeurs au bord adjacentes
- relations de Steinmann.

En d'autres termes, la structure primitive des fonctions de n points est conservée par G-composition.

Nous ne donnons ici qu'un aperçu de la preuve, qui est longue et dont on trouvera tous les détails en [15].

6. La méthode générale

Remarquons d'abord que dans le cas $\ell = 0$ (celui des graphes simplement connexes ou "arbres") la dimension de la fibre des variables internes est nulle : celles-ci sont déterminées de façon unique une fois connues les variables externes. La prescription d'intégration est donc triviale : le produit de composition est bien défini comme un simple produit des différentes fonctions de ligne et de vertex. On démontre alors relativement facilement que les propriétés analytiques et algébriques des fonctions de n points se conservent par multiplication.

D'où l'idée de définir le G-produit par récurrence sur le paramètre ℓ du graphe G : on suppose que pour n'importe quel graphe comportant $\ell \leq \ell_0 - 1$ boucles indépendantes et un nombre quelconque n de lignes

externes, il est possible de définir un produit de composition qui est une fonction de n points générale, et on veut démontrer que pour n'importe quel graphe avec ℓ_0 boucles indépendantes et un nombre quelconque de lignes externes cela est encore possible (le cas des arbres amorce la récurrence).

Considérons donc un graphe avec ℓ_0 boucles indépendantes et n lignes externes. Nous pouvons lui associer un nombre fini de graphes avec $(\ell_0 - 1)$ boucles indépendantes et $(n+2)$ lignes externes en "cassant" une ligne interne quelconque de G . Nous dirons que ces graphes sont les "antécédents" de G : nous en choisissons un, noté $\tilde{G}$.

Clairement $\tilde{G}$ satisfait à l'hypothèse de récurrence et au-dessus de n'importe quel point $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, k_{n+2})$ dans le domaine primitif d'une fonction à $(n+2)$ points il existe un contour $\tilde{\gamma}_{\bar{k}}$ de dimension réelle $4(\ell - 1)$ tel que la fonction

$$H^{\tilde{G}}(\bar{k}) = \int_{\tilde{\gamma}_{\bar{k}}} \prod_i [H^{(2)}(z_i)]^{-1} \prod_v H^{(n_v)}(z_1, \dots, z_{n_v}) d\mu$$

soit une fonction de $(n+2)$ points générale.

Nous définissons alors le G -produit par la relation :

$$H^G(k) = \int_{\Gamma_k} H^{\tilde{G}}(k, k_{n+1}, k_{n+2}) \Big|_{k_{n+1} = -k_{n+2} = t} [H^{(2)}(t)]^{-1} dt \quad (2)$$

où Γ_k est un contour de dimension réelle 4 dans l'espace $\mathbb{C}^4$ de la variable t . Nous nous ramenons ainsi, par le biais de la récurrence, au problème de construire un contour d'intégration dans un seul quadrivecteur. On démontre en [15] que le domaine d'analyticité de la fonction $H^{\tilde{G}}$ dans la variable t est suffisamment grand pour qu'on puisse y construire un tel contour Γ_k . Les propriétés analytiques et algébriques de H^G sont alors des conséquences de la géométrie de Γ_k .

7. Trois remarques

D'abord, notons que dans l'intégrale (2), l'intégrand $H^{\tilde{G}}$ est restreint à une région de l'hyperplan analytique $k_{n+1} + k_{n+2} = 0$, qui se trouve sur le bord du domaine d'analyticité de la fonction de $(n+2)$ points. L'analyticité de $H^{\tilde{G}}$ dans cette région nécessite donc une procédure locale de complétion analytique, décisive pour la forme explicite du contour Γ_k .

Ensuite, remarquons que la convergence des représentations (1) et (2) pose problème. On montre en [15] que si des propriétés d'intégrabilité à l'infini doivent être supposées pour l'intégrand, il n'est cependant nécessaire de la faire que dans certaines directions de son domaine d'analyticité.

Enfin, il est essentiel de vérifier que le G-produit ne dépend pas du choix de l'antécédent $\tilde{G}$ utilisé en (2) pour le définir.

IV - LE PROGRAMME NON LINEAIRE DE SYMANZIK ET BROS

Revenons maintenant à la structure analytique des amplitudes de diffusion et au problème de l'existence pour la fonction de n points d'un domaine d'analyticité à l'intérieur de la couche de masse complexifiée $\mathcal{M}^c$.

Dès 1960, K. Symanzik a proposé un programme général [12] susceptible, en exploitant les propriétés "non linéaires" de la théorie, de conduire à une extension du domaine d'analyticité de la fonction de n points tel qu'il est connu à partir des seules propriétés "linéaires". Cependant à cette époque la structure analytique rappelée en II n'était pas encore complètement dégagée et les idées de Symanzik n'ont guère pu être exploitées du point de vue des propriétés analytiques. En 1967,

J. Bros a proposé une méthode générale pour incorporer le programme de Symanzik dans le cadre des propriétés d'analyticité des fonctions de n points, méthode qu'il a menée à terme dans un cas particulier [13].

L'étude des produits de composition constitue un premier pas dans la généralisation de ce résultat. Nous allons esquisser ici les étapes ultérieures de ce "programme non linéaire".

Rappelons d'abord l'essentiel des idées de Symanzik. En théorie des perturbations, l'expression des fonctions de Green en séries de graphes de Feynmann introduit la notion de partie p-particule irréductible d'une fonction de Green de la façon suivante. Ayant choisi une partition $(I, X \setminus I)$ des variables externes en particules "incidentes" et "sortantes", un graphe de Feynmann est dit p-particule irréductible par rapport à ce canal, si l'on doit couper au moins $(p+1)$ lignes internes pour le diviser en deux sous-graphes connexes en séparant les lignes externes suivant la partition $(I, X \setminus I)$. La somme formelle de toutes les contributions p-particule irréductibles qui interviennent dans l'expression d'une fonction de Green en série de graphes est appelée la partie p-particule irréductible de cette fonction par rapport au canal $(I, X \setminus I)$. Considérées comme séries formelles de graphes ces parties p-particules irréductibles satisfont certaines relations intégrales, dont la plus connue est sans doute l'équation de Bethe-Salpeter :

$$\begin{array}{c} \text{Bubble 1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Bubble 2} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Two bubbles 1 and 2} \end{array}$$

(ici $p(=1,2)$ à l'intérieur des bulles signifie partie p-particule irréductible du produit chronologique).

Symanzik pensait que ces relations intégrales prises comme

définition devaient permettre d'incorporer dans la théorie axiomatique la notion de partie p-particule irréductible d'une fonction de Green, de la façon suivante :

- montrer que ces fonctions existent pour tout p, tout n et n'importe quel canal.
- montrer qu'elles possèdent les mêmes propriétés "linéaires" que les fonctions de Green.
- une fois extraite du cadre perturbatif, la notion d'irréductibilité prendrait le sens général suivant : la discontinuité d'une fonction p-particule irréductible dans un certain canal s'annule jusqu'au seuil $(p+1)^2 m^2$ (pour simplifier nous considérons ici un seul champ décrivant des particules scalaires de masse m).

La méthode proposée par Bros pour exploiter ces idées dans le cadre analytique comporte quatre étapes :

1. La première consiste à étudier les propriétés d'analyticité des produits de composition : elle est maintenant complètement achevée. On a montré (voir III) que ce sont des fonctions de n points générales.
2. La seconde étape consiste à définir des fonctions de n points p-particule irréductibles par récurrence sur p et n : on suppose qu'on a pu établir l'existence dans le cadre axiomatique de fonctions p-particule irréductibles pour $p \leq p_0 - 1$ et n quelconque. Chaque fonction p_0 -particule irréductible est alors introduite comme solution d'une équation intégrale suggérée par la théorie des perturbations. Comme conséquence de 1) cette équation est une équation de Fredholm dans le domaine primitif (complexe) de n points. La théorie classique de Fredholm permet alors de montrer que la solution est une fonction de n points générale.
3. La troisième étape est la plus délicate : c'est celle qui consiste à établir que les solutions considérées sont bien irréductibles. Elle

nécessite d'une part une étude détaillée des discontinuités des produits de composition, d'autre part un usage systématique des propriétés non linéaires de la théorie grâce aux relations de Glaser, Lehman et Zimmermann [16]. Ces relations, obtenues par un usage extensif des formules de réduction et de la complétude des états asymptotiques, sont les extrapolations hors de la couche de masse des relations d'unitarité. Cette étape est actuellement en cours : elle devrait aboutir rapidement pour n quelconque et $p \leq 2$.

4. La quatrième partie du programme non linéaire traite (enfin !) de l'extension du domaine d'analyticité de la fonction de n points. On remarque en effet facilement que le théorème "edge of the wedge" entraîne pour les parties irréductibles de la fonction de n points une structure analytique améliorée due à l'élévation des seuils dans certains canaux. Celle-ci permet alors une extension du domaine d'analyticité de la fonction de n points complète par un effet de retour mis en évidence par Bros dans le cas de la partie 2-particule irréductible de la fonction de quatre points associée à un champ pseudo-scalaire [13]. Le résultat obtenu dans ce cas particulier (existence d'un prolongement analytique de la fonction de quatre points dans un second feuillet à travers la partie élastique de la région physique) constitue une amélioration considérable des résultats du programme linéaire. Cependant sa généralisation à la fonction de n points est tributaire de l'achèvement des autres étapes du programme et n'a pas pu être encore abordée.

*
*
*

REFERENCES

- [1] R. F. Streater et A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and all that (Benjamin, New-York, 1964).
- [2] R. Jost, The general theory of quantized fields (Am. Math. Soc., Providence, 1965).
- [3] N. N. Bogoliubov, B. V. Medvedev, and M. K. Polivanov, Questions of Dispersion Relation Theory, (Moscou, 1958).
- [4] H. Lehmann, K. Symanzik, et W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, 1, 205 (1954) ; 6, 319 (1957).
- [5] K. Hepp, dans Axiomatic Field Theory, vol. 1 (Gordon and Breach, 1965).
- [6] D. Ruelle, *Nuovo Cimento*, 19, 356 (1961).
- [7] O. Steinmann, *Helv. Phys. Acta*, 33, 257, 347 (1960).
- [8] H. Araki, *J. Math. Phys.*, 2, 163 (1961) ; *Suppl. Progr. Theor. Phys.* 18 (1961).
- [9] J. Bros, Thèse (Paris, 1970) et dans High Energy Physics and Elementary Particles (I. A. E. A., Vienne, 1965).
- [10] J. Bros, H. Epstein et V. Glaser, *Nuovo Cim.*, 31, 1265 (1964) ; *Comm. Math. Phys.*, 1, 240 (1965).
- [11] A. Martin, *Nuov Cim.*, 42A, 930 (1966) ; 44A, 1219 (1966).
- [12] K. Symanzik, *J. Math. Phys.* 1, 249 (1960).
- [13] J. Bros, dans Analytic Methods in Mathematical Physics (Gordon and Breach, 1970) ; et communication privée.
- [14] H. Epstein, *J. Math. Phys.*, 1, 524 (1960).
- [15] M. Lassalle, *Commun. Math. Phys.*, à paraître.
- [16] V. Glaser, H. Lehmann et W. Zimmermann, *Nuovo Cim.*, 6, 1122 (1957).