

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ANDRÉ MARTIN

## **Positivité et analyticité**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 16*  
« R dition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,  
exp. n  9, p. 1-29

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1973\\_\\_16\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__16__A9_0)

  Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n  25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

POSITIVITE ET ANALYTICITE

André Martin  
CERN - Genève

Exposé à la rencontre de novembre 1968  
entre physiciens et mathématiciens à  
Strasbourg.

(R.C.P. No 25)

Ref. TH. 992  
30 janvier 1969



1. - RAPPELS SUR L'AMPLITUDE DE DIFFUSION

Une quantité dont vous a déjà parlé le Professeur Glaser au cours de cette rencontre est l'amplitude de réaction associée à la réaction  $A + B \rightarrow C + D$ . Cette quantité  $T_{AB \rightarrow CD}$  prise en module au carré nous fournit, à un facteur de normalisation près, la section efficace différentielle, c'est-à-dire la probabilité pour un flux unité de particules A et B d'observer, par unité d'angle solide, les particules C et D produites par la réaction. Il ne serait pas correct de croire que seul le module de  $T_{AB \rightarrow CD}$  est physiquement observable mais je n'ai pas le temps de développer ce point complètement.

Dans ce qui suit je considérerai uniquement une réaction élastique  $A + B \rightarrow A + B$ . En outre, à titre provisoire, nous supposons que les particules A et B ont un spin zéro.

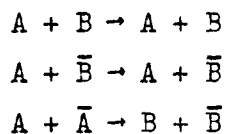
Dans ces conditions, par invariance par rotation, l'amplitude de diffusion ne dépend que de deux variables. Les plus naturelles sont :

- l'énergie dans le système du centre de masse ;
- l'angle de diffusion dans le système du centre de masse,  $\theta$ .

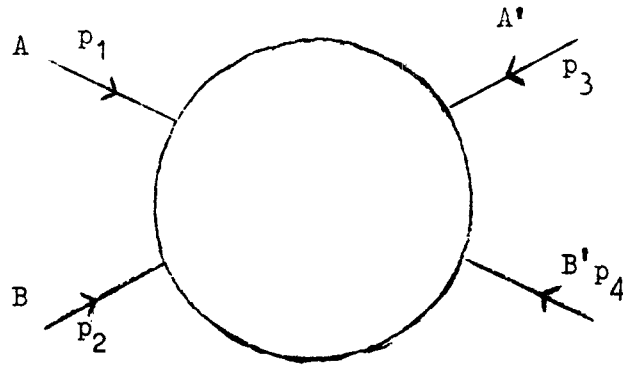
Cependant déjà je préférerais :

$$\left. \begin{array}{l} s : \text{carré de l'énergie dans le système} \\ \text{du centre de masse ;} \\ \cos \theta_s : \text{cosinus de l'angle de diffusion dans} \\ \text{le système du centre de masse.} \end{array} \right\} (1)$$

Un autre choix de variables va apparaître maintenant : dans une description relativiste de l'amplitude de diffusion on doit, si l'on veut pouvoir exploiter les conséquences de la localité, considérer à la fois les réactions



où  $\bar{A}$  désigne l'antiparticule de A et  $\bar{B}$  désigne l'antiparticule de B.  
On décrit l'amplitude par les quadri-impulsions "entrantes"  $p_1 p_2 p_3 p_4$



( $p_1 = p_1^0, \vec{p}_1$ , etc.).

On a évidemment la conservation de l'énergie impulsion  
 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$  et  $s$  le carré de l'énergie dans le système du centre  
de masse de la réaction  $A + B \rightarrow A + B$  se réduit à

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (2)$$

De manière similaire nous introduisons

$$t = (p_1 + p_3)^2 \quad (3)$$

et

$$u = (p_1 + p_4)^2 \quad (4)$$

Remarquons que  $u$  se réduira au carré de l'énergie de la réaction  
 $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$ .  $s$ ,  $t$  et  $u$  sont liés par la relation

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \quad (5)$$

En fait, dans les circonstances "physiques" les quadri-impulsions satisfont  
les conditions

$$p_1^2 = M_A^2 \quad p_2^2 = M_B^2 \quad p_3^2 = M_A^2 \quad p_4^2 = M_B^2 \quad (6)$$

Ces restrictions constituent les restrictions à la "couche de masse". Evidemment elles doivent être satisfaites par toute amplitude physique. Mais la "couche de masse" est plus étendue que le domaine physique des amplitudes en ce sens que l'on exige que les conditions (5) et (6) soient satisfaites, mais on laisse les quadri-vecteurs être complexes. La "couche de masse" est ce à quoi se limitent ceux qui font, dans le jargon des physiciens, de la "théorie de la matrice S" (exemple Chew, Stapp). Les théoriciens "des champs" (exemple Glaser, Wightman, Epstein) sont obligés, pour pouvoir utiliser efficacement la condition de localité où les conditions de localité de définir une amplitude de diffusion hors de la couche de masse.

Vous savez que, de la considération des amplitudes de diffusion hors de la couche de masse, on déduit un certain nombre de résultats très importants par complétion analytique : le domaine d'analyticité initial de l'amplitude ne contient aucun point sur la couche de masse, mais ce n'est pas un domaine naturel d'analyticité et son enveloppe d'holomorphie contient certains points de la couche de masse.

Ici cependant je me contenterai de prendre les résultats "classiques" de la théorie des champs pour les amplitudes sur la couche de masse comme points de départ en y ajoutant les propriétés de positivité dont Glaser vous a parlé.

Sur la couche de masse la relation (5) se réduit à

$$s + t + u = 2 M_A^2 + 2 M_B^2 \quad (7)$$

Nous avons donc trois variables liées par une relation linéaire. Autant qu'il est possible, nous éviterons de faire un choix particulier, mais nous y serons parfois contraints. Par exemple nous pourrions prendre  $s$  et  $t$ . La connection avec les variables  $s$  et  $\cos\theta_s$  décrivant la réaction  $A + B \rightarrow A + B$  est donnée par

$$s = (\sqrt{M_A^2 + k_s^2} + \sqrt{M_B^2 + k_s^2})^2 \quad (8)$$
$$t = 2 k_s^2 (\cos\theta_s - 1)$$

$k_s$  représente l'impulsion dans le système du centre des masses. La région "physique" de la réaction  $A + B \rightarrow A + B$  est définie évidemment par

$$s > (M_A + M_B)^2 \tag{9}$$

$$-4k_s^2 \leq t \leq 0 \quad \text{ou} \quad -1 \leq \cos\theta_s \leq 1$$

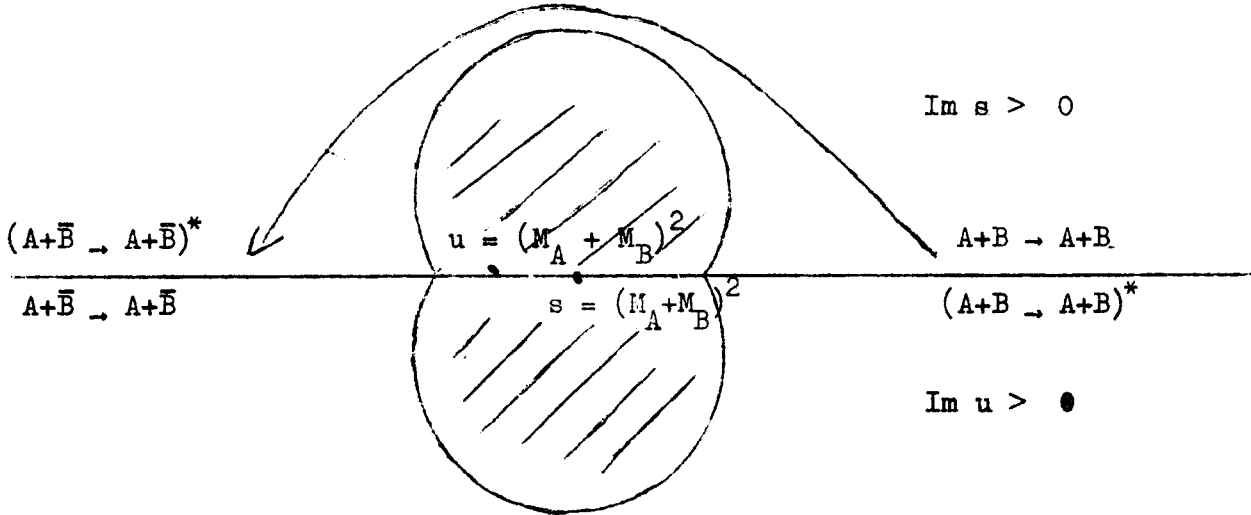
Maintenant, pourquoi avons-nous introduit  $t$  et  $u$  et pourquoi avons-nous annoncé que trois réactions à la fois seraient étudiées ? Ceci est justifié a posteriori par un résultat de Glaser, Bros et Epstein <sup>1)</sup> d'après lequel les amplitudes physiques pour les réactions  $A + B \rightarrow A + B$ ,  $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$ ,  $A + \bar{A} \rightarrow B + \bar{B}$  sont données par des valeurs du bord d'une seule et même fonction analytique. Nous décrirons plus loin la connection. Disons seulement d'abord que si  $u > (M_A + M_B)^2$ , une certaine valeur au bord se réduit à l'amplitude pour la réaction  $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$  avec un carré du transfert d'impulsion égal à  $t$ , le carré de l'énergie dans le système du centre des masses étant  $u$ .

## 2. - LES RESULTATS CLASSIQUES SUR LE DOMAINE D'ANALYTICITE SUR LA COUCHE DE MASSE

Ici nous considérons une théorie dans laquelle la masse minimum est non nulle.

### A - Analyticité à transfert fixe

Nous commencerons par le résultat le plus général même s'il n'est pas le plus ancien. Bros, Epstein et Glaser <sup>1)</sup> ont démontré que pour  $t \leq 0$  il existe une fonction analytique dans un plan coupé moins une région finie, qui, pour  $s \rightarrow s \text{ réel} + i\epsilon$ ,  $s \text{ réel} > (M_A + M_B)^2$ ,  $\cos\theta_s > -1$ , se réduit à l'amplitude pour  $A + B \rightarrow A + B$  et pour  $u \rightarrow u \text{ réel} + i\epsilon$  ( $u \text{ réel} > (M_A + M_B)^2$ ,  $\cos\theta_u > -1$ ) se réduit à l'amplitude  $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$ . En outre, de part et d'autre de la coupure, la fonction prend des valeurs complexes conjuguées, de sorte que, sur le dessin, on voit que l'on peut continuer analytiquement d'une région où l'on a l'amplitude  $A + B \rightarrow A + B$  à une région où l'on a le complexe conjugué de  $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$



En fait, il est possible de continuer de  $A + B \rightarrow A + B$  à  $A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B}$ , mais pour cela on doit prendre un chemin détourné : utiliser une continuation à  $u$  fixe, négatif, puis à  $s$  fixe, négatif ; dans l'opération on obtient d'abord  $(A + \bar{A} \rightarrow B + \bar{B})^*$  puis  $((A + \bar{B} \rightarrow A + \bar{B})^*)^*$ .

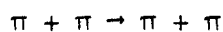
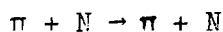
Je dois ajouter le fait très important que tous les points du plan complexe  $s$  où l'on a analyticité en  $s$  sont entourés d'un voisinage d'analyticité en  $s$  et  $t$ . La taille de ce voisinage dépend évidemment du point choisi.

Je dois ajouter aussi que dans ce domaine d'analyticité, à  $t$  fixé, l'amplitude de diffusion est bornée polynomialement en  $s$ . Ceci est vrai dans toutes les formes de théories locales des champs considérées jusqu'à présent (axiomes de Wightman <sup>2)</sup>, champs de Jaffé <sup>3),4)</sup>, théorie des observables locales <sup>4)</sup>).

En fait, un cas particulier important est celui où les relations de dispersions sont valables. Historiquement c'est ce cas qui fut traité le premier <sup>5)</sup>. Si  $M_A$  et  $M_B$  ainsi que les masses de divers  tats intermédiaires possibles satisfont certaines inégalités, on démontre que l'amplitude de diffusion pour  $-T_0 < t \leq 0$  est analytique dans un plan coupé, les coupures



allant dans les cas les plus simples, de  $s = -\infty$  à  $s = (M_A - M_B)^2 - t$  et de  $s = (M_A + M_B)^2$  à  $s = +\infty$ . Cette situation est celle des réactions



Nous verrons plus loin comment obtenir une borne inférieure de  $T_0$ . Comme on a en outre la borne polynomiale de l'amplitude et la propriété de réalité  $F(s, t) = F^*(s^*, t)$  pour  $-T_0 < t \leq 0$ , on peut écrire une relation de dispersion en fonction des parties absorptives de  $F(s, t, u)$ ,

$$\Lambda_s(s, t) = \frac{F(s+i\epsilon, t, u) - F(s-i\epsilon, t, u)}{2i} \quad (10)$$

pour  $s > (M_A + M_B)^2$

$$\Lambda_u(u, t) = \frac{F(s, t, u+i\epsilon) - F(s, t, u-i\epsilon)}{2i}$$

pour  $u > (M_A + M_B)^2$ .

$\Lambda_s$  et  $\Lambda_u$  sont des quantités réelles. Nous écrirons, évitant de détruire la symétrie entre  $s$  et  $u$  :

$$F(s, t, u) =$$

$$\frac{s^N}{\pi} \int ds' \frac{\Lambda_s(s', t)}{s'^N (s' - s)} + \frac{u^N}{\pi} \int du' \frac{\Lambda_u(u', t)}{u'^N (u' - u)} + P_N \quad (11)$$

où  $P_N$  est un polynôme en  $s$  (ou  $u$ ) avec des coefficients dépendant de  $t$ .

L'intérêt des relations du type (11) est qu'elles permettent de prédire l'amplitude de diffusion à partir de la partie absorptive et des coefficients de  $P_N$ . Un cas particulier très important est celui de la diffusion vers l'avant qui correspond à  $t = 0$ . Dans ce cas la partie absorptive est reliée par le théorème optique à la section efficace totale qui est une mesure de la probabilité qu'il arrive quelque chose pour un flux unité de particules incidentes, c'est-à-dire que la particule soit soit déviée soit produise une réaction différente. Dans ce qui suit, nous normaliserons  $F$  de telle façon que la section efficace différentielle soit donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_s} = \frac{1}{s} \left| F(s,t,u) \right|^2 \quad (12)$$

Alors la partie absorptive est liée à la section efficace totale par

$$\sigma_{\text{totale}} = \frac{4\pi}{k/s} A_s(s,t=0) \quad (13)$$

Maintenant il est important de remarquer que l'amplitude de diffusion et la section efficace totale sont deux quantités mesurables et que ces mesures sont indépendantes : l'amplitude de diffusion s'obtient en étudiant la distribution angulaire des particules diffusées, la section efficace totale en étudiant l'absorption d'un faisceau de particules incidentes à travers des cibles d'épaisseur diverses. La relation (11) constitue donc un test crucial qui, s'il n'était pas satisfait, permettrait de rejeter définitivement la théorie des champs. Le seul ennui est que la relation (11) contient un polynôme inconnu.

Nous allons démontrer dans la Section suivante qu'en fait ce polynôme est du premier degré et ne contient donc que deux constantes inconnues au plus. Le test des relations de dispersion a été fait avec une grande précision sur la diffusion méson - nucléon par Lindenbaum et ses collaborateurs <sup>6)</sup>. Jusqu'ici, dans la limite des erreurs expérimentales, l'accord entre la théorie et l'expérience est parfait.

Les relations de dispersions (11) sont aussi valables dans un certain domaine de valeurs de  $t$   $T_0 < t \leq 0$ . Mais ici une difficulté se présente pour interpréter la valeur au bord de  $F(s,t,u)$  pour  $t$  négatif,  $s$  très voisin de  $(M_A + M_B)^2$ . En effet, alors, la relation  $t = 2k^2(\cos \theta_s - 1)$  nous indique que  $\cos \theta_s \rightarrow -\infty$ . Plus précisément,  $\cos \theta_s \sim - \left[ \text{const} \right] / \sqrt{s - (M_A + M_B)^2}$ . Il est donc nécessaire de trouver une autre interprétation pour  $F$  ou du moins pour  $A_s(s,t)$  qui entre dans la relation de dispersion. Celle-ci est fournie par le second résultat "classique".

## B - L'ellipse de Lehmann

Lehmann s'est intéressé aux propriétés de l'amplitude de diffusion pour une énergie fixe, physique. Nous devons évidemment garder en mémoire que l'amplitude de diffusion pour  $s$  physique est la valeur au bord d'une fonction analytique.

C'est en fait une distribution et, par conséquent, les résultats que je vais décrire s'appliquent à une moyenne pondérée par une fonction à support compact suffisamment différentiable sur un petit intervalle d'énergie. Cependant, pour alléger l'écriture, nous négligerons ces précautions. Dans ce que je vais dire, on peut montrer que c'est légitime (ce qui n'est pas le cas en tout).

Donc l'amplitude de diffusion pour des valeurs physiques de  $s$  est initialement définie pour des angles physiques  $-1 \leq \cos \theta_s \leq +1$  ou  $-4k^2 \leq t \leq 0$ . Ce que Lehmann a montré <sup>7)</sup> c'est que  $F(s, \cos \theta_s)$  est prolongeable analytiquement en  $\cos \theta_s$  dans une ellipse de foyers  $-1 + 1$ . Le demi grand axe de cette ellipse est donné par

$$\cos \theta_0(s) = \left[ 1 + \frac{(m_A^2 - M_A^2)(m_B^2 - M_B^2)}{k^2 (s - (m_A - m_B)^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

où  $m_A$  est la masse de l'état de masse minimum  $A'$  tel que

$$\langle A' | j_A | 0 \rangle \neq 0 \quad (15)$$

où  $j_A$  est le courant associé à la particule  $A$ . Par exemple si  $A$  est un méson  $\pi$  pseudoscalaire,  $A'$  sera un système de trois mésons  $\pi$  donc  $m_A = 3m_\pi$ .  $m_B$  a une définition analogue.

Un avantage immédiat de l'existence de ce domaine d'analyticité est qu'il permet de justifier un développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion qui se réduit, dans le cas de particules sans spin, à

$$F(s, \cos \theta_s) = \frac{\sqrt{s}}{k} \sum (2\ell+1) f_\ell(s) P_\ell(\cos \theta_s) \quad (16)$$

où  $P_\ell(\cos \theta_s)$  est un polynôme de Legendre, c'est-à-dire un polynôme appartenant à la famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle  $-1 + 1$  avec le poids unité, tels que  $P_\ell(1) = 1$ .

$f_\ell(s)$  est l'amplitude de diffusion pour le moment angulaire orbital  $\ell$ .

Le développement (16) est légitime, car d'après un théorème classique toute fonction analytique dans une ellipse est développable en polynômes de Legendre et ce développement converge dans l'ellipse. En outre, le domaine naturel de convergence d'un tel développement est une ellipse, plus grande ou égale à celle donnée par (14). Rappelons que la dimension de l'ellipse maximum et le taux de décroissance des  $f_\ell$  sont reliés par

$$\overline{\lim} [f_\ell(s)]^{\frac{1}{\ell}} = [\cos \theta_{\text{Max}} + \sqrt{\cos^2 \theta_{\text{Max}} - 1}]^{-1} \quad (17)$$

qui est l'analogie de  $\overline{\lim} [a_n]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$  pour les séries de puissances  $\sum a_n z^n$ .

Ce premier résultat de Lehmann concernant le domaine d'analyticité de l'amplitude de diffusion à énergie fixe n'est cependant pas suffisant pour permettre de résoudre la difficulté mentionnée à la fin de la sous-section 2.A. En effet, nous pouvons seulement continuer  $F$  jusqu'à  $\cos \theta_s \sim [\text{const}] / k$  pour  $k \rightarrow 0$ . Heureusement un résultat plus fort est valable pour la partie absorptive de l'amplitude :

$$\Lambda_s(s, \cos \theta_s) = \frac{\sqrt{s}}{k} \sum (2\ell+1) \text{Im} f_\ell(s) P_\ell(\cos \theta_s) \quad (18)$$

$\Lambda_s(s, \cos \theta_s)$  est aussi analytique dans une ellipse de foyers  $-1 +1$  mais de demi grand axe

$$\cos \theta'_0 = 2 (\cos \theta_0)^2 - 1 \quad (19)$$

avec  $\cos \theta_0$  donné par (14).

On peut donc continuer la partie absorptive jusqu'à

$$\cos \theta_0 = -1 - 2 \frac{(m_A^2 - M_A^2) (m_B^2 - M_B^2)}{k^2 (s - (m_A - m_B)^2)}$$

c'est-à-dire

$$t(s) = -4k^2 - 4 \frac{(m_A^2 - M_A^2) (m_B^2 - M_B^2)}{s - (m_A - m_B)^2} \quad (20)$$

C'est précisément ce dont on a besoin pour écrire les relations de dispersion. Nous pouvons maintenant donner une borne inférieure de  $T_0$  tel que les relations de dispersion soient valables pour  $-T_0 < t \leq 0$  clairement

$$T_0 \geq \text{minimum} \left[ 4k^2 + 4 \frac{(m_A^2 - M_A^2)(m_B^2 - M_B^2)}{s - (m_A - m_B)^2} \right] \quad (21)$$

$(M_A + M_B)^2 < s < \infty$

### C - Analyticité dans deux variables

Nous avons d'abord parlé de propriétés analytiques à  $t$  fixe négatif, dans la variable  $s$ , puis d'analyticité à  $s$  fixe physique dans la variable  $\cos\theta_s$  ou  $t$ . Ce sont en somme des sections "plates" du domaine d'analyticité de l'amplitude de diffusion. Nous avons déjà mentionné que Glaser, Epstein et Bros avaient montré que leur domaine "plat" était en fait entouré d'un voisinage d'analyticité dans les deux variables [moins les coupures  $s$  réel  $> (M_A + M_B)^2$ ,  $u$  réel  $> (M_A + M_B)^2$ ]. Ceci peut en fait être établi directement en partant des domaines "plats" qui ont un caractère non naturel. C'est ce que Mandelstam<sup>8)</sup> a fait pour la diffusion  $\pi\pi$  et que Lehmann<sup>9)</sup> a étendu au cas d'une amplitude satisfaisant des relations de dispersion à  $t$  fixe mais n'ayant pas nécessairement la symétrie de croisement. L'avantage des méthodes de Mandelstam et de Lehmann est qu'elles conduisent à une estimation quantitative de la taille du domaine d'analyticité. Cependant nous allons voir que de toute façon ces estimations sont dépassées par celle résultant de l'utilisation de la positivité.

### 3. - POSITIVITE ET UNITARITE

Nous en venons maintenant aux informations supplémentaires provenant de la positivité. Le Professeur Glaser nous a montré que la partie absorptive de l'amplitude de diffusion possédant entre autres la propriété

$$\int w^*(q) A_s(q, q') w(q') dq dq' > 0 \quad (22)$$

où  $q = p_1 - p_2$ ,  $q' = p_4 - p_3$  et où  $p_1 + p_2 = -p_3 - p_4 = \sqrt{s}$ ,  $0, 0, 0$  est tenu fixe,  $p_1, p_2, p_3, p_4$  ayant leur valeur de la couche de masse.

Il est permis de faire un changement de variable <sup>10)</sup> et de prendre

$$\vec{q} \begin{cases} 2k\cos\phi \\ 2k\sin\phi \\ 0 \end{cases} \quad \vec{q}' \begin{cases} 2k\cos\phi' \\ 2k\sin\phi' \\ 0 \end{cases} \quad (23)$$

dans ces conditions on a

$$\int w^*(\varphi') \Lambda_s(\varphi, \varphi') w(\varphi) d\varphi d\varphi' \geq 0 \quad (24)$$

Souvenons-nous que  $\Lambda_s$  dépend de  $s$  et  $\cos\theta_s = \cos(\varphi - \varphi')$ .  
Si nous prenons  $w(\varphi) = e^{in\varphi}$ , nous avons

$$\int e^{in(\varphi - \varphi')} \Lambda_s(s, \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi d\varphi' \geq 0$$

ce qui veut dire que

$$\Lambda_s(s, \cos\theta_s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta_s}$$

avec  $a_n \geq 0$ , mais  $a_n = a_{-n}$  et par conséquent

$$\Lambda_s(s, \cos\theta_s) = \sum_0^{\infty} C_n \cos(n\theta_s)$$

avec  $C_n > 0$

(25)

Cette propriété est la clé de tout ce qui va suivre dans cet exposé. On voit clairement, dans l'obtention de (25) l'importance (remarquée depuis longtemps par Stora et Epstein) de l'invariance de l'amplitude de diffusion dans le groupe des rotations autour de la normale au plan de diffusion, puisque l'on utilise le fait que  $\varphi$  et  $\varphi'$  apparaissent seulement dans la combinaison  $\varphi - \varphi'$ .

Peut-être devrais-je aussi indiquer comment la propriété (25) a été initialement obtenue à partir du développement en ondes partielles de la partie absorptive <sup>11)</sup>. C'est une méthode où l'on utilise des informations superflues mais qui a l'avantage de faire appel à des notions très familières pour tous les physiciens. On part de (18) :

$$A_s(s, \cos\theta) \frac{\sqrt{s}}{s k} \sum (2\ell + 1) \operatorname{Im} f_\ell(s) P_\ell(\cos\theta_s)$$

$\operatorname{Im} f_\ell(s)$  satisfait une inégalité qui suit de la condition d'unitarité

$$\operatorname{Im} f_\ell(s) \geq |f_\ell(s)|^2 \quad (26)$$

condition qui exprime la conservation de la probabilité : si on envoie sur un diffuseur une onde sphérique, l'amplitude de l'onde sphérique sortante ne peut être supérieure à celle de l'onde sphérique entrante et lui est en fait égale en l'absence de réactions inélastiques. Dans le cas "purent élastique" qui est réalisé si l'énergie est suffisamment basse pour que les réactions inélastiques soient impossibles, (16) devient

$$\operatorname{Im} f_\ell(s) = |f_\ell(s)|^2 \quad (27)$$

Ici nous nous contentons de remarquer que (26) ou (27) impliquent que  $\operatorname{Im} f_\ell(s)$  est positif. Pour établir la propriété fondamentale (25), il suffit donc d'établir que les polynômes de Legendre  $P_\ell(\cos\theta)$  s'écrivent

$$P_\ell(\cos\theta) = \sum_{n\ell} \alpha_{n\ell} \cos(n\theta) \quad (28)$$

avec  $\alpha_{n\ell} \geq 0$ . Cette propriété est indiquée dans les livres, mais je vais en donner en fait la preuve <sup>12)</sup>, car c'est instructif. Les polynômes de Legendre sont, à un facteur positif près, les éléments de matrice  $d_{00}^J(\theta)$  d'une rotation autour de l'axe  $Oy$  dans la représentation où  $J_z$  est diagonal :

$$P_j(\cos\theta) = C \langle J_z = 0, j | \exp(i J_y \theta) | J_z = 0, j \rangle \quad (29)$$

et par suite des symétries, on peut remplacer (29) par

$$P_j(\cos\theta) = C \langle J_z = 0, j | \cos(J_y \theta) | J_z = 0, j \rangle \quad (30)$$

Si nous insérons un système complet d'états propres de  $J_y$ , nous obtenons

$$P_j(\cos\theta) = C \sum \cos(m\theta) \left| \langle J_z=0, j \mid J_y = m, j \rangle \right|^2 \quad (31)$$

qui est précisément ce que nous voulons. Nous remarquons l'importance du sous-groupe des rotations autour d'un axe. Cette démonstration se généralise dans le cas des particules à spins si les hélicités initiales et finales des particules sont les mêmes, mais pour d'autres types d'amplitude (de transversité par exemple <sup>13)</sup>), une démonstration du type de celle de Glaser est plus facile.

Pour terminer cette Section, indiquons deux conséquences importantes de (25) :

- 1) toutes les dérivées de la partie absorptive par rapport à  $\cos\theta$  sont positives pour  $\cos\theta = 1$  ;
- 2) ces dérivées évaluées pour  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  sont plus petites en module que leur valeur à l'avant :

$$\left| \left( \frac{d}{d \cos\theta} \right)^n A_s(s, \cos\theta) \right|_{-1 \leq \cos\theta \leq 1} < \left( \frac{d}{d \cos\theta} \right)^n A_s(s, \cos\theta = 1) \quad (32)$$

Il suffit de démontrer cette propriété pour  $\cos(n\theta)$ . Nous remarquons que  $\cos(n\theta)$  est maximum et positif vers l'avant :

$$|\cos(n\theta)| \leq 1 = \cos(n \times 0)$$

Il suffit de montrer que la première dérivée de  $\cos(n\theta)$  est une somme à coefficients positifs de fonctions du même type.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \cos\theta} (\cos(n\theta)) &= n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \\ &= n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = n \left[ e^{i(n-1)\theta} + e^{i(n-3)\theta} + \dots + e^{-i(n-1)\theta} \right] \\ &= 2n \left[ \cos(n-1)\theta + \cos(n-3)\theta + \dots \right] \end{aligned}$$

ce qui démontre ce que nous voulons. Pour obtenir le résultat pour la  $p^{\text{ième}}$  dérivée, il suffit de répéter l'opération.



4. - EXTENSION DU DOMAINE D'ANALYTICITE PAR LA POSITIVITE <sup>11)</sup>

Avant d'entrer dans le vif du sujet nous voudrions expliquer où nous voulons en venir et pourquoi. Les dimensions de l'ellipse de Lehmann (la grande ou la petite, peu importe) sont telles que, à haute énergie, elles permettent seulement une continuation jusqu'à  $t = +(C/s)$  (rappelons que  $t$  positif est hors de la région physique). Ceci choque l'intuition. Par exemple, si l'on pouvait décrire les interactions entre particules élémentaires par un potentiel à décroissance exponentielle en  $\exp-\mu r$  pour  $r$  grand, on trouverait que l'on peut continuer l'amplitude jusqu'à  $t = +\mu^2 c$  c'est-à-dire un nombre fixe, indépendant de l'énergie <sup>14)</sup>. Or il se trouve précisément que nous croyons que la partie externe de l'interaction entre particules élémentaires peut être décrite par un potentiel de ce type.

Il y a d'autres arguments qui nous poussent à croire que les dimensions de l'ellipse de Lehmann sont améliorables ; par exemple, si l'on prend pour  $f_l(s)$  une expression en  $\exp(-l/L_0(s))$  et que l'on insère cette expression dans (17), avec  $\cos \theta_{\max} = \cos \theta_0(s)$  donné par l'équation de Lehmann, on trouve  $L_0(s) \sim s$  alors qu'on s'attendrait, si les particules élémentaires ont une taille finie, à  $L_0(s) \sim \sqrt{s}$ .

Le plan du calcul qui va suivre est le suivant : nous éviterons des difficultés superflues en supposant :

- (i) tout d'abord que, pour le processus considéré les relations de dispersion sont valables pour  $-T_0 < t \leq 0$ . Ceci n'est absolument pas indispensable pour obtenir le résultat clé car on peut toujours soustraire de l'amplitude une intégrale de contour pour éliminer les singularités à distance finie de l'amplitude, hors des coupures ;
- (ii) nous supposerons que nous pouvons partir d'une relation de dispersion sans soustractions. Ici encore il est facile de tenir compte d'un nombre fini de soustractions ;
- (iii) enfin dans la partie A, nous supposerons que l'amplitude a une seule coupure, la coupure de droite  $s > (M_A + M_B)^2$ . Cette simplification assez radicale nous permettra d'y voir plus clair. Nous expliquerons dans la partie B comment tenir compte de la coupure de gauche. Dans C, nous décrirons la méthode de Sommer <sup>15)</sup> pour l'évaluation quantitative de la taille du domaine obtenu.

A - Cas simplifié : coupure à droite seulement

Nous supposons que pour  $-T_0 < t \leq 0$  nous pouvons écrire

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{\infty} \frac{\Lambda_s(s', t) ds'}{s' - s} \quad (33)$$

La seconde information que nous allons utiliser est l'existence d'un voisinage d'analyticité de tous les points du plan coupé  $s$ .

$F(s, t)$  est analytique en  $t$  dans un cercle  $|t| < R(s)$ . En particulier nous nous intéresserons aux valeurs de  $s$  réelles en dessous du seuil.

Auparavant, indiquons une précaution qui serait utile pour la suite, dans une présentation rigoureuse : il serait prudent de remplacer  $F(s, t)$  par  $F_w(s, t)$  :

$$F_w(s, t) = \int w^2(x) F(s+x, t) dx \quad (34)$$

où  $w$  est une fonction à support compact dérivable un nombre suffisant de fois. Alors pour  $-T < t \leq 0$

$$F_w = \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2 - \delta}^{\infty} \frac{\Lambda_w(s', t) ds'}{s' - s} \quad (35)$$

où

$$\Lambda_w(s, t) = \int w^2(x) \Lambda_s(s+x, t) dx$$

L'avantage est que  $\Lambda_w(s, t)$  est une fonction continue de  $s$ . Les voisinages d'analyticité sont préservés et les propriétés de positivité (32) sont préservées à peu de choses près :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \Lambda_w(s, t = 0) > 0 \quad (36)$$

et

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \Lambda_w(s, t = 0) > \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^n \Lambda_w(s, t) \right|_{-4k^2 + \delta \leq t \leq 0}$$

Cependant, pour simplifier l'écriture nous travaillerons directement avec  $F$  et  $A_S$  et nous supposons que  $A_S(s,t)$  est une fonction continue de  $s$  pour les valeurs de  $t$  contenues dans l'ellipse de Lehmann. En fait, comme le montre l'artifice de la fonction de poids  $w$ , les résultats sont valables dans un cadre plus général.

Nous prendrons un point  $s_0$  réel  $< (M_A + M_B)^2$ .  $F(s_0, t)$  est analytique dans  $|t| < R(s_0)$  en  $t$ . En particulier ses dérivées à  $t = 0$  existent et satisfont les inégalités de Cauchy

$$\left| \left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s_0, t) \right|_{t=0} \leq \frac{n! M}{R(s_0)} \quad (37)$$

où  $M$  est le maximum supposé fini de  $F$  sur le cercle  $|t| = R(s_0)$ . Si ce maximum est infini, il suffit de prendre  $R(s_0)$  un peu plus petit.

Nous voulons calculer ces dérivées et justifier ce que n'importe quel physicien "normal" ferait : différentier sous le signe d'intégration.

Nous avons le droit d'utiliser (33) pour  $T_0 < t \leq 0$ . Donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} F(s_0, t) \right|_{t=0} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(s_0, 0) - F(s_0, -\tau)}{\tau} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{\infty} \frac{A_S(s', 0) - A_S(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds' \end{aligned} \quad (38)$$

Nous remarquons maintenant qu'en vertu de la condition de positivité (32) appliquée pour  $n = 0$  l'intégrand sera positif, pour  $s' > x$ ,  $x$  arbitraire  $> (M_A + M_B)^2$  pourvu que  $\tau$  soit suffisamment voisin de zéro  $\tau < \tau_x$ , car alors le couple  $s', -\tau$   $s' > x - \tau > -\tau_x$  sera intérieur à la région physique (pour le cas des masses égales  $\tau_x = x - 4M^2$ ). Donc, pour  $\tau$  suffisamment petit

$$\int_x^{\infty} \frac{A_S(s', 0) - A_S(s', -\tau)}{\tau (s' - s_0)} ds' > 0 \quad (39)$$

D'autre part, l'expression

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^x \frac{\Lambda_s(s',0) - \Lambda_s(s',-\tau)}{\tau(s'-s_0)} ds' \quad (40)$$

dans laquelle l'intégrale est sur un compact, l'intégrant a une limite et est continu en  $s'$ , a une limite qui s'obtient en prenant la limite sous le signe d'intégration. Par conséquent, nous obtenons

$$\left. \frac{d}{dt} F(s_0,t) \right|_{t=0} \geq \frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^x \frac{d\Lambda_s(s',t=0)}{s'-s_0} ds' \quad (41)$$

Nous notons que, en vertu de (32), ( $n=1$ ) l'intégrant de (41) est positif. Donc l'intégrale du membre de droite est une fonction monotone croissante de  $x$  bornée. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_{(M_A+M_B)^2}^{\infty} \frac{d\Lambda_s(s',t=0)}{s'-s_0} ds'$$

existe, et évidemment

$$\left. \frac{d}{dt} F(s_0,t) \right|_{t=0} \geq \frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^{\infty} ds' \frac{d\Lambda_s(s',t=0)}{s'-s_0}$$

mais d'autre part on a, pour  $\tau$  assez petit, grâce au théorème de Rolle :

$$\frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\Lambda_s(s',0) - \Lambda_s(s',-\tau)}{(s'-s_0)\tau} ds' = \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} ds' \frac{d\Lambda_s(s',-\tau(s'))}{s'-s_0}$$

avec  $0 < \tau(s') < \tau$  ; en vertu de l'inégalité (32) avec  $n=1$ , cette dernière quantité est bornée supérieurement par

$$\frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{d\Lambda(s',0)}{s'-s_0} ds'$$

par conséquent, on a

$$\frac{d F (s_0, 0)}{dt} \leq \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{\infty} \frac{\frac{d A (s', 0)}{dt}}{s' - s_0} ds'$$

et donc

$$\frac{d F (s_0, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{\infty} \frac{\frac{d A_s (s', t = 0)}{dt}}{s' - s_0} ds' \quad (42)$$

Il reste maintenant à généraliser (42) au cas de  $-T_0 \leq t \leq 0$ .

En vertu de

$$\left| \frac{d A_s (s', t)}{dt} \right| < \frac{d A_s (s', 0)}{dt}$$

pour  $t$  négatif,  $s'$  suffisamment grand, nous voyons que, puisque l'intégrale (42) converge absolument, l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{\infty} \frac{\frac{d A_s (s', t)}{dt}}{s' - s_0} ds'$$

converge aussi pour  $-T_0 < t \leq 0$ . Le seul problème est donc d'identifier cette quantité avec la dérivée à  $t$ . On peut le faire à nouveau par un passage à la limite  $\lim [F(s_0, t+\tau) - F(s_0, t)]/\tau$ . On coupe l'intégrale en deux morceaux, l'un de  $(M_A + M_B)^2$  à  $x$ , l'autre de  $x$  à l'infini. Il est facile de montrer que le morceau de  $x$  à l'infini peut-être rendu arbitrairement petit, si l'on utilise (42). D'autre part la contribution de  $(M_A + M_B)^2$  à  $x$  ne pose pas de difficultés dans le passage à la limite. En conclusion,

$$\frac{d F (s_0, t)}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_{\substack{\infty \\ (M_A + M_B)^2 \\ -T_0 < t \leq 0}} \frac{\frac{d A_s (s', t)}{dt}}{s' - s_0} ds' \quad (43)$$

Maintenant nous notons que (43) est l'exact analogue de la relation de dispersion (33) et que les conditions de positivité (32) s'appliquent aussi bien à  $dA_s(s,t)/dt$  qu'à  $A_s(s,t)$ . Donc nous pouvons répéter l'argument et obtenir ainsi la dérivée seconde, et ainsi de suite. Par conséquent,

$$\left. \left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s_0, t) \right|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^{\infty} \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_s(s', t) \Big|_{t=0} ds'}{s' - s_0} \quad (44)$$

Maintenant nous remarquons que (44) est absolument convergent. Dans ces conditions il est facile de se convaincre que pour  $s$  arbitraire, en dehors de la coupure allant de  $(M_A+M_B)^2$  à l'infini, l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^{\infty} \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_s(s', t) \Big|_{t=0} ds'}{s' - s} \quad (45)$$

est convergente. Elle est en fait uniformément convergente dans tout compact ne contenant pas la coupure et le rapport de son intégrand à celui de (44) est donné en module par

$$\left| \frac{s' - s_0}{s' - s} \right| \leq \mu(s, s_0) \quad (46)$$

où  $\mu$  est un nombre fini se comportant comme  $1/|\text{Im } s|$  lorsque  $s$  s'approche de la coupure. (45) représente donc un excellent candidat pour la continuation analytique en  $s$  de  $\left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s, t) \Big|_{t=0}$ . D'autre part, (44) est évidemment valable pour un intervalle réel de valeurs de  $s_0$ . (45) représente donc bien la continuation analytique :

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s, t = 0) = \frac{1}{\pi} \int_{(M_A+M_B)^2}^{\infty} \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_s(s', t=0)}{s' - s} ds' \quad (47)$$

Nous nous rappelons maintenant les inégalités de Cauchy (37) qui, combinées avec (46) donnent

$$\left| \left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s, t = 0) \right| \leq \mu(s, s_0) \left[ \frac{n! M}{R(s_0)} \right]^n \quad (48)$$

Si maintenant nous tentons de reconstruire l'amplitude de diffusion par

$$F(s,t) = \sum \frac{t^n}{n!} \left( \frac{d}{dt} \right)^n F(s_0, t) \Big|_{t=0} \quad (49)$$

nous trouvons que le rayon de convergence de la série est donné par

$$|t| < R(s_0)$$

En conclusion nous avons montré que  $F(s,t)$  est analytique dans le produit topologique du plan coupé en  $s$  et du cercle  $|t| < R(s_0)$ . Ce résultat est précisément celui que nous attendions intuitivement. On peut évidemment optimiser par rapport à  $s_0$ . Nous discuterons cela plus loin. Notons que la méthode suivie permet d'étendre non seulement le domaine d'analyticité mais les bornes. En effet, il est clair que, dans la situation sans soustraction décrite ici, on a

$$F(s,t) \leq \mu(s, s_0) F(s_0, |t|) \quad (50)$$

Il est facile de montrer que pour  $\epsilon < \text{Arg} s < \pi - \epsilon$ ,  $s \rightarrow \infty$   $\mu(s, s_0)$  est borné par une constante. En fait, un argument un peu plus raffiné permet de montrer que  $F(s,t)$  tend vers zéro à l'infini et que  $F(s,t)$  satisfait une relation de dispersion sans soustraction.

Montrons maintenant que la présence de soustractions dans la relation de dispersion initiale (33) ne constitue pas une difficulté : il suffit d'introduire plusieurs valeurs de  $s$ . Par exemple, si une soustraction est nécessaire :

$$F(s_0, t) - F(s_1, t) = \frac{s_0 - s_1}{\pi} \int \frac{A_s(s', t) ds'}{(s' - s_0)(s' - s_1)}$$

pour  $-T_0 < t \leq 0$ , on applique tout l'argument précédent à la différence des  $F$  et l'on reconstruit  $F$  pour  $s$  quelconque à partir d'un développement en série de  $t$  de  $F(s,t) - F(s_1,t)$ .

#### B - Le cas réaliste : deux coupures

Ici nous partons de

$$F(s,t,u) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A_s(s', t) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int \frac{A_u(u', t) du'}{u' - u} \quad (51)$$

Nous sommes d'emblée placés devant le problème du choix des variables : il est nécessaire de ne garder que deux variables indépendantes.

Si nous choisissons  $s$  et  $t$  comme variables indépendantes et calculons  $(d/dt)F(s_0, t)$  nous découvrons que si la dérivation sous le signe somme est permise, le résultat n'a pas de propriétés de positivité à cause du fait que le dénominateur de l'intégrale sur la coupure de gauche contient implicitement  $t$  : on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{\frac{d}{dt} A_s(s', t) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\frac{d}{dt} A_u(u', t) du'}{u' - u} - \frac{1}{\pi} \int \frac{A_u(u', t) du'}{(u' - u)^2} \quad (52)$$

L'astuce finalement trouvée consiste à considérer la fonction

$$\phi(s_0, t) = \frac{F(s_0, t)}{s_0 - (M_A - M_B)^2 - t} \quad (53)$$

Montrons que si les dérivations sous le signe somme sont permises,  $(d/dt)^n \phi(s_0, t)$  est une somme de termes positifs. Nous avons

$$\begin{aligned} \phi(s_0, t) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{A_s(s', t) ds'}{(s' - s_0) (s_0 - (M_A - M_B)^2 - t)} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \frac{A_u(u', t) du'}{\left[ (u' - (M_A + M_B))^2 + s_0 - (M_A - M_B)^2 \right] (s_0 - (M_A - M_B)^2 - t)} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int \frac{A_u(u', t) du'}{(u' - (M_A + M_B))^2 - t^2} \end{aligned} \quad (54)$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right)^p A_s(s', t) \Big|_{t=0} &> 0 \\ \left( \frac{d}{dt} \right)^p A_u(u', t) \Big|_{t=0} &> 0 \\ \left( \frac{d}{dt} \right)^p \frac{1}{s_0 - (M_A - M_B)^2 - t} \Big|_{t=0} &> 0 \\ \left( \frac{d}{dt} \right)^p \frac{1}{c_1 - c_2 t - t^2} \Big|_{t=0} &> 0 \end{aligned} \quad (55)$$



où  $c_1$  et  $c_2 > 0$ , ce qui démontre notre assertion.

Il reste évidemment à démontrer comme précédemment que l'on peut dériver sous le signe somme. On adopte le même procédé qu'avant : calculer

$$\frac{\phi(s_0, 0) - \phi(s_0, -\tau)}{\tau}$$

et découper en différents termes. On remarque que

$$\phi = \int \Lambda_s(s', t) f(s', t) ds' + \int \Lambda_u(u', t) g(u', t) du'$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(s_0, 0) - \phi(s_0, -\tau)}{\tau} \\ &= \int \frac{\Lambda_s(s', 0) - \Lambda_s(s', -\tau)}{\tau} f(s', 0) ds' + \\ &+ \int \Lambda_s(s', \tau) \frac{f(s', 0) - f(s', -\tau)}{\tau} ds' + \quad s \neq u \end{aligned}$$

Ce qu'il faut remarquer est que l'existence de la limite du second terme est facile à établir et résulte de la convergence de  $\int [\Lambda_s(s', 0)/s' - s_0] ds'$ . Donc nous devons seulement nous occuper de termes comme

$$\begin{aligned} & \int \frac{\Lambda_s(s', 0) - \Lambda_s(s', -\tau)}{\tau} f(s', 0) ds' \\ &+ \int \frac{\Lambda_u(u', 0) - \Lambda_u(u', -\tau)}{\tau} g(u', 0) du' \end{aligned}$$

qui peuvent être traités comme dans le cas à une seule coupure.

La conclusion à laquelle on arrive est que l'on peut effectivement différentier sous le signe somme pour calculer toutes les dérivées et que celles-ci, comme prévu, sont des sommes de termes positifs. Ceci permet une économie d'écriture considérable. Sans écrire la formule de Leibnitz, nous pouvons obtenir

$$\left. \left( \frac{d}{dt} \right)^n \phi (s_0, t) \right|_{t=0} > \frac{1}{s_0 - (M_A - M_B)^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\pi} \int \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_s (s', t=0) ds'}{s' - s_0} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_u (u', t=0) du'}{u' - u_0} \right] \quad (56)$$

avec  $u_0 = 2M_A^2 + 2M_B^2 - s_0$ . Si  $F(s_0, t)$  satisfait les inégalités de Cauchy

$$\left| \left( \frac{d}{dt} \right)^n F (s_0, t=0) \right| < \frac{M n !}{[R(s_0)]^n} \quad (57)$$

on obtient donc, si  $s_0 > (M_A - M_B)^2 + R(s_0)$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_s (s', t=0) ds'}{s' - s_0} \\ & \frac{1}{\pi} \int \frac{\left( \frac{d}{dt} \right)^n A_u (u', t=0) du'}{u' - u_0} \end{aligned} \right\} < \frac{M n !}{[R(s_0)]^n} \times \frac{s_0 - (M_A - M_B)^2}{s_0 - (M_A - M_B)^2 - R(s_0)} \quad (58)$$

On peut alors tenter de définir

$$F = F_D + F_G$$

où

$$F_D \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \int \frac{A_s (s', t) ds'}{s' - s}$$

$$F_G \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \int \frac{A_u (u', t) du'}{u' - u} \quad (59)$$

Des inégalités (58), il suit que

$$\left. \left( \frac{d}{dt} \right)^n F_D (s = s_0, t) \right|_{s \text{ fixé}, t=0}$$

$$\left. \left( \frac{d}{dt} \right)^n F_G (u = u_0, t) \right|_{u \text{ fixé}, t=0}$$

existent et, de plus, on peut définir pour  $s$  et  $u$  hors des coupures

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n F_D(s,t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi} \int \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^n \Lambda_s(s',t=0) ds'}{s' - s}$$

avec

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^n F_D(s,t) \Big|_{t=0}\right| \leq \mu(s,s_0) \times \text{Fonct} \times \frac{n!}{[R(s_0)]^n}$$

où

$$\mu(s,s_0) = \text{Max} \left| \frac{s' - s_0}{s' - s} \right|$$

Il suit de là que

$$\sum \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n F_D(s,t=0)$$

converge pour

$$|t| < R(s_0) \leq s_0 - (M_A - M_B)^2 \quad (60)$$

Un résultat analogue vaut pour  $F_G(s,t)$ .

Il reste à identifier  $F_D + F_G$  avec  $F$ . Pour cela il suffit de considérer le cas de  $s$  réel.

La conclusion est que  $F(s,t)$  est analytique pour  $|t| < R(s_0)$  dans un plan moins les coupures  $s$  réel  $> (M_A + M_B)^2$  [où  $\mu(s,s_0) = \infty$ ] et  $u$  réel  $> (M_A + M_B)^2$  [où  $\mu(u,u_0) = \infty$ ]. La restriction  $R(s_0) \leq s_0 - (M_A - M_B)^2$  peut être atténuée en prenant  $s_0$  aussi grand que possible [pour le moment  $s_0$  voisin de  $(M_A + M_B)^2$ ].

Le domaine d'analyticité est donc une sorte de produit topologique à ceci près que si l'on choisit les variables  $s$  et  $t$  la coupure de gauche bouge quand  $t$  bouge. Son extrémité est à  $s = (M_A - M_B)^2 - t$ .

C - Evaluation de  $R$ , rayon du cercle tel que si  $|t| < R$ , l'amplitude est analytique dans un plan coupé

Dans certains cas, pour obtenir le meilleur résultat, il n'y a pas d'autre solution de calculer  $R(s_0)$  pour un  $s_0$  entre les seuils  $(M_A - M_B)^2$  et  $(M_A + M_B)^2$  par les techniques de complétion analytiques de la théorie des champs. C'est ce qui a été fait par Glaser et Bessis pour le cas pion-nucléon <sup>16)</sup>.

Cependant Sommer a trouvé une prescription extrêmement simple qui utilise comme point de départ les résultats connus de Lehmann, cités dans la Section 2.

Sommer <sup>15)</sup> remarque que, dans l'argument présenté précédemment, on peut en fait prendre  $s_0$  plus grand que le seuil  $(M_A + M_B)^2$  pourvu que l'on remplace  $F(s, t)$  par

$$\bar{F}(s, t) = F(s, t) - \frac{1}{\pi} \int_{(M_A + M_B)^2}^{s'_0} \frac{\Lambda_s(s', t) ds'}{s' - s}, \quad s'_0 > s_0 \quad (61)$$

L'avantage de cette opération est que l'on connaît la dimension du domaine d'analyticité à  $s = s_0$ . Il est facile de montrer que si  $s_0$  est suffisamment voisin de  $s'_0$ ,  $\bar{F}(s_0, t)$ , comme  $F(s_0, t)$  est analytique en  $t$  dans la petite ellipse de Lehmann (14) qui contient en particulier le cercle

$$|t| < 2 k_0^2 [\cos \theta_0(s_0) - 1] \quad (62)$$

il est facile de voir que pour  $s_0 \rightarrow (M_A + M_B)^2$  et  $s_0 \rightarrow \infty$  le membre de droite tend vers zéro. Il a donc quelque part un maximum et donc

$$R \geq \text{Max}_{(M_A + M_B)^2 < s_0 < \infty} 2 k_0^2 [\cos \theta_0(s_0) - 1] \quad (63)$$

En appliquant cette formule, on trouve par exemple  $R = 4m_\pi^2$  pour la diffusion  $K\pi \rightarrow K\pi, \pi\pi \rightarrow \pi\pi$ , et  $KK \rightarrow KK$ . Mais, pour le cas  $\pi N$ , l'argument direct de Glaser et Bessis est nécessaire si l'on veut obtenir  $R = 4m_\pi^2$ .

Ici je dois expliquer que cette valeur de  $R$  est extrêmement satisfaisante pour l'esprit, car un système de deux mésons  $\pi$  est le système de plus d'une particule, le plus léger qui puisse être échangé dans une collision entre particules en interaction forte, et il est naturel que  $R$  soit égal au carré de cette masse.

4. - QUELQUES CONSEQUENCES DU NOUVEAU DOMAINE D'ANALYTICITE

Je me contenterai d'énumérer quelques résultats.

- a) - La conséquence la plus spectaculaire est sans doute l'existence d'une borne <sup>11), 17)</sup> (valable en moyenne) sur l'amplitude de diffusion vers l'avant à haute énergie et la section efficace totale

$$\sigma_{\text{totale}} \leq \frac{\pi}{\frac{m^2}{\pi}} (\log s)^2 \quad (64)$$

Cette borne avait été obtenue antérieurement par Froissart <sup>18)</sup> qui supposait que l'amplitude de diffusion obéissait à la "représentation de Mandelstam", dans laquelle l'amplitude est partout analytique en dehors des coupures  $s \text{ réel} > s_0$   $t \text{ réel} > t_0$   $u \text{ réel} > u_0$ .

Il faut comprendre que (64) représente un succès assez étonnant étant donné que les sections efficaces totales observées expérimentalement à haute énergie semblent avoir une variation très lente avec l'énergie (probablement elles tendent vers des constantes finies non nulles). Si l'on considère que seules des informations très générales (causalité, unitarité, existence d'une masse minimum) ont été utilisées, sans aucune description dynamique détaillée, ce qui a été obtenu n'est pas mal.

- b) - Dans une situation où l'on a une grande symétrie, comme dans la diffusion  $\pi \pi$  l'union des domaines d'analyticité obtenus, le plan coupé, pour  $|t| < 4m_{\pi}^2$ , ou  $|s| < 4m_{\pi}^2$ , ou  $|u| < 4m_{\pi}^2$ , n'est pas naturelle. L'unitarité peut être de nouveau employée, etc. De cette façon, on obtient (sans d'ailleurs que la solution exacte du problème soit connue) un domaine d'analyticité très grand <sup>11), 19)</sup> et l'on justifie l'emploi de la représentation de Mandelstam pour l'amplitude  $\pi \pi$  comme une approximation valable lorsque l'une des variables  $s$ ,  $t$  ou  $u$  n'est pas trop grande. Cependant il est possible de montrer qu'en l'absence d'informations nouvelles provenant de la théorie des champs on ne pourra pas établir par cette méthode la validité de la représentation de Mandelstam exacte
- c) - Restant dans le cadre de l'amplitude  $\pi \pi$  il est possible d'obtenir, à partir de l'existence de ce domaine, des bornes absolues sur l'amplitude  $\pi \pi$  <sup>20), 17)</sup> pour tout point intérieur au domaine  $|t| < 4m_{\pi}^2$ ,

s hors des coupures. En particulier, avec la normalisation (16),  
on obtient <sup>17)</sup>

$$- 100 < F(4/3, 4/3, 4/3) < 16$$

où  $F$  est l'amplitude  $\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$  et aussi l'inégalité algébrique <sup>21)</sup>

$$F(4, 0, 0) > - 6$$



## REFERENCES

- 1) J. Bros, H. Epstein et V. Glaser - Commun.Math.Phys. 1, 240 (1965).
- 2) K. Hepp - Helv. Phys. Acta 37, 639 (1964).
- 3) A. Jaffé - Communication à la Conférence de Berkeley sur les particules élémentaires (1966), non publié.
- 4) H. Epstein, V. Glaser et A. Martin - Rapport CERN Th. 991, à soumettre à Commun. Math. Phys.
- 5) K. Symanzik - Phys. Rev. 100, 743 (1957) ;  
N.N. Bogoliubov, B. Medvedev et M. Polyvanov - Voprossy Teorii Dispersionnykh Sootnoshenii (Moscou 1958).
- 6) K.J. Foley, R.S. Jones, S.J. Lindenbaum, W.A. Love, S. Ozaki, E.D. Platrier, C.A. Quarles et E.H. Willer - Phys. Rev. Letters 19, 193 (1967).
- 7) H. Lehmann - Nuovo Cimento 10, 579 (1958).
- 8) S. Mandelstam - Nuovo Cimento 15, 658 (1960).
- 9) H. Lehmann - Commun. Math. Phys. 2, 375 (1966).
- 10) Cette exploitation de la positivité à la Glaser est due à H. Epstein.
- 11) A. Martin - Nuovo Cimento 42, 930 (1966).
- 12) Voir l'appendice de l'article de G. Mahoux et A. Martin - Phys. Rev. 174, 2140 (1968).
- 13) G. Mahoux - Thèse, à paraître.
- 14) N.N. Khuri - Phys. Rev. 107, 1148 (1957).
- 15) G. Sommer - Nuovo Cimento 48, 92 (1967).
- 16) J.D. Bessis et V. Glaser - Nuovo Cimento 58, 568 (1967).
- 17) Pour des constantes optimales, voir L. Łukaszyk et A. Martin - Nuovo Cimento 52, 122 (1967).
- 18) M. Froissart - Phys. Rev. 123, 1053 (1961). Voir aussi :  
O.W. Greenberg et F.E. Low - Phys. Rev. 124, 2047 (1961) ;  
A. Martin - Phys. Rev. 129, 1432 (1963).
- 19) A. Martin - Nuovo Cimento 44, 1219 (1966).
- 20) A. Martin - High Energy Physics and Elementary Particles, p. 155  
(International Atomic Energy Agency, Vienna 1965).
- 21) B. Bonnier et R. Vinh Mau - Phys. Rev. 165, 1923 (1968) ; le nombre indiqué est une amélioration non publiée du résultat présenté dans cet article.