A. Voros

Sur la description des particules classiques à spin en interaction avec un champ électromagnétique classique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 18
« Conférences de : J. Leray, J.P. Ramis, R. Seiler, J.M. Souriau et A. Voros », , exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__18__A6_0>

SUR LA DESCRIPTION DES PARTICULES CLASSIQUES A SPIN EN INTERACTION AVEC UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE CLASSIQUE

---

par

A. VOROS

Service de Physique Théorique

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

B. P. n° 2 (91) GIF-s/-YVETTE

Texte de la conférence présentée à la
15e Rencontre entre Physiciens Théoriciens
et Mathématiciens

(R. C. P. n° 25, Nov. 1972, Strasbourg).

I. INTRODUCTION

La description rigoureuse de ce qu'on appelle une particule élémentaire est possible seulement en mécanique quantique relativiste. La fonction d'onde d'un tel objet doit satisfaire une équation covariante, dont les solutions doivent former un espace de représentation projective irréductible du groupe de Poincaré (ceci traduit l'indécomposabilité spatiale de la particule)[10] . Cette exigence fixe le carré de la masse m^2 ($m^2 > 0$ pour que la particule soit énergétiquement stable) et la longueur du moment cinétique interne ou spin s ($s = \frac{n}{2}$, n entier, à cause de la quantification), pour la particule. On sait alors construire des équations d'onde possibles pour une telle particule libre , ex. :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{- spin } 0 & \text{équation de Klein-Gordon :} & (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\varphi = 0 \\ \text{- spin } \frac{1}{2} & \text{équation de Dirac :} & (i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\Psi = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{vitesse de la}\\ \text{lumière =}\\ \quad c = 1\end{array}$$

- spins élevés : équations matricielles de forme analogue à l'équation de Dirac[13,7], l'opérateur différentiel étant un diviseur (matriciel) de $(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)1$.

Tous ces systèmes différentiels sont, après élimination des composantes non significatives, hyperboliques ; leurs bicaractéristiques sont les rayons du cône de lumière. Il est possible, pour ces systèmes, de poser un problème de Cauchy sur une surface initiale de genre espace ; la solution existe et est engendrée par propagation de signaux à une vitesse inférieure à celle de la lumière : c'est la propriété de causalité.

Lorsqu'on plonge la particule dans un champ électromagnétique extérieur de potentiel A_μ , l'équation couplée la plus simple, s'obtient par la substitution $(i\partial_\mu) \to (i\partial_\mu - eA_\mu)$ (couplage minimal). Elle est en plein accord avec l'expérience (e étant la charge électrique de la particule), i.e. pour des particules de spin 0 ou $\frac{1}{2}$ dans des champs pas trop forts. Malheureusement, pour les spins $\geq \frac{3}{2}$ les équations deviennent pathologiques : les bicaractéristiques débordent du cône de lumière et pour des champs forts $\left(|F_\mu| \gtrsim \underbrace{\frac{m^2c^3}{e\hbar}}_{= F_c}\right)$ elles engendrent tout l'espace.

Toutes les surfaces sont caractéristiques (acausalité) et les signaux peuvent se propager à des vitesses ≥ c (tachyons). Le système est alors tellement instable que sa description comme particule élémentaire n'est plus consistente[7] .

L'étude des bicaractéristiques s'apparente à l'étude de la limite classique (h → 0) du système, les bicaractéristiques de Maslov[11] étant les trajectoires classiques[10] . Le traitement habituel (méthode BKW)[12] semble mal adapté à l'étude des singularités quantiques car si on pose h → 0 brutalement, le champ critique F_c tend vers l'infini. Dans l'attente d'un progrès de ce côté, on peut se demander s'il n'est pas possible de déduire des "grands principes" quelle devrait être la forme *a priori* des équations classiques qui seraient la limite des équations quantiques.

En mécanique classique, une particule élémentaire est un objet ponctuel, i.e. dont la structure s'exprime par des distributions à support ponctuel. Il existe une foule de méthodes pour obtenir des équations exprimant son couplage à un champ extérieur[5] . Sauf en première approximation, les résultats sont incompatibles les uns avec les autres. Mais nous allons montrer que les premiers principes, le désir de coller à la mécanique quantique et la recherche de la simplicité maximale déterminent pratiquement les équations ("unicité morale") et que celles-ci ont de graves singularités rappelant les singularités quantiques.

Cet exposé est basé sur un article antérieur de C. ITZYKSON et A. VOROS[9], mais C.I. ne saurait être tenu pour responsable des possibles erreurs contenues dans la présente version, qui s'inspire beaucoup, pour la méthode, des idées de J.M. SOURIAU[4] .

II. MECANIQUE SYMPLECTIQUE (NON RELATIVISTE)[1, 2, 3, 4, 10]

En mécanique quantique, les relations de commutation entre observables jouent le rôle essentiel dans la dynamique. Le correspondant classique est l'algèbre des crochets de Poisson, qui est le reflet de la structure symplectique de l'espace des phases. Celle-ci sera donc mise au premier plan.

a) En général l'espace des phases $\mathbb{P}$ est le fibré cotangent $T^*(M)$ à la variété M des positions du système* ; soit $n = \dim M$; le temps t est un simple paramètre. Il existe sur $\mathbb{P}$ une forme symplectique canonique[2,3] σ (par déf. une forme symplectique est une 2-forme différentielle fermée, de rang $2n$) : $\sigma = \sum_i dp_i \wedge dx_i = dp \wedge dx$. On définit alors :

- l'isomorphisme de relèvement : $\Lambda^1(\mathbb{P}) \xrightarrow{\#} \mathcal{X}(\mathbb{P})$ par :

$$\omega(X, \#\alpha) = \langle \alpha, X \rangle \qquad \forall\, \alpha \in \Lambda^1(\mathbb{P}) \qquad \forall\, X \in \mathcal{X}(\mathbb{P}) \tag{1}$$

- le crochet de Poisson de deux fonctions $f(x,p)$ et $g(x,p)$ par :

$$\{f,g\} = -\sigma(\# df, \# dg) = L_{\# dg} \cdot f = -L_{\# df} \cdot g \left(= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}\right) .$$

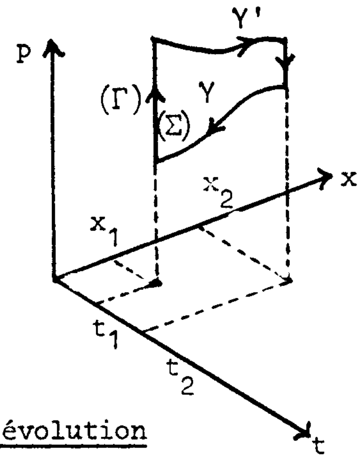
Si $H(x,p)$ est la fonction de Hamilton (l'énergie) du système, les trajectoires du système sont les lignes intégrales du champ de vecteurs $\# dH$, c'est-à-dire les solutions des équations canoniques :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \frac{dp^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{2}$$

b) Nous allons utiliser une forme légèrement différente de la mécanique symplectique[4] . On remarque que les équations (2) sont les équations d'Euler-

---

* Notations : $\Lambda^m(\mathbb{P})$ = espace des m-formes différentielles sur $\mathbb{P}$.
$\mathcal{X}(\mathbb{P})$ = espace des champs vectoriels sur $\mathbb{P}$.
Si $X \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$, L_X est la dérivation de Lie associée à X .
Les indices (et les sommations sur indices répétés) seront en général sous-entendus.
Les conditions de régularité seront maximales (C^∞) .



Lagrange du problème variationnel[1] :

(3) $$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} [p\, dx - H(x,p)dt] = 0$$

où les trajectoires $x(t)$ et $p(t)$ peuvent varier indépendamment, seules les extrémités x_1 x_1 et x_2 de $x(t)$ étant fixées. Dans l'espace d'évolution

$$\mathcal{E} = \{(t,x,p) | t \in \mathbb{R} \ , \ (x,p) \in \mathbb{P}\} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{P}$$

la variation δS entre deux trajectoires infiniment voisines γ et γ' se met sous la force d'une intégrale de contour (voir fig.), soit avec le théorème de Stokes :

$$S(\gamma') - S(\gamma) = \oint_\Gamma [p dx - H dt] = \iint_\Sigma d(p dx - H dt) = \iint_\Sigma \omega$$

(4) avec $$\omega = dp \wedge dx - \frac{\partial H}{\partial x} dx \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p} dp \wedge dt \ .$$

Ici t est une variable dynamique ; le noyau de ω est de dimension 1 et il est facile de voir que $\delta S = 0$ signifie que le vecteur tangent à la trajectoire dans $\mathcal{E}$ appartient au noyau de ω . Et en effet :

$$\omega\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dp}{dt}, \frac{dt}{dt}, X, P, T\right) = \frac{dp}{dt} X - \frac{dx}{dt} P - \frac{\partial H}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt} T - \frac{dt}{dt} X\right) - \frac{\partial H}{\partial p}\left(\frac{dp}{dt} T - \frac{dt}{dt} P\right) =$$

$$= 0 \qquad \forall \ X, P, T$$

implique : $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$; $\frac{dH}{dt} = 0$.

Cette méthode a plusieurs avantages : elle a une généralisation relativiste simple ; ω peut souvent être mis sous forme plus simple que (4) , par exexemple sous forme explicitement invariante de jauge pour le couplage électromagnétique.

c) -ex. : <u>particule chargée dans un champ électromagnétique extérieur</u> : soient Φ et $\vec{A}$ les potentiels, $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi$ et $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}\, A}$ les champs.

Il est connu que le couplage minimal revient à ajouter à l'intégrale d'action le terme $\int e(\vec{v}\vec{A} - \Phi)dt = e \int \vec{A}\, d\vec{x} - \Phi\, dt$.

Mais : $d(\vec{A}\, d\vec{x} - \Phi\, dt) = \partial_i A_j\, dx^i \wedge dx^j - (\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t})dx^i \wedge dt$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\vec{B}\; d\vec{x} \wedge d\vec{x}] + \vec{E}\; d\vec{x} \wedge dt$$

où $[a\ b\ c] = \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k$; donc :

$$\omega = d\vec{p} \wedge d\vec{x} - \frac{\vec{p}}{m}\, d\vec{p} \wedge dt + \frac{e}{2}\,[\vec{B}\; d\vec{x} \wedge d\vec{x}] + e\vec{E}\; d\vec{x} \wedge dt \tag{5}$$

d) - ex. : <u>toupie sphérique à moment magnétique</u> : si I est le moment d'inertie, $\vec{s}$ le moment cinétique, $\mu\vec{s}$ le moment magnétique et $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire, il faut calculer : $d[(\vec{s}.\vec{\Omega} - (\frac{s^2}{2I} - \mu\,\vec{s}.\vec{B}))dt]$

$\vec{B}$ étant un champ magnétique extérieur (<u>uniforme</u>).

Résultat : $|\vec{s}| = s$ est une constante du mouvement, et si $\vec{s} = s\hat{s}$:

$$\omega = -\frac{s}{2}\,[\hat{s}\ d\hat{s}\ d\hat{s}] + \mu\, s\vec{B}\, d\hat{s} \wedge dt\ . \tag{6}$$

La vitesse angulaire et le moment d'inertie se sont éliminés du problème, et on peut travailler sur l'espace de phases $\mathbb{P} = S^2$ décrit par l'extrémité du vecteur $\hat{s}$. Ce formalisme marche donc aussi bien si $\vec{s}$ est le spin d'une particule <u>ponctuelle</u>, pour laquelle $I = 0$, $|\vec{\Omega}| = \infty$. La restriction de ω à $\mathbb{P}$ est $\sigma = -\frac{s}{2}\,[\hat{s}\ d\hat{s}\ d\hat{s}]$; les crochets de Poisson définis par σ satisfont le principe de correspondance avec les commutateurs quantiques, à savoir :

$$\{s_i, s_j\} = \epsilon_{ijk} s_k\ .$$

e) - <u>conclusion</u> : <u>particule non-relativiste à spin</u> : si on imagine une telle particule comme une toupie sphérique ponctuelle en translation, comme translation et rotation sont découplés, on prend : $\mathcal{E} = \{(t, \vec{x}, \vec{p}, \hat{s})\} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times S^2$ et :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega = {} & d\vec{p} \wedge d\vec{x} - \frac{\vec{p}}{m}\, d\vec{p} \wedge dt + \frac{e}{2}\,[\vec{B}\; d\vec{x}\; d\vec{x}] + e\vec{E}\; d\vec{x} \wedge dt - \frac{s}{2}\,[\hat{s}\ d\hat{s}\ d\hat{s}] \\ & + \mu\, s\vec{B}\, d\hat{s} \wedge dt + \mu\vec{\nabla}(\vec{s}\vec{B})\, d\vec{x} \wedge dt\ . \end{aligned} \right.$$

Le dernier terme est l'effet d'une inhomogénéité de champ sur le mouvement de translation. Les équations s'obtiennent en écrivant :

$$\forall\ T,X,P,S \quad (\text{avec} \quad \hat{s}.S = 0) \quad \omega\left(\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{d\hat{s}}{dt}, T,X,P,S\right) = 0 .$$

Insérant un multiplicateur de Lagrange et identifiant en S :
$- s\,[\hat{s} \times \frac{d\hat{s}}{dt}] - \mu\, s\vec{B} + \Lambda\hat{s} = 0$. Refaisant $\hat{s} \times \ldots$ et utilisant $\hat{s}\,\frac{d\hat{s}}{dt} = 0$, on trouve l'équation du spin. L'autre équation est sans problème :

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \dot{\vec{x}} = \vec{p}/m \\ \text{(b)} & \dot{\vec{p}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{x}} \times \vec{B} + \mu\, \vec{\nabla}(\vec{s}\,\vec{B}) \\ \text{(c)} & \dot{\vec{s}} = \mu\, \vec{s} \times \vec{B} \end{cases}$$

(b) (éq. de Lorentz + correction d'inhomogénéité)

(c) (éq. de Larmor).

III. MECANIQUE RELATIVISTE

Nous allons généraliser le formalisme précédent au cas relativiste, en recherchant la simplicité maximale compatible avec les premiers principes et une forme d'interaction aussi proche que possible de la forme quantique[14] .

Par analogie non-relativiste, nous voulons décrire la particule comme une toupie relativiste (i.e. un repère de Lorentz tournant) dont l'origine est animée d'un mouvement de translation. En cinématique relativiste, il est impossible de découpler translation et rotation, car une accélération de la particule est une rotation de son repère au repos ; elle va donc induire une rotation du spin, appelée précession de Thomas[5] . Inversement le mouvement du spin va modifier l'énergie du moment magnétique dans le champ, donc induire une accélération. Ce couplage va rendre les équations singulières, d'une manière qu'on pourrait interpréter comme une désintégration si la toupie était de rayon non nul (système composite).

a) - définition du spin relativiste : en mécanique quantique, les invariants dynamiques d'une particule sont les générateurs de Lie du groupe de Poincaré agissant sur l'espace des états, qui est une représentation du groupe. Ces générateurs sont les 4 composantes P_μ de l'impulsion (P_μ engendre les translations le long de l'axe μ) et les 6 composantes $M_{\mu\nu} = - M_{\nu\mu}$ $(\mu \neq \nu)$ du tenseur de moment cinétique ($M_{\mu\nu}$ engendre les rotations de Lorentz se passant dans le 2-plan d'axes μ et ν). Le couplage translation-rotation se traduit par $[P_\mu, M_{\nu\rho}] \neq 0$ en général. On a $[P_\mu, M_{\nu\rho}] = 0$ si et seulement si $\mu \neq \nu$ et $\mu \neq \rho$. Comme nous recherchons le maximum d'observables commutant, nous allons observer uniquement les 4 combinaisons suivantes des $M_{\mu\nu}$: $S^\sigma = \frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\mu M_{\nu\rho}$.

Les S_σ commutent avec les P_μ ; ce sont les générateurs du groupe d'isotropie du quadrivecteur impulsion de la particule ; dans le repère au repos, ce groupe est le groupe des rotations $SO(3)$ donc S y coïncide avec le spin non-relativiste. Dans tout repère les relations algébriques suivantes sont satisfaites (avec $m^2 > 0$ et s demi-entier) :

(9) $$P^\mu P_\mu = P^2 = m^2 \; ; \; S^\mu S_\mu = S^2 = -\, s(s+1) \; ; \; P^\mu S_\mu = P.S = 0 \; .$$

La limite classique est évidente : on prend comme observables le quadrivecteur impulsion p^μ et le quadrivecteur spin s^μ (qui est le moment angulaire des rotations dans le 2-plan orthogonal à p et s) avec les contraintes : $p^2 = m^2 > 0$; $s^2 = -|s|^2 < 0$; $p.s = 0$. Désormais on pose $m = |s| = 1$; alors p et s sont les 2 premiers vecteurs d'un repère de Lorentz :

(10) $$p^2 = -\,s^2 = 1 \qquad p.s = 0 \; .$$

A titre temporaire, complétons le repère par deux vecteurs e_2 et e_3 . Par définition de s^μ , dans l'intégrale d'action s^μ doit être multiplié par la rotation infinitésimale qu'il engendre, c'est-à-dire :

$$S = \int p \; dx + \tfrac{1}{2} \left([p,s,e_2,de_2] + [p,s,e_3,de_3]\right) = \int \theta$$

et $\omega = d\theta$ s'exprime sans le secours de e_2 et e_3 :

(11) $$\omega = dp \wedge dx + \tfrac{1}{2} [p \; s \; ds \wedge ds] - \tfrac{1}{2} [p \; s \; dp \wedge dp] \; .$$

Par comparaison avec la forme non-relativiste (7) sans interaction, le terme $-\frac{1}{2}[p \; s \; dp \wedge dp]$ est inattendu. Sa présence est nécessaire pour que ω reste une <u>forme fermée</u>, et c'est ce terme qui est responsable de la précession de Thomas.

b) - <u>la forme de l'interaction</u> : dans une équation comme l'équation de Dirac, le couplage minimal est équivalent à l'addition à l'intégrale d'action du terme $\int j^\mu A_\mu \, d^4x$ où j^μ est la densité du courant de charge de la particule libre. Dans le cas classique d'une particule ponctuelle, nous utiliserons le couplage formellement identique ; la densité de courant est une distribution concentrée sur la ligne d'univers $x(\tau)$ de la particule, τ étant un paramètre quelconque. Si e est la charge et μ le coefficient gyromagnétique ($\mu = \frac{ge}{2}$ pour l'électron), le courant vaut :

$$j^{\mu}(y) = \int d\tau \ [e \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \delta^4(y-x(\tau)) - \mu \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2} \frac{dx}{d\tau}\rho \ s_{\sigma}\partial_{\nu}\delta^4(y-x(\tau))] \ .$$

Le premier terme est le courant de charge, le second le courant de moment magnétique, et nous ne regardons pas les multipôles d'ordres supérieurs.

Alors : $\int j^{\mu}(y)A_{\mu}(y)d^4y = \int d\tau \ d^4y[e \frac{dx^{\mu}}{d\tau} A_{\mu}(y) + \mu \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2} \frac{dx_{\rho}}{d\tau} s_{\sigma}\partial_{\nu}A_{\mu}]\delta^2(y-x(\tau))$

$$= \int (e \ A_{\mu} + \mu \ s^{\nu}F^*_{\nu\mu})dx^{\mu} = \int \theta' \ .$$

La contribution à la forme symplectique est donc :

$$\begin{aligned} d\theta' &= d \ (e \ A + \mu \ sF^*) \wedge dx \\ &= \frac{e}{2} \ dx \wedge F \ dx + \mu \ ds \ F^* \ dx + \mu \ s^{\nu}(\partial_{\mu}F^*_{\nu\rho})dx^{\mu} \wedge dx^{\rho}. \end{aligned}$$

A cause de l'équation de Maxwell $\partial_{\mu}F^*_{\nu\rho} + \partial_{\nu}F^*_{\rho\mu} + \partial_{\rho}F^*_{\mu\nu} = 0$

le dernier terme devient $\frac{\mu}{2} \ dx \wedge (s^{\mu}\partial_{\mu}F^*)dx$

donc nous obtenons, sur l'expace d'évolution à 9 dimensions :

$$\mathcal{E} = \{(x,p,s)|x,p,s \in \mathbb{R}^4 \ ; \ p^2 = - s^2 = 1 \ ; \ p.s = 0\} \ , \text{ la forme :}$$

(12) $$\omega = dp \wedge dx + \tfrac{1}{2}[p \ s \ ds \wedge ds] - \tfrac{1}{2}[p \ s \ dp \wedge dp] + \frac{e}{2}(dx \wedge Fdx) + \mu[ds \wedge F^*dx + \frac{dx \wedge (s\partial)F^*dx}{2}] \ .$$

c) - les <u>équations</u> : procédant à partir de ω comme en (II, e) on trouve le système couplé (comparer à[4]) suivant, qui ne tient pas compte des corrections radiatives dues au rayonnement d'une particule accélérée :

(13) $$\begin{cases} \text{a)} & \dot{x} = p + p \times s \times \dot{p} + \mu(pF^*\dot{x})s \\ \text{b)} & \dot{p} = eF\dot{x} + \mu \ [(s\partial)F^*\dot{x} + F^*\dot{s}] \\ \text{c)} & \dot{s} = \mu \ [Fs + (sFp)\dot{x} - (s\dot{x})Fp] - (s\dot{p})p \end{cases}$$

Notations : $(a \times b \times c)^{\sigma} = - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_{\mu}b_{\nu}c_{\rho}$. Le point . désigne $\frac{d}{d\tau}$ où τ est le paramètre de la trajectoire, normalisé de façon que $\dot{x}$ soit égal à p plus un vecteur orthogonal à p .

Au premier ordre les équations sont celles de <u>Bargmann-Michel-Telegdi</u>[6] si le champ F est homogène et constant :

$$(14)\qquad \begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = eF\dot{x} \\ \dot{s} = \mu\, Fs + (\mu - e)(sFp)p \end{cases}$$

Le système (13,b-c) se découple explicitement : sous forme matricielle (8×8), notant $q = pF^*s$ (un scalaire) :

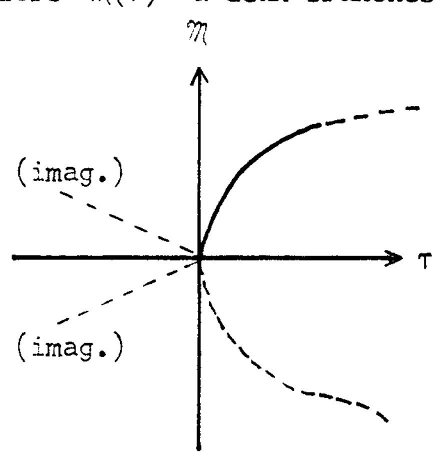
$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \hline \dot{s} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1_4 - \dfrac{\mu\,(F^*p)\otimes s}{1-\mu q} & \mu\, F^*\left(1_4 - \dfrac{\mu\, p\otimes(sF^*)}{1-\mu q}\right) \\ \hline - \dfrac{p\otimes s}{1-\mu q} & 1_4 - \dfrac{\mu\, p\otimes(sF^*)}{1-\mu q} \end{array}\right) \begin{pmatrix} eF\dot{x} + \mu\,(s\partial)(F^*\dot{x}) \\ \hline \mu(Fs + (sFp)\dot{x} - (s\dot{x})Fp) \end{pmatrix}$$

Substitiant la valeur de $\dot{p}$ donnée par (15) dans (13a) il est théoriquement possible de résoudre $\dot{x}$ = fonction de x, p, s et des champs, au prix d'une nouvelle inversion de matrice qui ne fera qu'aggraver les singularités du système.

Afin de voir quel genre de singularité apparaît dans (15) on va remplacer (13a) par : $\dot{x} = p$ et se placer dans le cas où le champ est uniforme, constant et satisfait $F^*F = \vec{E}.\vec{B} = 0$. La quantité $\mathfrak{m} = 1 - \mu q$, qui s'interprète comme l'<u>énergie au repos</u>[9] de la particule dans le champ, satisfait l'équation :

$$\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{m}} = \mu^2(\eta - e)(sFp)(pF^{*2}s) .$$

Rien ne semble exclure qu'en un point à distance finie de la trajectoire on ait $\mathfrak{m} = 0$ et le membre de droite positif. Alors $\mathfrak{m}(\tau)$ a deux branches en $\sqrt{\tau}$ pour $\tau > 0$, et des valeurs imaginaires pures pour $\tau < 0$ (prenant $\tau = 0$ sur la singularité). On aimerait interpréter cela aussi = pour $\tau < 0$ on a propagation de particules



de masse imaginaire (tachyons) ; pour $\tau > 0$ on a apparition d'une paire particule-antiparticule. Ces deux phénomènes sont caractéristiques des pathologies des équations quantiques. Toutefois il serait présomptueux de risquer un parallèle trop précis dans l'état actuel de la question.

d) - <u>le champ critique</u> : pour que $\mu(pF^{*}s)$ puisse prendre la valeur 1 , il est nécessaire que $|F| \gtrsim F_c = \frac{m^2c^3}{\mu|s|}$. Si on donne à $|s|$ une valeur physique de l'ordre de h , on retrouve le champ critique de Velo-Zwanziger[7] ; la constante h pénètre ainsi dans les équations classiques grâce à la non-linéarité de celles-ci.

IV. CONCLUSION

Si on veut espérer retrouver les singularités classiques comme limite "BKW" des équations quantiques, il faudrait trouver le moyen de fixer $|\vec{s}|$ ou tout au moins $|\mu\vec{s}|$ lorsque $h \to 0$. Pour le premier cas, il faudrait examiner une suite d'équations quantiques à spins croissant vers l'infini. Pour que ce soit praticable il faudrait au moins écrire les équations sous une forme où le spin apparaisse comme opérateur différentiel (à l'intar de $p = i\partial$) et non comme opérateur matriciel sur des indices spinoriels. Pour le deuxième cas on pourrait travailler à spin fixe, en faisant tendre μ vers l'infini comme $\frac{1}{h}$, ce serait plus simple mais moins conforme au but recherché.

V. NOTES ET REFERENCES

1) LANDAU-LIFSCHNITZ — Cours de Physique, Tome 1. Ed. Mir, Moscou.

2) R. ABRAHAM — Foundations of Mechanics Benjamin, 1967.

3) C. GODBILLON — Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique Hermann, 1971.

4) J.M. SOURIAU — Structure des Systèmes Dynamiques Dunod, 1970.

5) J. FRENKEL — Z.Phys, 37, 243 (1926) ;
L.H. THOMAS — Phil.Maj. 3, 1 (1927) ;
H. BHABHA-H. CORBEN — Proc. Roy. Soc. 178A, 273 (1941) ;
H. BACRY — Thèse, Masson 1963 ;
W.G. DIXON — N.Cim. 38, 1616 (1965) ;
H.P. KUNZLE — JMP 13, 739 (1972).

6) V. BARGMANN-L. MICHEL V. TELEGDI — Phys.Rev.Letters 2, 435 (1959).

7) G. VELO-D. ZWANZIGER — Phys. Rev. 186D , 1337 ; 188D , 2218 (1969) ;
B. SCHROER-R. SEILER-J. SWIECA — Phys. Rev. D2, 2927 (1970).

8) E. BREZIN — Thèse, Paris 1970.

9) C. ITZYKSON-A. VOROS — Phys. Rev. D5, 2939 (1972).

10) Exposés à la 14e R.C.P. (mai 1972) et la 15e R.C.P. (nov. 1972).

11) MASLOV — Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques. Dunod, 1972.

12) J. KELLER-S. RUBINOW — Phys. Rev. 131, 2789 (1963).

13) A.S. WIGHTMAN — Proc. 5th Coral Gables Conference-Miami. Benjamin, 1968.

14) Nos notations covariantes : $c = 1$; $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$; $\epsilon^{0123} = 1$.
Le quadrivecteur potentiel est $A^{\mu} = (\tilde{\varphi}, \vec{A})$; le tenseur du champ est $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, son dual : $F^{*}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. Pour quatre quadrivecteurs a, b, c, d : $[a\ b\ c\ d] = -\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_{\mu}b_{\nu}c_{\rho}d_{\sigma}$. Les indices sont le plus souvent omis ; dans un produit, les indices tensoriels doivent être contractés selon les règles de la multiplication des matrices.