R. Gérard

A. Sec

Feuilletages de Painlevé

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1971, tome 12
« Conférences de H. Brézis, D. Ruelle et F. Takens et un texte de R. Gérard et Mme A. Sec », , exp. nº 3, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1971__12__A3_0>

FEUILLETAGES DE PAINLEVE

par

R. GERARD et A. SEC

PLAN

INTRODUCTION

L'objet de notre étude est double : expression géométrique des théorèmes fondamentaux de Painlevé et généralisation de ces théorèmes.

A la lecture de l'oeuvre de Painlevé qui concerne les équations différentielles et les systèmes différentiels, notamment celle des "Leçons de Stockholm" ([1]), on est amené à faire quelques remarques très simples. Une des plus importantes est la suivante : en plus du point de vue de Cauchy qui est un point de vue local (existence et unicité d'une solution d'un système différentiel au voisinage d'un point), on voit apparaître un souci d'ordre global, celui d'étudier la solution générale d'un système différentiel "lorsque x s'éloigne de x_o pour varier d'une façon quelconque dans son plan" ([1] Int.). Des réponses à ce problème global sont les théorèmes fondamentaux de Painlevé concernant les équations différentielles du 1er et du 2^{e} ordre [1. p. 21 et 413) et concernant les systèmes différentiels ([1] p. 425).

Ces théorèmes peuvent être interprétés géométriquement de la façon suivante. Considérons par exemple l'équation de Pfaff $\omega = Q(x, y)\, dy - P(x, y)\, dx = o$ où P et Q sont deux polynômes en y, premiers entre eux, à coefficients holomorphes en x et où Q n'est pas identiquement nul. Prolongeons l'équation $\omega = 0$ en $\widetilde{\omega} = 0$ à $\mathbb{C}(x) \times P_1(\mathbb{C})(y)$. Le théorème I de Painlevé ([1], Int. p. 8) assure que les singularités mobiles des solutions $y(x)$ de $\widetilde{\omega} = 0$ sont algébriques et que toute solution se prolonge analytiquement le long de tout chemin qui ne rencontre aucun des points singuliers fixes (points ξ : [1] p. 22).

D'abord, on remarque que l'ensemble $\boxed{H}$ des points ξ est la réunion de deux sous-ensembles de points isolés de $\mathbb{C}$, à savoir :

i) les projections des points singuliers de $\widetilde{\omega} = 0$

ii) les points $\bar{x}$ tels que la droite d'équation $x = \bar{x}$ soit une variété intégrale de $\widetilde{\omega} = 0$.

Puis, on considère le feuilletage $\mathcal{F}$ défini dans $(\mathbb{C} - \boxed{H}) \times P_1(\mathbb{C})$ par l'équation $\widetilde{\omega} = 0$. Les points singuliers mobiles des solutions sont les points $\bar{x}$ de $\mathbb{C} - \boxed{H}$ tels que le graphe d'une solution soit une feuille de $\mathcal{F}$ " tangente à la droite d'équation $x = \bar{x}$ ".

Enfin, et surtout, si π est la projection $(x, y) \mapsto x$, la deuxième partie du théorème I exprime le fait que tout chemin dans $\mathbb{C} - \boxed{H}$ est relevable dans toute feuille de $\mathcal{F}$ en un point de cette feuille.

Des interprétations géométriques similaires peuvent être données pour les autres théorèmes de Painlevé. D'où l'intérêt d'en rechercher une généralisation, sous forme géométrique.

Les diverses situations décrites par Painlevé peuvent être considérées comme cas particuliers de la situation suivante : au lieu de nous donner une équation différentielle ou un système différentiel, donnons-nous un feuilletage $\mathcal{F}$ analytique complexe dans une variété analytique complexe E, munie d'une projection π sur une variété B , telle que $\mathcal{F}$ soit simple pour π (déf. p. 4). Puisque cette notion de feuilletage simple généralise celle du feuilletage transverse, on est amené de façon naturelle, comme Painlevé, à se poser le problème de relèvement des chemins dans les feuilles d'un feuilletage simple.

Les principales réponses à ce problème sont consignées dans le théorème local (p. 13), le théorème 1 (p. 16), le théorème 2 (p. 19), la proposition 1 (p. 17) ; dans ces théorèmes, le feuilletage $\mathcal{F}$ est supposé de dimension égale à celle de B et il est simple pour π ; les démonstrations sont données dans le cas où (E, π , B) est une fibration analytique localement triviale, mais les résultats sont valables dans le cas, plus large, où E est "localement un produit" sur B par π (p. 15).

Le théorème 1 suppose la fibre de (E, π , B) compacte. Il assure le relèvement des chemins. Réuni au théorème local, il constitue une généralisation du théorème I de Painlevé dont il a été question plus haut.

Le théorème 2 suppose encore la fibre de (E, π , B) compacte, mais il ne suppose pas le feuilletage défini dans toute la variété E : on admet un ensemble S de points où $\mathcal{F}$ n'est pas défini pourvu que S soit un sous-ensemble analytique de E et que S ne rencontre chaque fibre de (E, π , B) qu'en des points isolés. Le théorème 2 assure le relèvement des chemins dans l'adhérence des feuilles. Il constitue une généralisation du théorème de Painlevé concernant les systèmes différentiels dans le cas II' (p. 25).

La proposition 1, valable dans les mêmes hypothèses que le théorème 1, montre comment varie le nombre de relèvements d'un chemin fixé quand on fait varier la feuille dans laquelle on relève c'est-à-dire l'origine du relèvement (projection fixe). Elle constitue une généralisation du théorème II de Painlevé ([1] int. p. 8 et p. 40) : étude de la solution considérée comme fonction des conditions initiales.

Dans le texte, tous ces théorèmes sont énoncés à l'aide des vocables de feuilletages de Painlevé de 1ère espèce et de 2ème espèce que nous définissons dans I

Les résultats obtenus comportent de très nombreuses applications. Nous en donnons quelques-unes

Nous montrons comment on retrouve les résultats de Painlevé comme corollaires de nos théorèmes. Le théorème 1, le théorème local et la proposition 1 permettent de retrouver tous les résultats relatifs au 1er ordre ainsi que les résultats relatifs au 2ème ordre dans le cas I' (p. 25). Le théorème 2 s'applique aussi au 1er ordre pour distinguer les points singuliers transcendants des points singuliers essentiels ; il s'applique aux systèmes différentiels du 2ème ordre (cas II' p. 25) et aux équations différentielles du 2ème ordre.

Nous montrons ensuite comment on peut démontrer des théorèmes, analogues à ceux de Painlevé, pour les équations de Pfaff complètement intégrables :
$\omega = Q(x, y)\, dy + \sum_{1}^{n} A_i (x, y)\, dx_i = 0$ où Q et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des polynômes en y à coefficients holomorphes en x.

Il est clair qu'on pourra encore démontrer des théorèmes analogues à ceux de Painlevé pour les systèmes de Pfaff complètement intégrables.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [5] .

I - DEFINITIONS ET EXEMPLES

1. FEUILLETAGES SIMPLES

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie.

On se donne une projection π de E sur B (application continue surjective) et un feuilletage défini dans E.

Définition 1 : On dira qu'un feuilletage défini dans E est simple pour la projection π de E sur B si, en tout point m de E, il existe un voisinage distingué ([2]) de m dans lequel la plaque de m rencontre $\pi^{-1}(\pi(m))$ au point isolé m.

Si, en particulier $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira aussi bien que le feuilletage est simple pour π ou qu'il est simple pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Exemple 1.

Tout feuilletage transverse à une fibration de E est simple pour cette fibration.

Exemple 2.

Si (E, π, B) est un revêtement de B, tout feuilletage de E est simple pour cette fibration.

Exemple 3.

Soit (1) $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ une équation de Pfaff dans $\mathbb{C}^2$ dont les coefficients P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Soit S l'ensemble des points singuliers de ω. Alors, si l'équation (1) n'admet pas de variété intégrale $x = cte$, elle définit dans $\mathbb{C}^2 - \pi^{-1}(\pi(S))$ un feuilletage simple pour la fibration triviale $(\mathbb{C}^2 - \pi^{-1}(\pi(S)), \pi, \mathbb{C}(x) - \pi(S))$, où π est la projection canonique de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}(x)$.

Un exemple analogue est donné par une forme de Pfaff complètement intégrable sur $\mathbb{C}^n$.

2. FEUILLETAGES DE PAINLEVE DE 1ère ESPECE

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B, $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans E et ayant une dimension égale à celle de B.

Un chemin dans B (resp. dans E) est un couple (ℓ, I) constitué par un segment I de R (fermé ou semi-ouvert) et une application ℓ continue de I dans B (resp. dans E).

DEFINITION 1.

Soient (ℓ , $[0,1]$) un chemin dans B et m un point de $\pi^{-1}(\ell(0))$.

On dira que (ℓ, $[0,1]$) est relevable en m dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par m s'il existe dans E un chemin ($\hat{\ell}$, $[0,1]$) d'origine m, tel que $\pi \circ \hat{\ell} = \ell$ et tel que $\hat{\ell}([0,1])$ soit contenu dans la feuille de m.

Le chemin ($\hat{\ell}$, $[0,1]$) est appelé un relèvement en m de (ℓ, $[0,1]$) dans la feuille de m.

DEFINITION 2.

On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour π si tout chemin (ℓ , $[0,1]$) dans B est relevable en tout point m de $\pi^{-1}(\ell(0))$ dans la feuille de m.

Conséquence.

La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective.

Exemple 1. Tout feuilletage transverse à une fibration à fibre compacte est un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour cette fibration et chaque feuille est un revêtement de la base. Ceci permet de retrouver géométriquement un résultat bien connu concernant l'équation de Riccati :

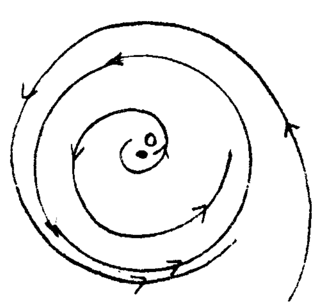
$$dy - (a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x))\, dx = 0$$

où a, b, c sont holomorphes sur C.

Cette équation définit un feuilletage de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}(x)$ transverse à la projection sur le deuxième facteur, ce qui implique l'uniformité des solutions de l'équation considérée.

Exemple 2.

L'équation différentielle $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho\,(1-\rho^2)$ (où ρ et θ sont les coordonnées polaires d'un point du plan) définit un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{R}^2 - [(0, 0)]$ sur le cercle $\rho = 1$.



Exemple 3.

L'équation différentielle $2ydy-dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage de Painlevé de $1^{\text{ère}}$ espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ (x).

(Ce feuilletage n'est pas transverse à la fibration).

Contre-exemple 1.

L'équation différentielle $dy-P(x, y)\, dx = 0$, où P est un polynôme de degré supérieur à 1, définit un feuilletage de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ (x) car les feuilles admettent des asymptotes $x = $ cte.

Contre-exemple 2.

L'équation $dx = 0$ définit un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ qui n'est pas un feuilletage de Painlevé de $1^{\text{ère}}$ espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ (x) : seuls, les chemins dont l'image est réduite à un point sont relevables dans les feuilles.

Mais ce feuilletage est un feuilletage de Painlevé de $1^{\text{ère}}$ espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ (y).

Ce contre-exemple nous amène à la remarque suivante.

Remarque.

De manière plus générale, on pourrait appeler feuilletage de Painlevé de $1^{\text{ère}}$ espèce dans une variété topologique E tout feuilletage $\mathcal{F}$ de E pour lequel il existe une variété topologique B et une application continue sujective π de E sur B telle que $\mathcal{F}$ soit de Painlevé de 1ère espèce pour π .

3. FEUILLETAGE DE PAINLEVE DE $2^{\text{ème}}$ ESPECE

Soient E et B deux variétés topologiques connexes de dimension finie, π une projection de E sur B, S un sous-ensemble non vide de E tel que, pour tout x de B, l'ensemble S rencontre $\pi^{-1}(x)$ en des points isolés.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini dans E-S, dont la dimension est celle de B .

DEFINITION

On dira que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de $2^{\text{ème}}$ espèce pour π si tout chemin $(\ell, [0,1])$ dans B est relevable en tout point m de $\pi^{-1}(\ell(0))$-S dans l'adhérence de la feuille de m relativement à E.

Si, en particulier, $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, on dira indifféremment que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce pour π ou un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce pour la fibration $E \xrightarrow{\pi} B$.

Conséquence de la définition.

La restriction de π à l'adhérence dans E d'une feuille est surjective.

Remarque : Soit m un point de $\pi^{-1}(\ell(0)) - S$ et soient Γ et $\bar{\Gamma}$ la feuille de m et l'adhérence de Γ relativement à E. Conformément à la définition précédente, il peut arriver que le relèvement de $(\ell,]0,1])$ en m se trouve dans $\bar{\Gamma} - \Gamma$.

Mais, si le feuilletage $\mathcal{F}$ est à la fois un feuilletage de Painlevé de 2e espèce pour π et un feuilletage simple pour π, un tel fait ne peut plus se produire, à cause du théorème local (p. 13).

Exemple 1.

L'équation différentielle $xdx + ydy = 0$ définit dans $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ (x). (tout chemin de $\mathbb{C}$ (x) est relevable dans l'adhérence dans $\mathbb{C}^2$ de la feuille d'équation $x + iy = 0$ mais il existe des chemins non relevables dans cette feuille).

Exemple 2.

L'équation de Pfaff $zdz + ydy + (z^2 + y^2)\, dx = 0$ définit dans $\mathbb{C}^3$ privé de la droite complexe d'équations $y=z=0$ un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce pour la fibration triviale de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}^2$ (z, y).

II - PROPRIETES LOCALES DES FEUILLETAGES SIMPLES

1. Données et définitions.

E, B	:	variétés analytiques complexes connexes de dimension finie,
(E, π, B)	:	fibration analytique complexe localement triviale.
n	:	dimension de B
n + p	:	dimension de E
a	:	point quelconque de E
$\mathcal{F}$	:	feuilletage analytique dans E de dimension n, simple pour (E, π, B)
Ω_a	:	voisinage ouvert distingué de a
γ_a	:	$\gamma_a = \pi^{-1}(\pi(a)) \cap \Omega_a$
$(\ell, [0,1])$	:	chemin dans B tel que $\ell(0) = \pi(a)$

DEFINITION 1

Nous dirons que deux chemins $(\ell_1, [0, \epsilon_1[)$ et $(\ell_2, [0, \epsilon_2[)$ dans une variété V définissent le même germe de chemin au point $\ell(0)$, s'il exite ϵ dans $]0, \inf\{\epsilon_1, \epsilon_2\}]$ tel que $\ell_1|[0,\epsilon[= \ell_2|[0,\epsilon[$.

DEFINITION 2

Le germe de chemin défini par $(\ell, [0,1])$ au point $\ell(o)$ est relevable en a dans la feuille de a, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le chemin $(\ell|[0, \varepsilon[, [0,\varepsilon[)$ soit relevable en a dans la feuille de a.

DEFINITION 3

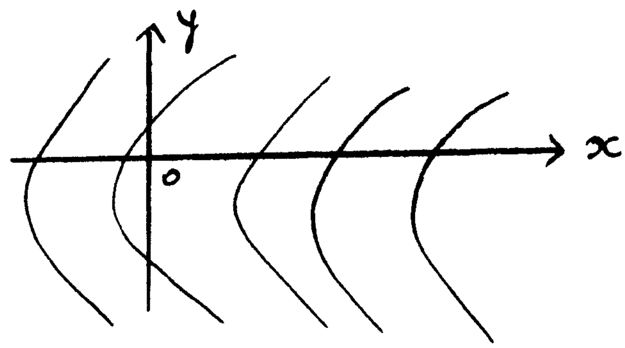
Si $(\hat{\ell}, [0, \varepsilon[)$ est un relèvement de $(\ell, [0, \varepsilon[)$, le germe défini au point a par $(\hat{\ell}, [0, \varepsilon[)$ est un relèvement en a dans la feuille de a du germe défini au point $\ell(o)$ par $(\ell, [0,1])$ (ou par $(\ell, [0,1[)$).

Le problème qui se pose est celui de l'existence de relèvements de germes de chemins dans une feuille de $\mathcal{F}$ en un point donné de cette feuille.

Pour cela, on démontre 2 lemmes fondamentaux.

Remarque 1

Nos résultats sont valables dans le domaine analytique complexe grâce aux théorèmes de Remmert (/ 3 /), mais non en général dans le domaine analytique réel, comme le montre, par exemple, le feuilletage de $\mathbb{R}^2$ représenté ci-dessous (fibration triviale de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ (x)).



Remarque 2

Nous nous sommes limités au cas où $E \xrightarrow{\pi} B$ est une fibration, de façon à rendre l'exposé plus clair. Mais les résultats obtenus sont encore valables si E est "localement un produit" sur B (p. 15) comme on le constate aisément dans les démonstrations qui suivent.

§2 Lemmes fondamentaux

Lemme 1

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour la fibration localement triviale (E, π, B) et si la dimension de $\mathcal{F}$ est égale à celle de B, il existe pour tout point a de E un voisinage ouvert distingué Ω_a de a tel que toute plaque de $\mathcal{F}$ dans Ω_a rencontre toute fibre dans Ω_a. Le nombre de points de rencontre est fini.

Démonstration

Puisque la fibration est localement triviale, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans E des polydisques $U: |x|<\alpha$ dans $\mathbb{C}^n$ et $V: |y|<\beta$ dans C^p et des isomorphismes analytiques φ_a et φ'_a tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_a & \xrightarrow{\varphi_a} & U \times V \\ \downarrow \pi|V_a & & \downarrow p \\ \pi(V_a) & \xrightarrow{\varphi'_a} & U \end{array}$$

(p est la projection canonique de U x V sur U)

On supposera $\varphi_a(a) = (0,0)$

Puisque φ_a est un isomorphisme de fibrés, le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ dans V_a se transforme par φ_a en un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ (de dimension n) dans $U \times V$, qui est simple pour la fibration triviale de $U \times V$ sur $\mathcal{U}$.

Il suffit donc de démontrer le lemme pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et de transporter le résultat dans (E, π, B) par l'isomorphisme φ_a^{-1}

Soit Ω_0 un voisinage ouvert distingué de $(0, 0)$ pour $\tilde{\mathcal{F}}$ tel que la plaque de $(0, 0)$ rencontre la fibre de $(0, 0)$ au seul point 0.

Il existe un isomorphisme analytique h_0 de Ω_0 sur le produit du polydisque $\mathcal{U}_1 : |x| < 1$ de $\mathbb{C}^n$ et du polydisque $V_1 : |y| < 1$ de $\mathbb{C}^p$ tels que :

(1) $h_0(0, 0) = (0,0)$

(2) toute plaque dans $U_1 \times V_1$ est une variété linéaire d'équation $y_1 = y_1^0$

$$\begin{array}{ccccc}
U \times V & \supset & \Omega_0 & \xrightarrow{h_0} & U_1 \times V_1 \\
\downarrow p & & \downarrow p|\Omega_0 & & \downarrow p_1 \\
U_x & & p(\Omega_0)_x & & \chi_1
\end{array}$$

Soit $\begin{cases} \chi = h(x_1, y_1) \\ y = k(x_1, y_1) \end{cases}$ l'expression de h_0^{-1}

Une plaque dans Ω_0 est l'ensemble des points (χ, y) tels que : $\begin{cases} \chi = h(x_1, y_1^0) \\ y = k(x_1, y_1^0) \end{cases}$

Puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est un feuilletage simple pour p le système : $\begin{cases} 0 = h(x_1, 0) \\ y = k(x_1, 0) \end{cases}$ admet la

seule solution $(x_1, y) = (0, 0)$

Soit G la variété analytique d'équations :

$\begin{cases} x = h(x_1, y_1) \\ y = k(x_1, y_1) \end{cases}$ dans $U \times V_1 \times U_1 \times V$,

muni de la projection canonique $\tilde{p}$ sur $U \times V_1$

Puisque le système : $\begin{cases} 0 = h(x_1, 0) \\ y = k(x_1, 0) \end{cases}$ a

pour seule solution $(x_1, y) = (0, 0)$, $\tilde{p}^{-1}(0, 0)$ rencontre $\mathcal{G}$ au seul point $(0, 0, 0, 0)$

<u>On peut donc appliquer le théorème de plongement de Remmert à</u> $\mathcal{G}$

Donc, il existe un polydisque $\mathcal{U}' \subset U$ et un polydisque $V'_1 \subset V_1$ tels que la trace de $\mathcal{G}$ sur $\tilde{p}^{-1}(U' \times V'_1)$ soit un revêtement ramifié (à k feuillets) de $U' \times V'_1$ par $\tilde{p}$.
Alors, si on pose $h_o^{-1}(U_1 \times V'_1) = \Omega'_o$, on a la propriété suivante : pour tout x de U', $p^{-1}(x)$ rencontre toute plaque dans Ω'_o.
L'intersection de Ω'_o et $p^{-1}(\mathcal{U}')$ est donc un voisinage de $(0, 0)$ qui a la propriété requise.

Lemme du relèvement local des chemins -

Soient $\mathcal{U}$ le polydisque $|x| < \alpha$ dans $\mathbb{C}^n$ et V le polydisque $|y| < \beta$ dans $\mathbb{C}^p$. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple pour la fibration triviale $U \times V \xrightarrow{P} U$ et si la dimension de $\mathcal{F}$ est égale à n, le germe de chemin défini dans U par $(\ell, [0,1])$ au point $\ell(0) = 0$ est relevable au point 0 de $p^{-1}(\ell(0))$ dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par ce point.

Démonstration -

Si la feuille de 0 est transverse à la fibre, le théorème est évident.

Sinon, on considère un voisinage ouvert distingué Ω_0 de 0 tel que la plaque P_0 de 0 rencontre la fibre de 0 au seul point 0 dans Ω_0.

Cette plaque P_0 est une variété analytique de dimension n dans Ω_0.

Nous pouvons lui appliquer le théorème de plongement de Remmert ([3] p. 276).

On en déduit qu'il existe un polydisque $\tilde{U}$: $|x_i| < \alpha_i' < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ et un polydisque $\tilde{V}$: $|y_i| < \beta_i' < \beta_i$ $(i=1,2,\dots,p)$ et un plongement $\mathcal{M}$ de P_0 dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$ tels que :

i) $\mathcal{M}$ est défini par q équations pseudopolynomiales distinguées :

$$P_i(x, y_i) = y_i^{k_i} + a_{i1}(x)\, y_i^{k_i - 1} + \dots + a_{ik_i}(x) = 0 \quad (i=1,\dots,q)$$

où les $a_{ij}(x)$ sont des fonctions holomorphes sur $\tilde{U}$ et nulles au point $x = 0$.

ii) $P_0 \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ est une composante irréductible $\mathcal{M}_\lambda$ de $\mathcal{M}$ dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$.

iii) l'ensemble $\mathcal{M}_\lambda^*$ des points de $\mathcal{M}_\lambda$ où $\mathcal{M}_\lambda$ est transverse à la fibration triviale $\tilde{U} \times \tilde{V} \xrightarrow{P} \tilde{U}$ est dense dans $\mathcal{M}_\lambda$.

Tout revient alors à montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un relèvement de $(\ell, [0, \varepsilon[)$ en 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$.

Pour cela, on se réfère à la démonstration de la proposition 2 de [3] (p. 276).

Soit W un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$ et soit m un point de $W \cap \mathcal{M}_\lambda^*$. Dans un voisinage de m dans U, $\mathcal{M}_\lambda^*$ est représenté par des équations de la forme :

$$y_1 + c_1(x) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y_p + c_p(x) = 0$$

où $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont holomorphes sur un voisinage de $p(m)$ dans $\tilde{\mathcal{U}}$. On montre dans [3] que ces fonctions se prolongent à $\tilde{\mathcal{U}}$ de façon continue (mais multiforme) et leurs prolongements sont racines des pseudopolynômes $P_i(x, y_i)$ qui définissent $\mathcal{M}$.

Puisque la restriction de p à $\mathcal{M}_\lambda$ est surjective, et d'après (ii), on a un relèvement de $(\ell, [0, \varepsilon[)$ en 0 dans $\mathcal{M}_\lambda$ qui est donné par $t \to (x, y) = (\ell(t)$,

$c(\ell(t)))$ où c a pour composantes $c_1, \dots, c_p$ (on choisit une branche quelconque pour chaque fonction multiforme).

Remarque -

La projection canonique p de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ sur $\tilde{\mathcal{U}}$ définit $P_o \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ comme revêtement ramifié de $\tilde{U}$ ayant un nombre fini k de feuillets.

Il s'ensuit que, pour tout point x de $\tilde{U}$, tout germe de chemin en x est relevable en un point quelconque de $P_o \cap \pi^{-1}(x)$ dans $P_o \cap (\tilde{U} \times \tilde{V})$ et le nombre de relèvements est inférieur ou égal à k.

§ 3 - Théorème local d'existence de relèvements dans une feuille en un point -

Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$), alors pour tout chemin $(\ell, [0,1])$ dans B et pour tout point a de $\pi^{-1}(\ell(0))$, le germe défini par $(\ell, [0,1])$ au point $\ell(0)$ est relevable en a dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a. Le nombre de relèvements est majoré par un nombre entier k ne dépendant que du point a.

Démonstration (Données page 8).

Comme dans la démonstration du lemme 1, il suffit de transporter dans (E, π, B) par l'isomorphisme φ_a^{-1} le résultat du lemme du relèvement local des chemins.

Soit donc $(\ell_1, [0, \epsilon_1[)$ un chemin dans B qui définit le même germe au point $\ell(0)$ que le chemin donné $(\ell, [0,1])$ et qui vérifie la relation $\varphi_a'(\ell([0, \epsilon_1[)) \subset \tilde{U}$.

Le germe de chemin défini dans $\tilde{U}$ par $(\varphi_a' \circ \ell, [0, \epsilon_1[)$ au point $\varphi_a'(\ell(0)) = 0$ est relevable au point $\varphi_a(a)$ dans la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ qui passe par ce point. Soit $(\hat{\ell}, [0, \epsilon[)$ un représentant de ce relèvement. Alors, le chemin $(\varphi_a^{-1} \circ \hat{\ell}, [0, \epsilon[)$ est le relèvement cherché.

§ 4 - Définition de l'indice

Si (E, π, B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour cette fibration ($\dim \mathcal{F} = \dim B$) le théorème précédent permet de définir une fonction sur E à valeurs dans $\mathbb{N}$, qu'on appellera indice du feuilletage $\mathcal{F}$ par rapport à la projection π et qu'on notera :

$$a \longmapsto \mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{F}, a)$$

Pour tout point a de E, le nombre $\mathrm{Ind}_\pi(\mathcal{F}, a)$ est égal au nombre maximum de relèvements en a dans la plaque de a des germes de chemins en $\pi(a)$ dans B

§ 5 - Théorème -

La fonction $a \longmapsto \mathrm{Ind}_{\pi}(\mathcal{F}, a)$ est localement bornée sur E.

Démonstration -

Il suffit de démontrer ce théorème pour un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini dans le produit de deux polydisques $\tilde{U} : |\tilde{x}| < 1$ de $\mathbb{C}^n$ et $\tilde{V} : |\tilde{y}| < 1$ de $\mathbb{C}^p$ et simple pour la projection canonique de $\tilde{U} \times \tilde{V}$ sur $\tilde{U}$. On peut supposer que le point a est en (o, o).

Dans le lemme 1, on a construit un voisinage ouvert Ω'_o de (o,o) tel que toute plaque dans Ω'_o rencontre toute fibre dans Ω'_o en un nombre de points fini.

On va montrer qu'il existe un entier naturel $k_o \neq o$ tel que tout germe de chemin en un point x_o de $U' = p(\Omega'_o)$ admet en tout point m de $\Omega'_o \cap p^{-1}(x_o)$ un nombre de relèvements dans la plaque de m qui est inférieur ou égal à k_o.

Pour cela, on désigne par $(\ell, [o, 1])$ un représentant du germe de chemin donné et on lui associe le chemin $(\tilde{\ell}, [o, 1])$ de $U' \times V'_1$ défini par :

$\tilde{\ell}(t) = (\ell(t), y_1^o)$ $(y_1^o \in V'_1)$ $(\ell(o) = x^o, m = (x^o, y^o))$.

D'après le lemme du relèvement local des chemins, on peut assurer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le chemin $(\tilde{\ell}, (0, \varepsilon[)$ admette en (x^o, y_1^o, X_1^o, y^o) dans $\mathcal{G} \cap (\tilde{p}^{-1}(U' \times V'_1))$ un nombre de relèvements inférieur ou égal à k_o. $(X_1^o = p_1(h_o(m)))$

Chacun de ces relèvements définit un relèvement dans la plaque du point (x^o, y^o). En effet, si un tel relèvement s'écrit $(\ell(t), y_1^o, \ell_1(t), \lambda(t))$ il

vérifie les relations $\begin{cases} x = k(x_1, y_1^o) \\ y = k(x_1, y_1^o) \end{cases}$ qui

sont les équations de la plaque du point $(x^o, y^o) = m$

Remarque importante -

Tous nos résultats sont encore valables dans le cas plus général suivant : l'application π de E sur B est analytique surjective et telle qu'à tout point m de E, il correspond :

(1) un voisinage V_m de m dans E

(2) des polydisques U et V dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ respectivement

(3) des isomorphismes analytiques φ_m et φ'_m tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} V_m \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, "\pi | V_m"] & U \times V \arrow[d, "p"] \\ \pi(V_m) \arrow[r, "\varphi'_m"] & U \end{tikzcd}$$

(p étant la projection canonique de U X V sur U)

On dira dans ce cas que E est "localement un produit" sur B par π.

III. FEUILLETAGES SIMPLES ET FEUILLETAGES DE PAINLEVE DE 1ère ESPECE.

1. RELEVEMENTS DE CHEMINS DANS UNE FEUILLE DONNEE.

Les données sont les mêmes qu'au II, avec, en plus, l'hypothèse que la fibre de (E, π , B est compacte.

Nous étudions la possibilité de relever en a dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par a le chemin (ℓ, $[0,1]$).

Nous obtenons une propriété globale, pour une feuille quelconque de $\mathcal{F}$.

THEOREME 1.

Si (E, π , B) est une fibration analytique complexe localement triviale et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage analytique simple pour cette fibration (dim $\mathcal{F}$ = dimB) et, de plus, la fibre de (E, π, B) est compacte, $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour (E, π , B).

Conséquence

La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective.

Remarque

Le théorème 1 est encore vrai si $E \xrightarrow{\pi} B$ est localement un produit sur B et si π est une application propre.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

1° Le lemme fondamental 1 et la compacité des fibres permettent de montrer que, si (ℓ , $[0,\varepsilon]$) ($\varepsilon < 1$) est un chemin dans B tel que (ℓ , $[0,\varepsilon[$) soit relevable en a dans la feuille de a, alors le chemin (ℓ , $[0,\varepsilon]$) est aussi relevable en a dans la feuille de a .

En effet, soit ($\hat{\ell}$, $[0,\varepsilon[$) un relèvement de (ℓ, $[0,\varepsilon[$).
Si $\mathcal{V}_\varepsilon$ est un voisinage compact assez petit de $\ell(\varepsilon)$ dans B il est clair que $\pi^{-1}(\mathcal{V}_\varepsilon)$ est compact. Donc, pour toute suite infinie croissante (t_n) de points de $[0,\varepsilon[$ convergeant vers ε , il existe une suite extraite (t_{n_k}) telle que la suite $\hat{\ell}(t_{n_k})$ converge vers un point b de $\pi^{-1}(\ell(\varepsilon))$.
D'après le lemme fondamental 1, il existe un voisinage distingué Ω de b tel que toute plaque dans Ω rencontre π^{-1} ($\ell(\varepsilon)$).

Or b appartient à $\overline{\hat{\ell}([0,\varepsilon[)} - \hat{\ell}([0,\varepsilon[)$, donc Ω rencontre $\hat{\ell}([0,\varepsilon[)$ en un point m. Puisque la plaque de m dans Ω rencontre π^{-1} ($\ell(\varepsilon)$) , le relèvement de (ℓ, $[0,\varepsilon]$) est assuré par prolongement de ($\hat{\ell}[0,\varepsilon[$).

2° La démonstration se termine par un raisonnement par l'absurde.

Supposons que l'on ait pu, de proche en proche, relever les restrictions de ℓ à $[0,\varepsilon_1]$, $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$, ..., $[\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}]$, ... où (ε_n) est une suite croissante dans $[0,1]$.

Supposons que la borne supérieure de (ε_n) soit un nombre ε différent de 1.

D'après le théorème local d'existence (II § 3), il est encore possible de relever le germe défini par $(\ell, [0,1])$ au point $\ell(\varepsilon)$.

D'où, il existe $\alpha > 0$ tel que la restriction de ℓ à $[0, \varepsilon + \alpha[$ soit relevable en a dans la feuille de a.

Ceci est contraire à l'hypothèse. D'où, $\varepsilon = 1$.

2. RELEVEMENT DES CHEMINS DANS LES FEUILLES VOISINES D'UNE FEUILLE DONNEE.

Les données sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

On suppose que le chemin $(\ell, [0,1])$ est fixé et que le point a varie dans $\pi^{-1}(\ell(o))$

On étudie comment varie le nombre de relèvement de $(\ell, [0,1])$ en a dans la feuille de a

PROPOSITION :

Pour tout relèvement $(\hat{\ell}, [0,1])$ de $(\ell, [0,1])$ dans une feuille de $\mathcal{F}$, il existe un entier naturel k non nul et un voisinage V de $\hat{\ell}(o)$ dans $\pi^{-1}(\ell(o))$ tels que, pour tout point m de V, les relèvements au point m de $(\ell, [0,1])$ dans la feuille de m sont en nombre inférieur ou égal à k et ont leurs extrémités dans un voisinage de $\hat{\ell}(1)$ dans $\pi^{-1}(\ell(1))$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres α de $[0,1]$ pour lesquels il existe :

(1) un entier naturel $k_\alpha \neq 0$

(2) un recouvrement fini de $\hat{\ell}([0,\alpha])$ par une chaîne de voisinages ouverts distingués $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ tels que, pour tout point m de $\Omega_1 \cap \pi^{-1}(\ell(o))$ le nombre de relèvements de $(\ell, [0,\alpha])$ au point m dans la feuille de m qui sont contenus dans $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ est inférieur ou égal à k_α.

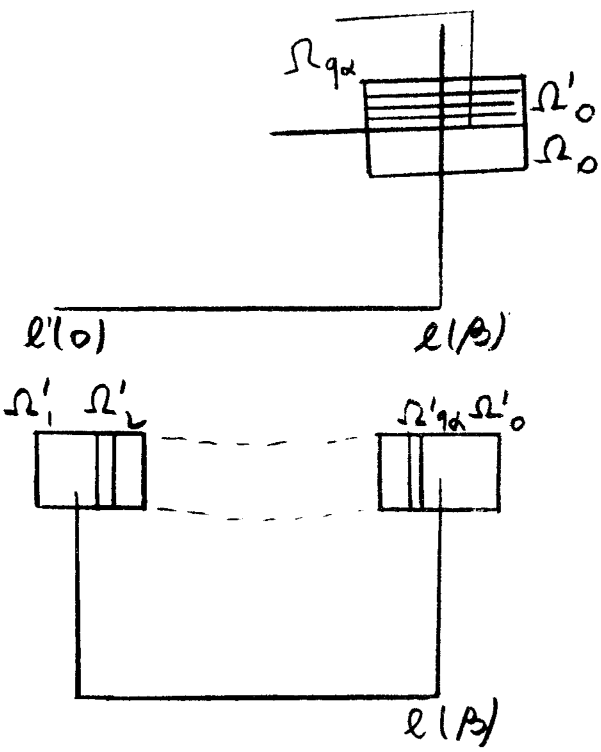
D'après le théorème § 5, $\mathcal{E}$ est non vide : c'est le cas où la chaîne est réduite à un ouvert distingué Ω_1.

Il nous suffit de montrer que $\mathcal{E} = [0,1]$. Pour cela, si β désigne la borne supérieure de $\mathcal{E}$, il suffit de montrer que $\beta = 1$ et que β appartient à $\mathcal{E}$.

Soit Ω_0 un voisinage ouvert distingué de $\hat{\ell}(\beta)$ qui satisfait au théorème local. Si α est un réel de $[0,1]$ tel que $\alpha < \beta$ et $\ell(\alpha) \in \pi(\Omega_0)$, α appartient à $\mathcal{E}$ et il existe une chaîne $\Omega_1, \dots, \Omega_{q_\alpha}$ de voisinages ouverts distingués tels que $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ est un recouvrement de $\hat{\ell}([0,\alpha])$ et $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha} \cup \Omega_0$ est un recouvrement de $\hat{\ell}([0,\beta])$ (resp $\hat{\ell}([0,\gamma])$ si $\ell(\gamma) \in \pi(\Omega_0)$ avec $\gamma > \beta$).

On va montrer que si $\beta \neq 1$, γ appartient à $\mathcal{E}$ et si $\beta = 1$, β appartient à $\mathcal{E}$.

On remplace le recouvrement $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha} \cup \Omega_0$ par un recouvrement plus fin obtenu de la façon suivante : Ω_0 est remplacé par Ω'_0, saturé de $\Omega_0 \cap \Omega_{q_\alpha}$ pour la relation d'équivalence $\rho(\Omega_0)$ associée aux plaques de Ω_0 ([2] A I 8) ; Ω_{q_α} est remplacé par Ω'_{q_α}, saturé de $\Omega'_0 \cap \Omega_{q_\alpha}$ pour la relation d'équivalence $\rho(\Omega_{q_\alpha})$ associée aux plaques de Ω_{q_α} ; et ainsi de suite : d'une façon générale Ω_i est remplacé par Ω'_i saturé de $\Omega'_{i+1} \cap \Omega_i$ pour $\rho(\Omega_i)$. ($i = q_\alpha - 1, \dots, 1, 0$).



Tout relèvement de $(\ell, [0,\gamma])$ (resp. $\ell, [0,\beta]$) s'obtient en composant un relèvement de $(\ell, [0,\alpha])$ et un relèvement de $(\ell, [\alpha, \gamma])$ (resp $(\ell, [\alpha,\beta])$). Un relèvement de $(\ell, [0,\gamma])$ (resp $(\ell, [0,\beta])$), est situé dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha} \cup \Omega'_0$ si, et seulement si, il est composé d'un relèvement de $(\ell, [0,\alpha])$ situé dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha}$ et d'un relèvement de $(\ell, [\alpha,\gamma])$ (resp $\ell, [\alpha,\beta]$) situé dans Ω'_0.

D'après l'hypothèse, et d'après le choix de Ω_0 le nombre de relèvements situés dans $\Omega'_1 \cup \dots \cup \Omega'_{q_\alpha} \cup \Omega'_0$ est donc inférieur ou égal à $k_0 k_\alpha$. Donc γ (resp β) appartient à $\mathcal{E}$. Donc $\mathcal{E} = [0,1]$

Remarque

Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à π en tout point de $\ell([0,1])$, il existe un recouvrement $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{q_\alpha}$ de $\hat{\ell}([0,1])$ tel que $k = 1$. Alors, les relèvements de $(\ell, [0,1])$ définissent un isomorphisme analytique de $\Omega_1 \cap \pi^{-1}(\ell(o))$ sur $\Omega_{q_\alpha} \cap \pi^{-1}(\ell(1))$.

IV- FEUILLETAGES SIMPLES ET FEUILLETAGES DE PAINLEVE DE $2^{è}$ ESPECE

ONNEES

E, π; B) : fibration analytique complexe localement triviale à fibre compacte

: sous ensemble analytique de E qui ne rencontre chaque fibre de E qu'en des points isolés.

$\mathcal{F}$: feuilletage analytique défini dans E-S, simple, pour la projection $\pi|_{E-S}$ de E-S sur B, et de dimension égale à celle de B

ℓ, $[0,1]$) : chemin dans B

: point de $\pi^{-1}(\ell(0)$ - S.

ROBLEME.

Nous étudions la possibilité de relever le chemin (ℓ, $[0,1]$) en a dans l'adhérence relativement à E de la feuille de a

HEOREME 2 .

Si la fibration (E, π , B) est à fibre compacte et si $\mathcal{F}$ est un feuilletage nalytique dans E-S , simple pour $\pi|_{E-S}$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Painlevé e 2ème espèce pour (E, π , B).

onséquence.

La restriction de π à l'adhérence d'une feuille quelconque est surjective.

EMONSTRATION .

Comme dans la démonstration du théorème 1. il suffit de montrer que, si ℓ, $[0, \varepsilon]$) est un chemin dans B tel que (ℓ, $[0,\varepsilon[$) soit relevable en a dans la feuille le a, alors, le chemin (ℓ, $[0,\varepsilon]$) est relevable en a dans l'adhérence de la feuille de a

Grâce à la compacité de la fibre, on construit un point b de $\pi^{-1}(\ell(\varepsilon))$ qui st adhérent à $\hat{\ell}$ ($[0,\varepsilon[$) (relèvement de $(\ell, [0,\varepsilon[)$) Puis on distingue les trois as suivants :

er cas : b est dans E-S.

Alors, grâce au lemme fondamental, on termine la démonstration comme celle du héorème 1.

2^{e} cas : b est dans S, et l'adhérence de $\hat{\ell}$ ($[0,\varepsilon[$) rencontre π^{-1} $(\ell(\varepsilon))$ au eul point b.

Alors un relévement de (ℓ , $[0,\varepsilon]$) est assuré.

3^{e} cas : b est dans S ; l'intersection de l'adhérence de $\hat{\ell}$ ($[0,\varepsilon[$) et de $\ell(\varepsilon)$) est contenue dans S et comprend au moins deux points, b et b'.

On montre que ce cas ne peut se produire sans contredire l'hypothèse selon laquelle S ne rencontre $\pi^{-1}(\ell(\varepsilon))$ qu'en des points isolés.

Pour cela, puisque la fibre est compacte, il suffit de montrer que l'on peut construire une suite infinie de points de $S \cap \pi^{-1}(\ell(\xi))$

Or on peut trouver :

(i) des voisinages $\mathcal{V}_b$ et $\mathcal{V}_{b'}$, respectifs de b et b' dans $\pi^{-1}(\ell(\xi))$ tels que $\mathcal{V}_b \cap \mathcal{V}_{b'} = \emptyset$

(ii) deux suites (t_n) et $t'_n)$ de $[0,1]$ convergeanten croissant vers ξ et telles que :

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \hat{\ell}(t_n) \longrightarrow b$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \hat{\ell}(t'_n) \longrightarrow b'$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n < t'_n < t_{n+1}$$

Il s'ensuit que, si $\mathcal{V}_\xi$ est un voisinage compact assez petit de $\ell(\xi)$ dans B, il existe une suite (t''_n) de $[0,1]$ convergeant en croissant vers ξ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_n < t''_n < t'_n$$

$$\hat{\ell}(t''_n) \notin \mathcal{V}_\xi \times \mathcal{V}_b$$

$$\hat{\ell}(t''_n) \notin \mathcal{V}_\xi \times \mathcal{V}_{b'}$$

Alors on peut extraire de $\hat{\ell}(t''_n)$ une suite convergeant vers un point de $\pi^{-1}(\ell(\xi))$, différent de b et b'. Ce point b'' est dans l'adhérence de $\hat{\ell}([0,\xi[)$ et dans $\pi^{-1}(\ell(\xi))$; donc b'' est dans S.

Ainsi est construite, de proche en proche une suite infinie de points de $S \cap \pi^{-1}(\ell(\xi))$

V - Applications

1) EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET SYSTEMES DIFFERENTIELS

On montre dans cette partie qu'on peut finalement retrouver les théorèmes fondamentaux de Painlevé comme corollaires des théorèmes 1,2, et de la proposition 1 de cet article.

1. EQUATIONS DU 1er ORDRE

On lit dans [1] (int. p. 8) : "La théorie analytique des équations du premier ordre (A) $F(y', y, x) = 0$ algébriques en y', y analytiques en x, repose sur les 2 propositions suivantes, dont aucune ne subsiste pour le second ordre.

THEOREME I

Une intégrale $y(x)$ de A ne peut admettre comme points singuliers non algébriques que certains points fixes $x = \xi$ qui se mettent en évidence sur l'équation même.

THEOREME II

Soit y_o la valeur de $y(x)$ pour $x = x_o$ et soit $y = \varphi(x, y_o, x_o)$ l'intégrale générale de (A). Si $\bar{x}$, $\bar{x}_o$ désignent deux valeurs numériques quelconques, distinctes des valeurs ξ, la fonction $y = \varphi(\bar{x}, y_o, \bar{x}_o)$ ne présente dans tout le plan des y_o que des points singuliers algébriques."

DEMONSTRATION du théorème I de Painlevé (cf. [1] p. 21 à 26)

1er cas.

Hypothèses On suppose que l'équation (A) peut se mettre sous la forme $Q(x, y)\,dy - P(x, y)\,dx = 0$.

Les fonctions P et Q sont des polynômes en y qui sont premiers entre eux pour x quelconque et ont leurs coefficients holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Le polynôme Q n'est pas identiquement nul.

Notations

$\tilde{\omega} = 0$: équation obtenue en prologeant l'équation (A) à $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

π : projection canonique de $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}(x)$

S_1 : ensemble des points singuliers de $\tilde{\omega} = 0$

S_2 : sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ constitué par la réunion des variétés intégrales d'équation $x = cte$.

$S = S_1 \cup S_2$. On note Θ la projection par π de S sur $\mathbb{C}(x)$: c'est l'ensemble des "points ξ " de Painlevé. On remarquera que $\mathbb{C} - \Theta$ n'est pas vide.

LEMME 1 Le feuilletage défini par $\widetilde{\omega} = o$ dans $(\mathbb{C} - \Theta) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est de Painlevé de 1ère espèce pour la projection canonique sur $\mathbb{C} - \Theta$.

DEMONSTRATION DU LEMME.

L'ensemble Θ est formé de points isolés parce que P et Q sont premiers entre eux et parce que les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés. Donc $\mathbb{C} - \Theta$ est un ouvert dense et connexe dans $\mathbb{C}$ (non vide).

Il est facile de voir que l'équation $\widetilde{\omega} = 0$ définit dans $(\mathbb{C}-\Theta) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un feuilletage simple pour π puisqu'on a enlevé les variétés intégrales d'équation x = cte.

C'est un feuilletage simple pour la fibration triviale à fibre compacte de $(\mathbb{C}-\Theta) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \Theta$.

Donc, d'après le théorème 1,(p. 16) c'est un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour $((\mathbb{C}-\Theta) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}-\Theta)$

Application du Lemme 1 à la démonstration du théorème I

La restriction de π à toute feuille est surjective ; donc toute intégrale $Y(x)$ est définie en tout point de $\mathbb{C} - \Theta$.

Tout germe de chemin en x_o dans $\mathbb{C}-\Theta$ a un nombre fini de relèvements en un point quelconque de $\pi^{-1}(x_o)$ dans la feuille de ce point ;
donc, tout point x_o de $\mathbb{C} - \Theta$ est un point singulier algébrique au sens de Painlevé ou un point ordinaire pour toute intégrale $Y(x)$.

Ceci démontre le théorème I de Painlevé.

Application du lemme 1 à la démonstration du théorème II

Le lemme 1 nous permet d'appliquer notre proposition 1 (p. 17). Donc, pour tout chemin $(\gamma, [0,1])$ de $\mathbb{C} - \Theta$, d'origine x_o et d'extrémité x_1, et pour tout relèvement $(\widehat{\gamma}, [0,1])$ de $(\gamma, [0,1])$ qui a pour origine a et pour extrémité b, il existe :

1) un entier naturel k, différent de o

2) un voisinage V_a de a dans $\pi^{-1}(x_o)$

3) un voisinage V_b de b dans $\pi^{-1}(x_1)$

tels que, pour tout point (x_o, y_o) de Va, les relèvements de $(\ell, [0,1])$ qui ont pour origine (x_o, y_o) sont en nombre inférieur à k et ont leurs extrémités dans V_b.

Il s'ensuit que l'ordonnée de a est un point singulier algébrique ou un point régulier pour $\varphi(x, y_o, x_o)$

LEMME 2

L'équation $\bar{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \pi(S_2)) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} - \pi(S_2)$ un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce dans $(\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) - S_1 \cup S_2$.

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème 2. En effet, on sait déjà qu'on a un feuilletage simple pour π. Il suffit donc de vérifier que S_1 rencontre chaque fibre en des points isolés ce qui est le cas, puisque S_1 est formé lui-même de points isolés.

DEFINITION

Un point x_o de $\mathbb{C}$ est essentiel pour l'intégrale y (x) s'il existe un chemin $(\ell, [0,1])$ de $\mathbb{C}$ tel que $\ell(0) = x_o$ et qui n'est pas relevable dans le graphe de y(x).

Conséquence du lemme 2

Les points singuliers essentiels des solutions sont à chercher dans $\pi(S_2)$ ([1] p. 26-27)

2ème cas (cf [1] p. 49 à 58)

Hypothèses

L'équation (A) s'écrit :

$$F(y', y, x) = a_p(x, y)\, y'^p + a_{p-1}(x,y)\, y'^{p-1} \ldots + a_o(x, y) = 0 \text{ où } a_o, a_1, \ldots\ldots a_p$$

sont des polynômes en y, à coefficients holomorphes sur $\mathbb{C}$.

On suppose que l'ensemble Σ d'équation $F(z, y, x) = 0$ est un ensemble analytique dans $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{C}(y) \times \mathbb{C}(z)$, dont les sections par x = cte sont irréductibles et non vides.

Démonstration (indications)

On se ramène de la façon suivante à la méthode de démonstration utilisée pour le 1^{er} cas (p. 21).

On considère la forme ω induite par dy - z dx sur Σ.

On considère le compactifié $\hat{\Sigma}$ de Σ dans $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et on prolonge l'équation $\omega = o$ en $\tilde{\omega} = o$ à $\tilde{\Sigma}$.

Si π est la restriction à $\tilde{\Sigma}$ de la projection canonique de $\mathbb{C}(x) \times \mathbb{P}_1(C) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}(x)$, on montre qu'il existe un ouvert connexe O, dense dans $\pi(\tilde{\Sigma}) = \mathbb{C}(x)$, et tel que :

(i) $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$ est une variété analytique.

(ii) la projection π définit une fibration localement triviale dans $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$

(iii) l'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit dans $\pi^{-1}(O) \cap \tilde{\Sigma}$ un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour π.

Alors, les théorèmes I et II de Painlevé en résultent.

2. SYSTEMES DU $2^{ème}$ ORDRE.

Soit $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z)$ $\quad \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z)$ où f_1 et f_2 sont rationnels en y, z.

On considère, comme le fait Painlevé, le système associé sur $\mathbb{C}(x) \times P_2(\mathbb{C})$

$$\Sigma : \quad \frac{dx}{X} = \frac{tdy-ydt}{tA-yC} = \frac{tdz-zdt}{tB-zC} \quad \text{où } X,A,B,C$$

sont des polynômes homogènes en y, z, t, le premier de degré q, les autres de degré q+1, à coefficients holomorphes en x .

Painlevé énonce son théorème de la façon suivante ([1] p. 425).

"I' Si les polynômes X, A, B, C sont les plus généraux de leur degré, l'intégrale générale $y = \varphi(x, y_o, z_o, \bar{x}_o)$, $z = \psi(x, y_o, z_o, \bar{x}_o)$, t=1 ne peut admettre de singularités mobiles non algébriques.

II' Pour que l'intégrale générale $y = \varphi$, $z = \psi$ admette des singularités transcendantes mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que les égalités :

$$X=0 \qquad tA-yC = 0 \qquad yB-zA = 0 \qquad zC-tB = 0$$

soient compatibles quel que soit x pour des valeurs de y, z,t qui ne soient pas toutes nulles.

III' Pour que l'intégrale générale $y=\varphi$, $z = \psi$ admette des singularités essentielles mobiles, il faut (mais il ne suffit pas) que le polynôme $X\ (y,z,t,x)$ [ou l'un de ses diviseurs $X_1\ (y, z, t,x)$] définisse une intégrale première particularisée. //

Nous en donnons la démonstration suivante

<u>DEMONSTRATION</u> (cf. [cf. [1] p. 421 à 425).

Soit π la projection canonique de $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^2\ (\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$.

Soient S_1 l'ensemble des points singuliers du champ de directions défini par le système dans $C \times \mathbb{P}^2\ (C)$ et S'_1 l'ensemble des points (x,y,z,t) de S_1 tels que $\pi^{-1}\ (x)$ rencontre S_1 en des points non isolés.

Soit S_2 le sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^2\ (C)$ constitué par la réunion de S'_1 et des variétés intégrales dont une équation est x = cte.

On sait que $\pi\ (S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont des sous-ensembles analytiques de $\mathbb{C}$. Donc leur dimension est 0 ou 1. Si la dimension de $\pi\ (S_1)$ est 1, on a $\pi(S_1) = \mathbb{C}$. Si la dimension de $\pi(S_2)$ est 1, on a $\pi(S_2) = \mathbb{C}$. D'où 3 cas :

I'	$\pi\ (S_1) \neq C$	$\pi\ (S_2) \neq \mathbb{C}$ (systèmes génériques)
II'	$\pi\ (S_1) = C$	$\pi\ (S_2) \neq C$
III'	$\pi\ (S_2) = \mathbb{C}$.	

Dans le cas I' , on désigne par Θ la projection par π de $S_1 \cup S_2$ sur $\mathbb{C}$ (x) (ensemble des points ξ de Painlevé) et on démontre, comme pour les équations du 1er ordre, que le système Σ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}-\Theta) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}-\Theta$ un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce. On en déduit la partie I' du théorème de Painlevé cité ci-dessus.

Dans le cas II', on désigne par Θ', la projection par π de S_2 sur $\mathbb{C}$ (x) et on démontre le lemme suivant.

LEMME

Lorsque $\pi(S_1) = \mathbb{C}$ et $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$, le système Σ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C} - \Theta') \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}-\Theta'$ un feuilletage de Painlevé de 2ème espèce dans $((\mathbb{C}-\Theta) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))-S_1$.

DEMONSTRATION DU LEMME.

Il est clair que Σ définit dans $((\mathbb{C}-\Theta') \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}))-S_1$ un feuilletage simple pour π car on a enlevé les variétés intégrales d'équation x = cte.

Par hypothèse, l'ensemble Θ' est formé de points isolés. Donc, la variété $(\mathbb{C} - \Theta') \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est connexe et munie canoniquement d'une fibration triviale à fibre compacte.

Pour pouvoir appliquer le théorème 2, il ne reste plus qu'à vérifier que S_1 est un sous ensemble analytique de $(\mathbb{C}-\Theta') \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, qui ne rencontre chaque fibre qu'en des points isolés : or, il en est bien ainsi, car on a enlevé S'_1. Ainsi, le lemme est démontré.

Conséquences du lemme.

(i) Les points singuliers transcendants d'une solution sont contenus dans $\pi(S_1)$.

(ii) Les points singuliers essentiels d'une solution sont contenus dans $\pi(S_2)$.

3. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 2ème ORDRE

Soit l'équation (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{P(y',y,x)}{Q(y',y,x)}$ où P et Q sont 2 polynômes en y', y sans facteur commun pour x quelconque.

Soient p et q les degrés respectifs de P et Q relativement à y'. On suppose : $p \gtrless q+2$.

Nous démontrons le théorème de Painlevé suivant ([1] p. 413).

" I. Si $Q(y', y, x)$ n'admet pas de zéro $y = G(x)$ indépendant de y' et si $p > q+2$, l'intégrale générale y (x) de (1) et sa dérivée y' (x) ne peuvent présenter de singularités essentielles mobiles.

II. Si $Q(y', y, x)$ admet au moins un zéro $y = G(x)$ indépendant de y' et si $p > q+2$, l'intégrale générale y (x) de (1) ne peut présenter de singularités essentielles mobiles. Mais y' (x) peut en présenter.

III. Si $Q(y', y, x)$ n'admet pas de zéro indépendant de y' mais si $p=q+2$, la fonction y(x) peut présenter des singularités essentielles mobiles ; mais y' (x) n'en présente pas.

IV. Si $Q(y', y, x)$ admet au moins un zéro indépendant de y' et si $p=q+2$, les fonctions y (x) et y' (x) peuvent présenter des singularités essentielles mobiles."

DEMONSTRATION (cf. [1] p. 396 à 413).

On pose $\dfrac{dy}{dx} = z$ et on remplace l'équation (1) par le système différentiel Σ suivant dans C^3.

$$\Sigma : \quad \frac{dx}{Q(z,y,x)} = \frac{dy}{zQ(z,y,x)} = \frac{dz}{P(z,y,x)}$$

On prolonge le système Σ à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})(y) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})(Z) \times \mathbb{C}(x)$ en un système $\tilde{\Sigma}$

Notations

π : projection canonique de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$

S_1 : ensemble des points singuliers de $\tilde{\Sigma}$

S'_1 : ensemble des points (x, y, z) de S_1 tels que $\pi^{-1}(x)$ rencontre S_1 en des points non isolés.

S_2 : réunion des variétés intégrales de $\tilde{\Sigma}$ dont une équation s'écrit $x = cte$ et de S'_1.

Remarque $\pi(S_1) = \mathbb{C}$ car S_1 contient l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient le système $\begin{cases} P(z, y, x) = 0 \\ Q(z, y, x) = 0 \end{cases}$

Conséquence

On a donc seulement deux cas :

A. $\pi(S_2) \neq \mathbb{C}$ (Equations génériques)

B. $\pi(S_2) = \mathbb{C}$

La méthode est alors la même que dans le cas des systèmes différentiels : par exemple, si $\pi(S_2) = \theta$ est différent de $\mathbb{C}$, on démontre que le système $\tilde{\Sigma}$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}-\theta) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}-\theta$ un feuilletage de Painlevé de $2^{\text{ème}}$ espèce dans $((\mathbb{C}-\theta) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})) - S_1$.

On en déduit que les points singuliers essentiels sont contenus dans $\pi(S_2) = \theta$.

D'où, la partie I' du théorème de Painlevé.

Des interprétations géométriques analogues peuvent être également données dans les autres cas.

2) EQUATIONS DE PFAFF COMPLETEMENT INTEGRABLES.

On se propose, dans cette partie, de démontrer pour les équations de Pfaff des théorèmes analogues à ceux de Painlevé pour les équations différentielles. On utilise, à cet effet, les théorèmes 1, 2 de cet article, ainsi que la proposition 1.

Soit l'équation de Pfaff :

$$\omega \equiv Q(x,y)dy + \sum_1^n A_i(x,y)dx_i = 0 \qquad \text{(B)}$$

On suppose réalisée la complète intégrabilité $\omega \wedge d\omega \equiv 0$.

En outre, on suppose que les fonctions $Q, A_1, \ldots, A_n$ sont polynomiales en y, à coefficients holomorphes en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

On suppose qu'il existe x dans $\mathbb{C}^n$ tel que $Q(x,y), A_1(x,y), \ldots, A_n(x,y)$ soient premiers entre eux et non nuls.

Soit $\tilde{\omega} = 0$ l'équation obtenue en prolongeant l'équation (B) à $\mathbb{C}^n(x) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Notations : S_1 : ensemble des points singuliers de $\tilde{\omega} = 0$

S_2 : sous-ensemble de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ constitué par la réunion des variétés intégrales d'équation x=cte (variétés de dimension 1).

$S = S_1 \cup S_2$

π : projection canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$.

$\theta = \pi(S_1 \cup S_2)$.

1. LEMME 1.

L'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n - \theta$ un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce dans $(\mathbb{C}^n - \theta) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

DEMONSTRATION DU LEMME.

On sait que l'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit un feuilletage de dimension n dans $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) - S_1$ à cause de la complète intégrabilité de ω (théorème de Frobenius).

Ce feuilletage induit dans $(\mathbb{C}^n - \Theta) \times \mathbb{P}^1 (\mathbb{C})$ un feuilletage simple pour π puisqu'on a enlevé les variétés intégrales d'équation x=cte.

On vérifie que $\mathbb{C}^n - \Theta$ est un ouvert connexe dense dans $\mathbb{C}^n$. En effet, $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont des ensembles analytiques car π est une application propre ; par suite de l'hypothèse, $\pi(S_1)$ et $\pi(S_2)$ sont distincts de $\mathbb{C}^n$; donc, $\pi(S_1 \cup S_2)$ est nulle part dense dans $\mathbb{C}^n$, et $\mathbb{C}^n - \pi(S_1 \cup S_2)$ est connexe. (non vide)

On a donc un feuilletage simple pour une fibration triviale à fibre compacte. D'après le théorème 1, c'est un feuilletage de Painlevé de 1ère espèce pour $\left((\mathbb{C}^n - \Theta) \times \mathbb{P}^1 (\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}^n - \Theta\right)$. Soit $\mathcal{F}$ ce feuilletage.

2. CONSEQUENCES DU LEMME.1.

(i) la restriction de π à toute feuille de $\mathcal{F}$ est surjective ; donc toute intégrale est définie en tout point de $\mathbb{C}^n - \Theta$

(ii) tout germe de chemin en x_0 dans $\mathbb{C}^n - \Theta$ a un nombre fini de relèvements en un point quelconque de $\pi^{-1}(x_0)$ dans la feuille de ce point : on peut dire que x_0 est un point singulier algébrique ou un point ordinaire pour toute intégrale $Y(x)$

D'où une généralisation du théorème I de Painlevé :

Si une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est solution de $\tilde{\omega} = 0$, l'ensemble de ses points singuliers non algébriques est contenu dans Θ.

3. PROBLEME.

Comme dans le cas de l'équation différentielle du premier ordre, on peut chercher quel sous-ensemble de Θ est susceptible d'être un ensemble de points singuliers essentiels pour une solution (même définition qu'à la page 23 en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}^n$).

Pour cela, on démontre le lemme 2.

Soient S_1' le sous-ensemble de S_1 qui est saturé pour la relation d'équivalence associée à π et $\Theta = \pi(S_1' \cup S_2)$.

LEMME 2.

L'équation $\tilde{\omega} = 0$ définit pour la fibration triviale de $(\mathbb{C}^n - \Theta') \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n - \Theta'$ un feuilletage $\mathcal{F}'$ de Painlevé de $2^{\text{ème}}$ espèce, de dimension n, dans $\left((\mathbb{C}^n - \Theta') \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})\right) - S_1$.

DEMONSTRATION DU LEMME 2.

On vérifie qu'on peut appliquer le théorème 2 de cet article. En effet :

i) $\tilde{\omega} = 0$ définit un feuilletage simple pour π dans $\left((\mathbb{C}^n - \Theta') \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})\right) - S_1$ car on a enlevé $S_1' \cup S_2$

ii) pour tout x de $\mathbb{C}^n - \Theta'$, S_1 rencontre $\pi^{-1}(X)$ en des points isolés car on a enlevé S_1'.

Conséquence (Généralisation de [1] p. 26-27)

L'ensemble des points singuliers essentiels d'une solution est contenu dans Θ'.

Autre conséquence.

La restriction de π à l'adhérence dans $(\mathbb{C}^n - \Theta') \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ de toute feuille de $\mathcal{F}'$ est surjective.

4. REMARQUE.

D'après le lemme 1 (ci-dessus), la proposition 1 (p.17) peut aussi bien s'appliquer aux équations de Pfaff (B) . On peut donc généraliser le théorème II de Painlevé (pour les équations différentielles du 1^{er} ordre (A)) aux équations de Pfaff (B).

CONCLUSION

Les théorèmes démontrés dans cet article sont susceptibles d'un grand nombre d'applications ; nous n'en avons donné ici que quelques-unes. Notamment, on pourra étudier par cette méthode les propriétés des systèmes de Pfaff complètement intégrables. Il est à prévoir que, comme dans le cas des équations de Pfaff complètement intégrables, beaucoup de propriétés restent inchangées quand on passe de une à plusieurs variables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. PAINLEVE — Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm

[2] G. REEB — Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.
Hermann 1952.

[3] REMMERT-STEIN — Uber die Wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen.
Math. Ann. 126 (1953).

[4] C. EHRESMANN — Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.
Colloque de topologie.
Bruxelles 1950 (p.31).

[5] A. SEC et R. GERARD — Feuilletages de Painlevé et équations de Pfaff.
C.R. Acad. Sc. Paris 270. Série A 1970 p 1166