

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

K. HEPP

Dynamique quantique hamiltonienne

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 16
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. n° 7, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__16__A7_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DYNAMIQUE QUANTIQUE HAMILTONIENNE

K. Hepp

ETH, Zürich, Suisse

§ 0. INTRODUCTION .

Depuis la conférence de Lanford [1] au RCP 25 nous sommes tous vaguement experts dans les problèmes de la théorie quantique des champs constructive. Je vais donc renoncer à une revue générale des raisons qui nous poussent à étudier ces systèmes dynamiques singuliers. Plutôt je vais tracer deux sections typiques à travers des interactions locales entre bosons scalaires.

J'espère que cette esquisse va mettre en évidence les possibilités et les limites actuelles de la théorie.

Soit $\phi_0(x)$ un champ scalaire libre

$$\phi_0(x) = (2\pi)^{-S/2} \int_{\underline{p}=\underline{\mu}}^{\underline{p}} \frac{d\underline{p}}{\sqrt{2\mu}} \{a(\underline{p})e^{-i(\underline{p},x)} + a^*(\underline{p})e^{i(\underline{p},x)}\} \quad (1)$$

Ici l'espace de Minkowski est $(S+1)$ -dimensionnel, avec $(\underline{p},x) = p^0 x^0 - \underline{p} \cdot \underline{x}$ et $\mu = \mu(\underline{p}) = (\underline{p}^2 + m^2)^{1/2}$, $m > 0$. Les créateurs $a^*(\underline{p})$ et les annihilateurs $a(\underline{p})$ satisfont à

$$\begin{aligned} [a(\underline{p}), a(\underline{q})] &= 0 \\ [a(\underline{p}), a^*(\underline{q})] &= \delta(\underline{p}-\underline{q}), \end{aligned} \quad (2)$$

et ils sont représentés dans l'espace de Fock \mathfrak{F} , avec $a(\underline{p})\psi_0 = 0$ sur le vide de Fock ψ_0 .

L'opérateur de multiplication

$$(H_0 \psi_n)(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \psi_n(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n) (\mu_i = \mu(\underline{p}_i)) \quad (3)$$

est l'hamiltonien libre. Soit $\phi_+(x)$ la partie purement créateur de $\phi_0(x)$ et

$\phi_- = \phi_0 - \phi_+$. Le produit de Wick, $:\phi_0(x)^n:$, est défini par

$$:\phi_0(x)^n: = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \phi_+(x)^m \phi_-(x)^{n-m} \quad (4)$$

Nous nous intéressons à des interactions locales du type

$$\begin{aligned} H(g) &= H_0 + H_I(g) \\ H_I(g) &= \int d\underline{x} g(\underline{x}) :H_I(\underline{x}): \\ H_I(\underline{x}) &= \sum_{m=0}^n a_m : \phi_0(o, \underline{x})^m : \end{aligned} \quad (5)$$

que nous allons appeler un modèle ϕ_{S+1}^n , si $a_n \neq 0$ et si $S+1$ est la dimension de l'espace-temps. Nous choisissons un cut-off spatial $g \geq 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^S)$.

Les deux sections transversales, que je vais tracer dans mon exposé, sont les modèles

$$\phi_2^n, n \in \mathbb{Z}_+ \quad (6)$$

et les modèles

$$\phi_{S+1}^3, S \in \mathbb{Z}_+ \quad (7)$$

On déduit de

$$\begin{aligned} \int d\underline{x} g(\underline{x}) : \phi_0(o, \underline{x})^n : &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \int \prod_{i=1}^m (a^*(\underline{p}_i) d\underline{p}_i) \\ &\times \prod_{j=m+1}^n (a(-\underline{p}_j) d\underline{p}_j) \hat{g} \left(\sum_{i=1}^m \underline{p}_i \right) \prod_{i=1}^n \mu_i^{-1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

(avec $\hat{g} \sim$ transformée de Fourier de g) que $H(g)$ est une forme bilinéaire sur $\mathfrak{U}^0 \times \mathfrak{U}^0$ (\mathfrak{U}^0 est l'ensemble des vecteurs dans \mathfrak{U} avec un nombre fini de particules et support compact des amplitudes $\psi_n(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n)$), et que pour $S+1=2$ $H(g)$ est un opérateur symétrique sur le domaine \mathfrak{U}^0 , qui est dense dans \mathfrak{U} .

Les difficultés de la classe (6) proviennent de la création multiple de particules. Pour $n > 2$, ni $H_I(g)$ est petit par rapport à H_0 , ni H_0 petit par rapport à $H_I(g)$. H_0 est manifestement autoadjoint sur un domaine naturel $D(H_0)$. $H_I(g)$ est aussi autoadjoint avec un domaine $D(H_I(g))$ [2]. La question centrale pour les modèles ϕ_2^n est donc : Quand $H_0 + H_I(g)$ est-il essentiellement

autoadjoint sur $D(H_0) \cap D(H_I(g))$?

Les modèles de la classe (7) possèdent une difficulté supplémentaire qui doit être résolue avant de poser la question de l'unicité de la dynamique. Pour $s > 1$, $D(H_I(g)) = \{0\}$ à cause des divergences ultraviolettes. Donc la question brûlante est : quand peut-on trouver des renormalisations $R(g)$ (de degré ≥ 2 en g) telles que $H_0 + H_I(g) + R(g)$ est un opérateur à domaine dense dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} , qui peut être différent de \mathfrak{H} ?

§ 1 . LES MODELES Φ_2^n

Puisque $H(g)$ est réel et symétrique sur $D(H_0) \cap D(H_I(g))$, il existe toujours des extensions autoadjointes. On sait [3], [4] que si $n > 2$ est impair ou si $n > 2$ est pair et $a_n < 0$, alors $H(g)$ n'est pas borné inférieurement. Dans ce cas on s'attend à ce que les indices de défaut de $H(g)$ ne soient pas $[0,0]$. Dans cette section nous allons discuter un résultat positif et important obtenu par Nelson [5], Glimm [6] et Rosen [7].

Théorème 1 : Pour n pair et $a_n > 0$ $H(g)$ est borné inférieurement et essentiellement autoadjoint sur $D(H_0) \cap D(H_I(g))$.

Avant que j'esquisse les ingrédients de la démonstration difficile de ce théorème, je vais formuler la conséquence la plus importante.

Théorème 2 : Il existe dans \mathfrak{H} une théorie quantique des champs locaux $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{U}(B), \alpha_g\}$ au sens de Haag et Kastler [8], qui est invariante par rapport aux translations dans \mathbb{R}^2 et où l'automorphisme α_t des translations dans le temps est localement unitairement implémenté par $H(g)$: pour tout ouvert borné $B \subset \mathbb{R}^2$ et tout $T < \infty$, il existe un $R(B, T)$ tel que

$$\alpha_t(A) = \exp(iH(g)t) A \exp(-iH(g)t)$$

pour tout $0 \leq g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ avec $g(\underline{x}) = 1$ pour $|\underline{x}| \leq R(B, T)$, pour tout $A \in \mathfrak{A}(B)$ et pour tout $|t| \leq T$.

Car, si $H_0 + H_I(g)$ est essentiellement autoadjoint sur $D(H_0) \cap D(H_I(g))$,

le théorème de Trotter[9] est applicable :

$$\exp(iH(g)t) A \exp(-iH(g)t) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{iH_0 t/n} e^{iH_I(g)t/n} \right)^n A \left(e^{-iH_I(g)t/n} e^{-iH_0 t/n} \right)^n \quad (9)$$

Donc l'action inconnue de $\exp(iH(g)t)$ peut être exprimée par la propagation causale de $\exp(iH_0 t)$ et par $\exp(iH_I(g)t)$, qui pour tout t appartient à une C^* -algèbre locale déterminée par $\text{supp } g$. (Voir [10] et [2]).

La démonstration que $H = H_0 + H_I$ (maintenant $0 \leq g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ est fixe et, dans $H_I = H_I(g)$, g sera supprimé) est essentiellement autoadjointe sur $D(H_0) \cap D(H_I)$ repose sur une théorie d'approximation des opérateurs autoadjoints non-bornés, qui a été développée par Kato [11], Glimm et Jaffe [12].

Définition: (convergence forte au sens des graphes)

$$C_n \xrightarrow{G} C_\infty$$

Si les C_n sont des opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} à domaine $D(C_n)$ dense et si

$$G_\infty = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi = s\text{-}\lim \varphi_n, \varphi_n \in D(C_n), \psi = s\text{-}\lim C_n \varphi_n\} \quad (10)$$

est le graphe d'un opérateur C_∞ à domaine dense.

Définition : (convergence forte au sens des résolvantes)

$$C_n \xrightarrow{R} C_\infty$$

si pour un z fixe la résolvante $R_n(z)$ de C_n existe pour tout n , si

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = R(z) \quad (11)$$

existe et si $R(z)$ possède un inverse à domaine dense. Le lemme suivant [11],

[12] caractérise la relation entre différentes notions de convergence :

Lemme 3 : Soit C_n une suite d'opérateurs autoadjoints et \mathfrak{D} un ensemble dense.

Alors

(a) Si $C_n \xrightarrow{G} C_\infty$, alors C_∞ est symétrique .

(b) Si $C_n \xrightarrow{R} C_\infty$, alors $C_n \xrightarrow{G} C_\infty$ et C_∞ est maximale ment symétrique .

(c) Si $C_n \xrightarrow[S]{\mathcal{C}} C$ sur \mathcal{D} , alors $C_n \xrightarrow[G]{\mathcal{C}} C_\infty$ et $C_\infty \supset C$.

(d) Si C est autoadjoint avec core \mathcal{D} (c.a.d. $\overline{C|\mathcal{D}} = C$) et si $C_n \xrightarrow[S]{\mathcal{C}} C$ sur \mathcal{D} , alors $C_n \xrightarrow[R]{\mathcal{C}} C$.

Nous allons tout à l'heure définir une approximation H_{on} de H_0 et H_{In} de H_I , telle que

$$H_0 = R\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{on} = G\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{on} \tag{12}$$

$$H_I = R\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{In} = G\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{on}$$

et que $H_n = H_{on} + H_{In}$ est autoadjoint.

Pour ces familles d'opérateurs Rosen [7] (voir aussi [5] et [6]) démontre les deux lemmes importants suivants :

Lemme 4 : Il existe $E > -\infty$ tel que pour $\text{Re} z < E$ les résolvantes $R_n(z) = (z - H_n)^{-1}$ existent et convergent en norme

$$n\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = R(z) = (z - T)^{-1} \tag{13}$$

vers la résolvante $R(z)$ d'un opérateur $T > E$ autoadjoint.

Lemme 5 : Il existe un ensemble dense $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, tel que pour tout $\text{Re} z < E$ et $\varphi \in \mathcal{O}$, $H_{on} R_n(z)\varphi$ et $H_{In} R_n(z)\varphi$ convergent fortement.

Cette information est suffisante pour démontrer le théorème 1 : soit

$\mathcal{Q} = R(z)\mathcal{O}$. Si $\psi \in \mathcal{Q}$, ($\psi = R(z)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{O}$), alors $\psi_n = R_n(z)\varphi \xrightarrow[S]{\mathcal{C}} \psi$ et d'après lemme 5, (12) et lemme 3

$$\begin{aligned} S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{on} \psi_n &= H_0 \psi \\ S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} H_{In} \psi_n &= H_I \psi \end{aligned} \tag{14}$$

Donc $\mathcal{Q} \subset D(H_0) \cap D(H_I)$. Lemme 4 implique que $H_n \xrightarrow[R]{\mathcal{C}} T$ car d'après [11] H est un core pour T . Donc $H_n \xrightarrow[G]{\mathcal{C}} T$, donc $H_n \psi_n \xrightarrow[S]{\mathcal{C}} T \psi$, et avec (14) on obtient

$$T | \mathcal{Q} = H | \mathcal{Q} \tag{15}$$

C'est pourquoi

$$T = \overline{T | \mathcal{Q}} = \overline{H | \mathcal{Q}} \subset \overline{H | D(H_0) \cap D(H_I)} = \overline{H} \tag{16}$$

et \overline{H} est une extension symétrique de l'opérateur autoadjoint T . Donc $T = \overline{H}$, C.Q.F.D.

Quelle est l'approximation H_n , qui peut fournir une information aussi détaillée que les lemmes 4 et 5 ?

Soit $K, V > 0$ et

$$\Gamma_{KV} = \left\{ p = n \frac{2\pi}{V}, n \in \mathbb{Z}, |p| < K \right\},$$

$$[p]_V = q \in \Gamma_{KV}, \text{ si } -\pi/V < q-p \leq \pi/V \quad (17)$$

Soit $\mathfrak{U}_{KV} \subset \mathfrak{U}$ le sous espace des fonctions, qui sont constantes autour de Γ_{KV} et zéro autrement :

$$\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\} \in \mathfrak{U}_{KV}, \text{ si}$$

$$\varphi_n(p_1, \dots, p_n) = \varphi_n([p_1]_V, \dots, [p_n]_V) \quad (18)$$

$$\varphi_n(p_1, \dots, p_n) = 0, \text{ si un } |[p_i]_V| > K$$

Pour $p \in \Gamma_{KV}$

$$a_V(p) = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/V}^{\pi/V} a(p+q) dq \quad (19)$$

laisse \mathfrak{U}_{KV} invariant et satisfait à

$$[a_V(p), a_V(q)] = 0$$

$$[a_V(p), a_V^*(q)] = \delta_{pq} \quad (20)$$

Nous posons pour $[-V/2, V/2] \supset \text{supp } g$

$$H_{OKV} = \sum_{p \in \Gamma_{KV}} \mu(p) a_V^*(p) a_V(p) \quad (21)$$

$$: \Phi_{KV}^n(g) : = (2V)^{-n/2} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \sum_{p_i \in \Gamma_{KV}} a_V^*(p_1), \dots, a_V(-p_n) \frac{\hat{g}(\sum p_i)}{\prod \mu(p_i)}^{1/2}$$

$$H_{IKV} = \sum_{m=0}^n a_m : \Phi_{KV}^m(g) :$$

Soit $K_0 > 0, V_0 > 0$ et

$$K(n) = nK_0, V(n) = 3^n V_0 \quad (22)$$

Alors pour $n > m$, $\mathfrak{U}_{K(n)V(n)} \supset \mathfrak{U}_{K(m)V(m)} \equiv \mathfrak{U}_m$.

Finalement nous définissons

$$H_{on} = \begin{cases} H_oK(n)V(n) & \text{sur } \mathfrak{U}_m \\ 0 & \text{sur } \mathfrak{U}_m^\perp \end{cases} \quad (23)$$

et H_{In} et H_n d'une façon analogue.

Le développement

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{KV}(x) &= (2V)^{-1/2} \left\{ \sum_{0 \neq a \in \Gamma_{KV}} (Q_{|a|} \cos ax + Q_{-|a|} \sin ax) + \sqrt{2} Q_0 \right\} \\ \hat{\Pi}_{KV}(x) &= (2V)^{-1/2} \left\{ \sum_{0 \neq a \in \Gamma_{KV}} (P_{|a|} \cos ax + P_{-|a|} \sin ax) + \sqrt{2} P_0 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

transforme H_{IKV} en un polynôme des Q_a , $a \in \Gamma_{KV}$, et H_{OKV} en

$$H_{OKV} = \frac{1}{2} \sum_{a \in \Gamma_{KV}} [P_a^2 + \mu_a^2 Q_a^2 - \mu_a] \quad (25)$$

et (20) en

$$\begin{aligned} [Q_a, Q_b] &= [P_a, P_b] = 0 \\ [Q_a, P_b] &= i\delta_{ab} \end{aligned} \quad (26)$$

Pour les estimations concrètes on utilise (au lieu de la représentation des relations de commutations (26) dans \mathfrak{U}_{KV}) la représentation de Schrödinger qui est unitairement équivalente. Soit

$$M(K, V) = \sum_{a \in \Gamma_{KV}} 1 \quad (27)$$

$$d\rho_{KV} = \rho_{KV}(q) dq = \prod_{a \in \Gamma_{KV}} (\mu_a/\pi)^{1/2} e^{-\mu_a q_a^2} dq_a = \prod_{a \in \Gamma_{KV}} \rho_a(q_a) dq_a$$

D'après v. Neumann, il existe une équivalence unitaire

$$\begin{aligned} W_{KV} : L_2(\mathbb{R}^{M(K, V)}, d\rho_{KV}) &\rightarrow \mathfrak{U}_{KV} \text{ avec } W_{KV}^{-1} Q_a W_{KV} \text{ égal à la multiplication avec } q_a \\ \text{et } W_{KV}^{-1} P_a W_{KV} &\text{ égal à } \rho_a^{-1/2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_a} \rho_a^{1/2}. \end{aligned}$$

En particulier

$$W_{KV}^{-1} H_{OKV} W_{KV} = \sum_{a \in \Gamma_{KV}} H_{oa}$$

$$H_{0a} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_a} \right)^2 + \mu_a q_a \frac{\partial}{\partial q_a} \quad (28)$$

et $W_{KV}^{-1} : \Phi_{KV}^n(g) : W_{KV}$ est un polynôme en q_a . Cette représentation a été utilisé par Jaffe [13] pour démontrer que pour tout K, V , $H_{KV} = K_{OKV} + H_{IKV}$ est "essentielle-ment autoadjoint" sur le domaine généré par des vecteurs du type $\prod a_V^*(p) \varphi_0$.

La démonstration de (14) est maintenant très directe : soit $\mathfrak{D}_\infty = \bigcap_n D(H_0^n)$. H_0 est essentiellement autoadjoint sur \mathfrak{D}_∞ , qui contient les vecteurs analytiques de H_0 , et \mathfrak{D}_∞ est aussi un core pour H_I [2]. Une estimation directe montre, que $H_{0n} \xrightarrow{S} H_0$ et $H_{In} \xrightarrow{S} H_I$ sur \mathfrak{D}_∞ . Donc lemme 3 implique (14).

Pour la démonstration des lemmes 4 et 5 on a besoin d'estimations uniformes en K, V . Un résultat typique pour les estimations dans $L_r = L_r(R^{M(K,V)}, d\rho_{KV})$ est dû à Nelson [5] : $\exp(-tH_{OKV})$ est une contraction dans $L_r, 1 \leq r \leq \infty$, et pour tout $p_0 > 1$, $r_0 < \infty$, il existe un $T = T(r_0, p_0)$ tel que $\exp(-tH_{OKV})$ est une contraction de L_p à L_r pour tout $t \geq T$, $p \geq p_0$, $r \leq r_0$, $r \geq 1$.

La deuxième catégorie d'estimations qui aboutissent aux lemmes 4 et 5 repose sur la formule de Feynman et Kac [14]

$$(\varphi, \exp(-tH_{KV})\psi) = \quad (29)$$

$$\int \overline{\varphi(q(0))} \exp\left(-\int_0^t H_{IKV}(q(s)) ds\right) \psi(q(t)) dQ_{KV}$$

où $\varphi(q)$ et $\psi(q)$ sont les représentations de φ et ψ dans $L_2(R^{M(K,V)}, d\rho_{KV})$ et $H_{IKV}(q)$ est l'opérateur de multiplication correspondant et où l'intégral s'étend sur l'espace des orbites dans $R^{M(K,V)}$ avec la mesure de Wiener associé à $\exp(-tH_{OKV})$ (voir [5],[6],[7]).

§ 3 . LES MODELES Φ_{S+1}^3

Puisque les interactions Φ_2^3 n'ont pas une borne inférieure pour l'énergie $H_0 + H_I(g)$, l'étude des modèles Φ_{S+1}^3 est purement pédagogique pour expliquer le concept de la renormalisation. Φ_{S+1}^3 ne crée que trois particules, et c'est pourquoi la gamme de divergences ultraviolettes est plus subtile que pour les interactions réalistes de la théorie quantique des champs.

Considérons un graphe connexe de

$$(\varphi_0, T(\bar{\varphi}_0(x_1) \dots \bar{\varphi}_0(x_e) : \bar{\varphi}_0(y_1)^3 : \dots : \bar{\varphi}_0(y_n)^3) \varphi_0) \quad (30)$$

d'ordre n avec e lignes extérieures et $i = 3/2n - e/2$ lignes intérieures.

Un tel graphe est superficiellement divergent (voir e.g. [15]), si

$$S + 1 \leq \frac{S-1}{2} e + \left(\frac{5}{2} - \frac{S}{2}\right) n \quad (31)$$

Pour $S = 1$ il n'y a aucune divergence. Pour $2 \leq S \leq 4$ il n'y a aucune divergence superficielle pour n suffisamment grand et l'interaction est appelée super-renormalisable. Si $S = 5$, il y a des divergences superficielles pour tout n , mais seulement pour $e \leq 3$, et l'interaction est appelée renormalisable.

Finalement le cas $S > 5$ est nonrenormalisable avec des divergences superficielles pour tout e et d'un degré qui monte avec n pour e fixe. Nous allons voir que les interactions super-renormalisables, $S = 2, 3$ et 4 , se comportent très différemment dans la construction d'un hamiltonien renormalisé.

Soit $S = 2$. Soit $g = \bar{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et

$$V = \sum_{m=0}^3 V_m \quad (32)$$

$$V_m = \binom{3}{m} \int d\underline{x} g(\underline{x}) \Phi_+(\underline{x})^m \bar{\varphi}_-(\underline{x})^{3-m}$$

Pour $\sigma \leq \infty$, $V_{m\sigma}$ est défini en restreignant toutes les impulsions dans tous les $\bar{\varphi}_\pm(\underline{x})$ à $\{|\underline{p}| \leq \sigma\}$ dans la représentation (1). On observe dans (8) que V_2 et V_3 n'ont pas de domaine non-trivial dans \mathfrak{U} , Cependant $H_0 + V_{2\sigma} + V_{3\sigma}$ possède un domaine dense dans \mathfrak{U} pour tout $\sigma \leq \infty$, par une compensation de singularités de l'opérateur non-borné H_0 avec celles de $V_{2\sigma} + V_{3\sigma}$. La construction formelle de ce domaine est simple. Soit

$$W = \int dk W(k) \prod_{i=1}^m a^*(\underline{k}_i) \prod_{j=1}^n a(\underline{k}_{-m+j}) \quad (33)$$

un monôme de Wick avec $m \leq 1$ créateurs. Alors $\Gamma(W)$ est défini en remplaçant le noyau $W(k)$ de (33) par

$$W(k) \left(\sum_{i=1}^m \mu(\underline{k}_i) \right)^{-1} \quad (34)$$

Formellement on a

$$H_0 \Gamma(W) = W + : \Gamma(W) H_0 : \quad (35)$$

Nous utilisons (35) pour résoudre l'équation

$$(H_0 + V_{2\sigma} + V_{3\sigma}) T_\sigma = : T_\sigma H_0 : \quad (36)$$

On obtient

$$T_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n\sigma} \quad T_{0\sigma} = 1 \quad (37)$$

$$T_{n\sigma} = -\Gamma((V_{2\sigma} + V_{3\sigma}) T_{n-1, \sigma}) \quad n \geq 1$$

La seule singularité de $(V_{1\sigma} + V_{0\sigma}) T_\sigma$ provient de

$$\underbrace{-V_{0\sigma} \Gamma(V_{3\sigma} T_\sigma)}_3 = -V_{0\sigma} \underbrace{\Gamma(V_{3\sigma})}_3 T_\sigma + \text{termes convergents pour } \sigma \leq \infty \quad (38)$$

(Ici \underbrace{AB}_n est la contribution de n contractions, si l'on utilise les relations de commutation (2) pour exprimer le produit des monômes de Wick A et B comme polynôme de Wick. Voir [16]). Nous allons introduire avec

$$R_\sigma = V_{0\sigma} \underbrace{\Gamma(V_{3\sigma})}_3 \quad (39)$$

une renormalisation d'énergie. Alors en chaque ordre en g et pour tout $\varphi \in \mathfrak{U}^0$

$$(H_0 + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma \varphi \quad (40)$$

n'a aucune divergence pour $\sigma \rightarrow \infty$.

Malheureusement la série (37) pour T_σ ne converge pas fortement sur \mathfrak{U}^0 : pour tout $0 \neq \varphi \in \mathfrak{U}^0$ il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\| T_{n\sigma} \varphi \| \geq C^n (n!)^{1/2} \quad (41)$$

L'idée salvatrice de Glimm [17] est de tronquer $T_{n\sigma}$ rapidement avec n pour obtenir convergence. Une troncature d'un monôme de Wick du type (33) est

obtenue en multipliant le noyau W par la fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^{sn} . Naturellement, sur l'image d'une transformation de dressing tronquée, la compensation des divergences est moins complète. Mais dans le modèle Φ_3^3 , où les divergences importantes sont logarithmiques, il est facile de trouver des troncations telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{n\sigma} \Big| \text{tronqué} \quad (42)$$

converge fortement sur \mathfrak{U}^0 pour $\sigma \leq \infty$ et que sur l'image de (42) les divergences de $H_0 + V_\sigma$ et de R_σ se compensent. Le théorème suivant est dû à Osterwalder [4]:

Théorème 6 : Il existe une famille d'opérateurs inversibles $T_\sigma(\kappa, \rho) : \mathfrak{U}^0 \rightarrow \mathfrak{U}$,

$0 \leq \kappa, \rho, \sigma \leq \infty$, telle que pour tout $\varphi \in \mathfrak{U}^0$

$$\begin{aligned} S\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow \infty} T_\sigma(\kappa, \rho) \varphi &= T_\infty(\kappa, \rho) \varphi \\ S\text{-}\lim_{\rho, \kappa \rightarrow \infty} T_\sigma(\kappa, \rho) &= \varphi \end{aligned} \quad (43)$$

$$S\text{-}\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (H_0 + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma(\kappa, \rho) \varphi = H_\infty T_\infty(\kappa, \rho) \varphi$$

pour $0 \leq \kappa, \rho < \infty$.

H_∞ est un opérateur réel et symétrique sur le domaine dense $\bigcup_{\kappa, \rho} T_\infty(\kappa, \rho) \mathfrak{U}^0$.

Soit $\kappa > 0$ et

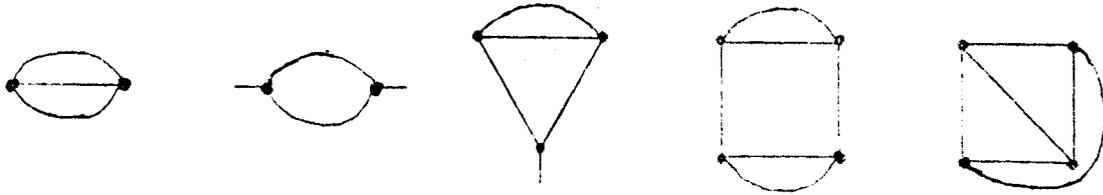
$$\varphi_r = \left(\int_{|\underline{p}| \leq \kappa} a^*(\underline{p})^r \varphi_\sigma \right) / \left\| \left(\int_{|\underline{p}| \leq \kappa} a^*(\underline{p})^r \varphi_\sigma \right) \right\| \quad (44)$$

Il existe $C < \infty$, $|\alpha| = 1$ et une fonction $\rho(r)$ telles que $\Psi_r = T_\infty(\kappa, \rho(r)) (\varphi_r + \alpha \varphi_{r+1})$ satisfait à

$$\begin{aligned} \|\Psi_r\| &\leq C \text{ pour tout } r \in \mathbb{Z}_+ \\ (\Psi_r, H_\infty \Psi_r) &\rightarrow -\infty \text{ pour } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (45)$$

Donc malgré une renormalisation d'énergie positivement infinie H_∞ n'est pas borné inférieurement.

Soit $S=3$. D'après (31), les seules diagrammes de Feynman primitivement divergentes sont



On attend que dans R_σ des renormalisations du même type apparaissent :

$$R_\sigma = E_\sigma + M_\sigma + N_\sigma \tag{46}$$

avec

$$H_\sigma = m_\sigma \int d\underline{x} g(\underline{x})^2 : \bar{\phi}_\sigma(\underline{x})^2 : \tag{47}$$

$$N_\sigma = n_\sigma \int d\underline{x} g(\underline{x})^3 \bar{\phi}_\sigma(\underline{x})$$

et $E_\sigma, m_\sigma, n_\sigma \in \mathbb{R}$. Il est maintenant moins facile de trouver une transformation de dressing T_σ formelle et de déterminer $E_\sigma, m_\sigma, n_\sigma$ tel que $(H_\sigma + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma$ n'a plus de divergences ultraviolettes. Pour T_σ on peut choisir

$$T_\sigma = \exp(-\Gamma(V_{3\sigma})) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Gamma(Q_\sigma \dots \Gamma(Q_\sigma)) + 1 \right\}$$

$$Q_\sigma = V_{2\sigma} - V_{2\sigma} \underbrace{\Gamma(V_{3\sigma})}_1 + M_{2\sigma} - V_{1\sigma} \underbrace{\Gamma(V_{3\sigma})}_2 \tag{48}$$

qui existe comme forme bilinéaire sur $\mathfrak{U}^0 \times \mathfrak{U}^0$ en chaque ordre de g pour $\sigma \leq \infty$ ainsi que $(H_\sigma + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma$. Mais deux nouvelles difficultés surgissent. D'abord

$$\| \Gamma(V_{3\sigma}) \varphi_0 \|^2 = \Lambda_\sigma \rightarrow \infty \text{ pour } \sigma \rightarrow \infty \tag{49}$$

et $T_\sigma \varphi$ n'est plus un vecteur (formel) dans \mathfrak{U} pour $\varphi \in \mathfrak{U}^0$ et $\sigma \rightarrow \infty$.

Ce que l'on peut attendre de mieux est la convergence de

$$\frac{(T_\sigma \varphi, T_\sigma \psi)}{\| T_\sigma \varphi_0 \|^2} \tag{50}$$

$$\frac{(T_\sigma \varphi, (H_\sigma + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma \psi)}{\| T_\sigma \varphi_0 \|^2}$$

pour $\sigma \rightarrow \infty$ (en chaque ordre de g).

Deuxièmement la troncature est maintenant très délicate, car Λ_σ est linéairement divergent. Pour compenser les infinités, T_σ tronqué ne peut pas différer beaucoup de T_σ . Osterwalder [4] obtient une assez bonne estimation sur le nombre de graphes dans $T_\sigma^* (1 + H_\sigma + V_\sigma + R_\sigma)^2 T_\sigma$ et sur leur contribution. Après une troncature très astucieuse il arrive au

Théorème 7 : Il existe une famille d'opérateurs inversibles $\hat{T}_\sigma : \mathfrak{U}^0 \rightarrow \mathfrak{U}$, $\sigma < \infty$, $\hat{T}_\infty : \mathfrak{U}^0 \rightarrow \mathfrak{H}$, où \mathfrak{H} est un espace de Hilbert avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\hat{T}_\infty \mathfrak{U}^0$ est dense dans \mathfrak{H} . Il existe un opérateur réel et symétrique H_∞ sur $\hat{T}_\infty \mathfrak{U}^0$, qui est faiblement approximé par $H_\sigma = H_0 + V_\sigma + R_\sigma$: pour tout $\varphi, \Psi \in \mathfrak{U}^0$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\hat{T}_\sigma \varphi, \hat{T}_\sigma \Psi) = \langle \hat{T}_\infty \varphi, \hat{T}_\infty \Psi \rangle$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\hat{T}_\sigma \varphi, H_\sigma \hat{T}_\sigma \Psi) = \langle \hat{T}_\infty \varphi, H_\infty \hat{T}_\infty \Psi \rangle \quad (51)$$

H_∞ n'est pas borné inférieurement. Le transport $U(f) V(g) \hat{T}_\sigma$ de la représentation de Fock des relations de commutation (RC) converge faiblement comme (51) pour $\sigma \rightarrow \infty$ et $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et donne dans \mathfrak{H} une représentation des RC, qui est unitairement inéquivalente à une somme directe de représentations de Fock.

Pour S=4 l'interaction super-renormalisable Φ_5^3 devient doublement inaccessible : on ne peut plus trouver [16] des contretermes symétriques, $R_\sigma \subset R_\sigma^*$, d'ordre ≥ 2 en g , tel que pour une transformation de dressing T_σ inversible les limites suivantes existent en chaque ordre de g pour $\varphi, \Psi \in \mathfrak{U}^0$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (T_\sigma \varphi, T_\sigma \Psi) \quad (52)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (T_\sigma \varphi, (H_0 + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma \Psi)$$

$$\text{avec } ||(H_0 + V_\sigma + R_\sigma) T_\sigma \varphi|| \leq C(\varphi) < \infty .$$

Mais, même si l'on admettait des renormalisations non-symétriques qui ne sont plus de la forme des contre-terms pour les fonctions de Green, les restrictions imposées à la troncation pour convergence et pour compensation ne sont plus compatibles. Dans la renormalisation des hamiltoniens, la limite formelle coïncide donc avec celle de la sommabilité rigoureuse.

J'aimerais terminer cet exposé avec deux exercices :

(1) La densité d'interaction

$$:\Psi_0^*(x) \Psi_0(x) : \Phi_0(x) \quad (53)$$

est formellement renormalisable au sens du théorème 7, si $S=2$ et si $\Psi_0(x)$ est

un champ de Dirac libre. Trouver une transformation de dressing convergente.

(2) Trouver une description mathématiquement abordable pour une dynamique quantique relativiste non-hamiltonienne (c.a.c. pour tous les modèles physiques comme

ϕ_4^4 , $(\bar{\Psi}\Psi\phi)_4$).

L I T E R A T U R E

- [1] O. E. Lanford .- R.C.P. n° 25, Strasbourg, 1968
- [2] J. Glimm, A. Jaffe .- Phys. Rev. 176 , 1945 (68)
- [3] A. Galindo .- Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 48, 1128 (62)
- [4] K. Osterwalder .- Thèse, ETH, Zürich, 1969
- [5] E. Nelson .- Dans "Mathematical Theory of Elementary Particles", MIT 1965
- [6] J. Glimm .- Comm. Math. Phys. 8 , 12 (68)
- [7] L. Rosen .- Preprint, NYU, 1969
- [8] R. Hagg, D. Kastler .- J. Math. Phys. 5 , 848 (64)
- [9] H. F. Trotter .- Proc. Am. Math. Soc. 10 , 545 (59)
- [10] I. E. Segal .- Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 57 , 1178 (67)
- [11] T. Kato .- "Perturbation Theory for Linear Operators", Springer, Berlin 1966
- [12] J. Glimm, A. Jaffe .- Comm. Pure Appl. Math. 22 , 401 (69)
- [13] A. Jaffe .- Thèse, Princeton, 1965
- [14] M. Kac .- "Probability and Related Topics in Physical Sciences", N.Y. , Interscience, 1959
- [15] N. N. Bogoljubov, et
D. V. Shirkov .- "Introduction to the Theory of Quantized Fields", N. Y. , Intersciences, 1959
- [16] K. Hepp .- "Théorie de la Renormalisation", Springer, Berlin, 1969
- [17] J. Glimm .- Comm. Math. Phys. 10 , 1 (69)