Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

Jacques Bros

Une généralisation du théorème de la transformée de Laplace et ses applications aux problèmes du type « Edge of the Edge » et à l'étude des hyperfonctions

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1972, tome 14
« Conférences de J. Bros, P. Schapira et W. Thirring et un texte de R. Gérard et A.H.M. Levelt », , exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1972__14__A1_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UNE GENERALISATION DU THEOREME DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE ET SES APPLICATIONS AUX PROBLEMES DU TYPE "EDGE OF THE WEDGE" ET A L'ETUDE DES HYPERFONCTIONS

Jacques Bros
CERN - Genève

INTRODUCTION

Soit $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n_\xi$ qui associe à $f(\xi)$ $\left(\xi = (\xi_1, \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n_\xi\right)$

sa transformée

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-i\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i} f(\xi)\, d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$$

$\left(x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n_x\right)$;

et considérons l'espace $\mathbb{C}^n$ des variables $p_i = \xi_i + i\eta_i$ $(1 \leq i \leq n)$, complexifié de $\mathbb{R}^n_\xi$. La transformation de Fourier-Laplace met en correspondance biunivoque les classes de fonctions qui sont analytiques dans les tubes T_B de base B:

$$\left(T_B = \left\{ p = (p_1, \dots p_n) \in \mathbb{C}^n ;\ \eta = \operatorname{Im} p \in B \right\} \right)$$
$$B \text{ ouvert dans } \mathbb{R}^n_\eta$$

et suffisamment régulières à l'infini, avec des classes de fonctions des variables x possédant des bornes exponentielles appropriées. Intéressons-nous seulement au cas où B est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la fermeture contient l'origine. Alors, si on associe à B son ensemble polaire $\tilde{B}$ dans l'espace des variables x

$$\tilde{B} = \left\{ x ;\ x \cdot \eta + 1 \geqslant 0 \ ;\ \forall \eta \in B \right\}$$
$$\left(x \cdot \eta = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i \right)$$

on a la propriété d'équivalence suivante: si $f(p)$ est C^{∞} dans la fermeture de $\overline{\mathcal{T}}_B$ et analytique dans $\mathcal{T}_B$ (et suffisamment décroissante à l'infini), alors la transformée de Fourier de la restriction (valeur au bord, éventuellement) $f(\xi)$ de f à $\mathbb{R}^n_\xi$ est une fonction $\tilde{f}(x)$ satisfaisant dans $\mathbb{R}^n_x$ à des bornes du type suivant:

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant \frac{C_N}{1+|x|^N} \, e^{-\frac{|x|}{\tau(u)}} \quad , \forall N \text{ entier} > 0$$

où nous avons posé $x = |x| u$,

$$u \in S^{n-1}$$

et où $|x| = \tau(u)$ désigne l'équation de la frontière de $\tilde{B}$. ($\tilde{B}$ est un convexe fermé contenant l'origine de $\mathbb{R}^n_x$.)

Nous dirons que $\tilde{B}$ est le "support essentiel" de $\tilde{f}(x)$.

Cas particulier

Si B est un cône de sommet à l'origine, il en est de même pour $\tilde{B}$ et le "support essentiel" devient un support strict, puisque $\tau(u) = 0, \quad \forall u \notin \tilde{B}$.

Réciproquement si $\tilde{f}(x)$ admet le convexe $\tilde{B}$ pour support essentiel, sa transformée de Fourier inverse $f(\xi)$ est la restriction (ou la valeur au bord) d'une fonction anatique dans le tube $\mathcal{T}_{B^c}$ dont la base est l'intérieur du polaire $\tilde{\tilde{B}}$ de $\tilde{B}$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe B^c de B. Cette méthode fournit ainsi en particulier une démonstration *) du théorème suivant lequel l'enveloppe d'holomorphie d'un tube $\mathcal{T}_B$ est le tube convexe $\mathcal{T}_{B^c}$. Elle permet aussi de résoudre simplement tous les problèmes de "valeurs au bord sur les réels" de fonctions analytiques dans des tubes, en les ramenant à des problèmes de découpage de "supports essentiels", pour les transformées de Fourier. Notons bien cependant que cela n'est possible que si les conditions imposées aux valeurs au bord sont non localisées, c'est-à-dire données sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

---

*) Tout au moins sous la présente forme pour une classe de fonctions suffisamment régulières à l'infini.

Exemples:

a) à une variable:

Toute distribution tempérée T_ξ s'écrit $T_\xi = T_\xi^+ - T_\xi^-$ où $T_\xi^\pm$ sont valeurs au bord de fonctions $T^\pm(p)$ respectivement analytiques dans les demi-plans $\eta > 0$, $\eta < 0$.

Cette décomposition revient à faire pour $\widetilde{T}_x$ le découpage en $\widetilde{T}_x^\pm$ à supports dans les demi-axes $x \geq 0$, $x \leq 0$.

b) à plusieurs variables : théorème de l' "edge of the wedge" sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $f_1(\xi)$ = valeur au bord de $f_1(p)$, dans T_{B_1} et soit $f_2(\xi)$ = valeur au bord de $f_2(p)$, dans T_{B_2}, et supposons que $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors support de $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2 \subset \widetilde{B}_1 \cap \widetilde{B}_2$, ce qui implique que $f_1 = f_2$ = valeur au bord de $f(p)$ analytique dans $(T_{B_1} \cup T_{B_2})^c$.

On se propose ici de généraliser cette méthode pour l'étude des problèmes de valeurs au bord dans lesquels les conditions sont localisées dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. La méthode que nous proposerons permettra aussi d'étudier de façon relativement élémentaire les hyperfonctions, et en particulier de donner une représentation explicite de caractère géométrique de leur structure locale. Cette représentation sera faite dans notre deuxième exposé, la première séance étant réservée principalement à l'exposition de la méthode utilisée et à la résolution des problèmes du type "edge of the wedge" dans le cas de valeurs au bord C^∞. Notre contribution peut être décrite de la façon suivante.

1) Une classe de domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, contenant les tubes comme cas limites est introduite; ces domaines seront appelés "tubes locaux", notés $T_{B\widetilde{\phi}}$ et caractérisés par la donnée de deux éléments: un ouvert B de $\mathbb{R}^n$ jouant un rôle analogue à la base d'un tube ordinaire et une fonction analytique $\widetilde{\phi}$ dite "localisante" dans un ouvert $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^n$ d'équation $0 \leq \widetilde{\phi}(\xi) < 1$: $\widetilde{\Omega}$ est en fait l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ appartenant au tube local $T_{B\widetilde{\phi}}$ ou à sa frontière; dans ce dernier cas $T_{B\widetilde{\phi}}$ sera tout à fait adapté à l'étude des problèmes de valeurs au bord localisées dans l'ouvert Ω.

2) En vue de définir une transformation de Fourier généralisée pour l'étude des classes de fonctions analytiques dans des tubes locaux $T_{B\emptyset}$, nous donnons une formulation générale de la formule de Parseval pour des distributions concentrées sur une variété $\mathcal{V}$ de classe C^{α}, de dimension n, plongée dans un espace $\mathbb{R}^{n+p}$. Le résultat de cette étude est l'expression du produit scalaire de deux éléments en dualité f, g définis sur $\mathcal{V}$ au moyen de l'intégrale d'une forme différentielle fermée *) $W(f,g)$; cette intégrale est prise sur une surface $\Sigma^{(n)}$ appartenant à une classe appropriée dans l'espace $\mathbb{R}^{n+p}$ des variables $x_1,\ldots,x_{n+p}$ conjuguées par Fourier de $\xi_1,\ldots \xi_{n+p}$, soit:

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Sigma^{(n)}} [\widetilde{W}(f,g)](x_1\cdots x_{n+p})$$

3) Généralisation du théorème de la transformée de Laplace. Utilisant ces résultats, nous pouvons maintenant définir une transformation $\mathcal{F}_{\Phi}$ qui, à toute fonction (ou distribution) $f(\xi)$ de support compact sur $\mathbb{R}^n$ (convenable par rapport à la fonction Φ), associe une forme différentielle $W_f(x,x_0,p)$, de degré n dans les variables (x,x_0), dont les propriétés sont les suivantes:

a) les coefficients $W_f^{(k)}(x,x_0,p)$ de W_f $(k=0,1,\ldots n)$ sont des fonctions entières de x, x_0 et analytiques de p;

b) pour x, x_0 réels, ces coefficients sont à croissance lente ou à décroissance rapide en $|x|$, suivant que f est une distribution ou une fonction C^{∞}; cette borne est uniforme par rapport à x_0 dans le demi-espace $x_0 \geq 0$.

c) $W_f^{(o)}$ est indépendant des variables p, et l'on a:

$$W_f^{(0)}(x, x_0=0) = \tilde{f}(x),$$

transformée de Fourier de $f(\xi)$;

d) la forme différentielle:

$$e^{i p\cdot x + \Phi(p) x_0} \cdot W_f(x, x_0, p)$$

---

*) de degré n.

est <u>fermée</u> et l'on a:

$$f(\xi) = \int_{\Sigma} W_f(x, x_0, \xi)\, e^{i\xi \cdot x + \widetilde{\Phi}(\xi) x_0} \tag{1}$$

pour toute une classe d'hypersurfaces Σ rendant l'intégrale (1) convergente. En particulier, on peut toujours prendre pour Σ l'hyperplan $x_0 = 0$, et la formule (1) se réduit alors à la formule d'inversion de Fourier *).

La latitude avec laquelle on peut déplacer l'hypersurface Σ dans (1) dépend des propriétés d'analyticité locales de $f(\xi)$, considérée comme valeur au bord (ou restriction suivant les cas) d'une fonction $\tilde{f}(p = \xi + i\eta)$, définie au voisinage de l'ouvert Ω.

Plus précisément, on peut montrer ici un théorème d'équivalence qui généralise le théorème de la transformée de Laplace.

Il y a équivalence entre la propriété que $f(\xi)$ soit valeur au bord d'une fonction analytique $\hat{f}(p = \xi + i\eta)$ dans un tube local $T_{B\emptyset}$ et le fait que la forme différentielle $W_f(x, x_0, p)$ qui lui est associée par $\mathcal{F}_\Phi$ ait tous ses coefficients bornés par e^{-x_0} à l'extérieur d'un cône convexe S_B du demi-espace $\{(x, x_0)\,;\ x_0 \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$

Nous dirons que S_B est le <u>support essentiel</u> de la forme W_f associée à f. Un énoncé précis du théorème d'équivalence sera d'abord fourni dans le cas où $f(\xi)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et où $\hat{f}(p = \xi + i\eta)$ est C^∞ dans la fermeture de $T_{B\emptyset}$, puis dans le cas où cette valeur au bord est une distribution prolongeable sur $\mathbb{R}^n$.

4) <u>Représentation intégrale des fonctions analytiques dans des tubes locaux</u> : Le théorème d'équivalence que nous venons de mentionner va permettre tout d'abord de donner une condition géométrique pour qu'un tube local $T_{B\emptyset}$ soit un domaine d'holomorphie (comme pour les tubes, elle s'exprime par la convexité de l'ouvert B de $\mathbb{R}^n$). De plus

---

*) Eventuellement, la formule (1) devra être considérée au sens des distributions, en ξ.

la transformation $\mathcal{F}_{\emptyset}$ fournit très simplement une représentation du type Cauchy-Fantappié pour les fonctions qui sont analytiques dans $T_{B\emptyset}$ et régulières sur sa frontière (cette représentation utilise un ensemble d'hypersurfaces analytiques tangentes à $T_{B\emptyset}$).

5) Problèmes du type "edge of the wedge" : le théorème de l'edge of the wedge (local) s'obtient immédiatement par la considération des supports essentiels des formes W_f associées. Et l'on retrouvera, de meme, le théorème généralisé de l'"edge of the wedge" *) avec une spécification précise des domaines d'holomorphie :

Théorème: Si m fonctions $f_i(p)$ $(1 \leq i \leq m)$ sont respectivement analytiques dans des tubes locaux $T_{B_i\emptyset}$, si leurs valeurs au bord (supposées ici C^∞) satisfont sur tout l'ouvert Ω, la relation

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(\xi) = 0 ,$$

alors il existe un ensemble de fonctions $f_{ij}(p)$ $(1 \leq i,j \leq m)$ telles que:

i) $f_{ij}(p) \equiv -f_{ji}(p)$;

ii) $f_{ij}(p)$ est analytique dans le tube local

$$T_{B_{ij}}\emptyset , \quad \text{où } B_{ij} = (B_i \cup B_j)^c .$$

iii) $\forall i$ $(1 \leq i \leq m)$, on a: $f_i(\xi) = \sum_j f_{ij}(\xi)$, relation qui prolonge analytiquement $f_i(p)$ dans le domaine

$$\bigcap_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq m}} T_{B_{ij}}\emptyset .$$

En fait, une série de résultats analogues peut être également présentée, où il apparaît qu'il y a isomorphisme entre une homologie de "découpage de supports essentiels", et une homologie de décomposition de fonctions analytiques dans des tubes locaux.

---

*) Démontré par A. Martineau par des méthodes cohomologiques.

6) <u>Représentation des hyperfonctions</u>. Pour toute fonctionnelle analytique T de support compact $K = \bar{\Omega}$ (fermeture d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, défini à l'aide d'une fonction analytique Φ, comme ci-dessus), on peut également définir sa transformée $\mathcal{F}_\phi$ qui est une forme différentielle $W_T(x,x_0,p)$ ayant des propriétés analogues à celles de W_f [voir 3)], avec simplement la modification suivante de b):

b') Pour x, x_0 réels et $x_0 \geq 0$ les coefficients de $W_T(x,x_0,p)$ admettent des bornes uniformes en x_0 du type $C_\varepsilon\, e^{\varepsilon|x|}$ valables $\forall \varepsilon > 0$ (la constante C_ε dépendant de ε). Pour x, x_0 réels, tels que $x_0 \leq 0$, ces bornes doivent être remplacées par $C_\varepsilon\, e^{\varepsilon|x| - x_0}$. Les propriétés a) et b') sont en fait caractéristiques d'une forme W_T représentant une fonctionnelle analytique de support $K = \bar{\Omega}$.

En utilisant le fait que W_T est une forme fermée on peut alors écrire une représentation concrète de la fonctionnelle T dans l'espace des variables complexes p: l'action de T sur une fonction analytique $\varphi(p)$ dans un voisinage complexe de K est donnée par une formule du type suivant:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Lambda \Theta(p)\, \varphi(p) \qquad (2)$$

où $\Theta(p)$ est une forme différentielle fermée de degré $2n-1$ dans l'espace $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ des variables $(\mathrm{Re}\, p\,,\ \mathrm{Im}\, p)$ et où le cycle d'intégration Λ est une hypersurface fermée (de dimension $2n-1$ dans $\mathbb{R}^{2n}$) entourant le compact K.

La formule (2) ne fait que généraliser la représentation très simple du cas à une variable: $\Theta(p)$ est alors de la forme $\theta(p)dp$, où $\theta(p)$ est une fonction analytique dans le plan complexe privé de l'intervalle K, et Λ est un contour fermé entourant K.

7) <u>Structure locale des hyperfonctions</u>. Si la forme W_T associée à une fonctionnelle analytique T (de support $K = \bar{\Omega}$) admet un support essentiel S_B convexe, (dans le sens qui a été décrit plus haut [voir 3)]), alors on peut écrire une formule identique à (1) avec un choix convenable de l'hypersurface Σ, soit:

$$f(p) = \int_{\Sigma} W_T(x, x_0, p)\ e^{i p\cdot x + \bar{\Phi}(p) x_0} \qquad (3)$$

Cette formule définit $f(p)$ comme une fonction analytique dans le tube local $T_{B\emptyset}$ correspondant à S_B, mais la fonction $f(p)$ a maintenant un comportement quelconque au voisinage de la frontière de $T_{B\emptyset}$.

La réciproque est possible, en utilisant une construction explicite de l'hyperfonction associée à une fonction analytique f dans un tube local $T_{B\emptyset}$: on peut, en effet, par une intégrale de contour, associer à f une classe de fonctionnelles analytiques T de support $\bar{\Omega}$ qui coincident entre elles, modulo des fonctionnelles analytiques "δT" de support $\partial\Omega$ *). Un raisonnement analogue à celui qui sert à la démonstration du théorème d'équivalence dans le cas de valeurs au bord C^{∞} permet de montrer que toutes les fonctionnelles T ainsi construites ont pour support essentiel associé S_B alors que toutes les ambiguités "δT" ont un support essentiel vide (c'est-à-dire que la forme $W_{\delta T}$ est bornée, $\forall\ \varepsilon > 0$ par $e^{\varepsilon |x| - x_0}$ dans toute la région $x_0 \geq 0$).

Les théorèmes du type "edge of the wedge" se transposent alors immédiatement au cas de valeurs au bord prises au sens des "hyperfonctions". D'une façon générale la structure locale d'une hyperfonction de support K (ou de la restriction à K d'une hyperfonction définie sur un ouvert plus grand) sera décrite par son support essentiel, ou encore (puisque c'est un cône) par la trace de ce support sur la demi-sphère

$$(S^n)^+ = S^n \cap \{x_0 \geq 0\}$$

de l'espace (x, x_0). En décomposant ce support en un nombre minimum de cônes convexes, on fera apparaître l'hyperfonction T comme une somme de "valeurs au bord" (au sens des hyperfonctions) de fonctions

---

*) C'est-à-dire une hyperfonction dans l'ouvert Ω (cf., Schapira, Théorie des hyperfonctions).

analytiques dans ℓ tubes locaux $T_{B_i\Phi}$. Si l'hyperfonction n'a aucune propriété locale particulière, une telle décomposition pourra toujours être effectuée au moyen d'un recouvrement convenable de la demi-sphère $(S^n)^+$, mais l'on trouvera alors nécessairement un nombre ℓ de fonctions analytiques supérieur ou égal à $n+1$.

8) Généralisations possibles. Nous ne faisons qu'indiquer ici les possibilités plus larges ouvertes par le formalisme exposé dans 2). On pourrait en fait définir des tubes locaux plus généraux dépendant de plusieurs fonctions Φ_i, ou, ce qui est une autre manière de voir, des tubes locaux sur des variétés plongées. Tous ces domaines peuvent en fin de compte être considérés comme des intersections de tubes dans un espace ambiant à un nombre suffisant de dimensions, par une variété analytique dont la situation géométrique doit satisfaire à certaines conditions par rapport au tube donné. Dans ce cadre un peu plus général, la représentation au moyen de la transformation $\mathcal{F}_\phi$ de propriétés du type "edge of the wedge" sur une variété analytique ne présente aucune difficulté nouvelle, de même que la représentation concrète des hyperfonctions et l'étude de leur structure locale.

Pour une rédaction détaillée des propriétés exposées dans les paragraphes 1), 3) et 5), ou pourra se reporter à l'article *) écrit en collaboration avec D. Iagolnitzer : "Causality and local analyticity : Mathematical Study".

---

*) Prétirage Saclay et Compte-Rendus du Colloque sur la Renormalisation Marseille, juin 1971.