

MICHEL WEBER

Une régularisation spectrale élémentaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998__2_A9_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REGULARISATION SPECTRALE ELEMENTAIRE

Michel WEBER

Université de Strasbourg

Soit $U : H \rightarrow H$ une contraction d'un espace de Hilbert $(H, \|\cdot\|)$. Considérons les moyennes ergodiques

$$\forall n \geq 1, \quad A_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j.$$

Dans un travail récent, nous avons montré comment étudier efficacement la structure de l'ensemble $A(f) = \{A_n(f), n \geq 1\}$, $f \in H$ à l'aide d'une méthode de régularisation spectrale, dont le principe est contenu dans une inégalité que nous rappelons. Soit $f \in H$, soit μ la mesure spectrale de f relativement à U . Nous régularisons cette mesure en une mesure $\hat{\mu}$ définie de la façon suivante:

$$\frac{d\hat{\mu}}{dx}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(\theta, x) \mu(d\theta) = \int_{|\theta| < |x|} |x|^{-3} \theta^2 \mu(d\theta) + \int_{|x| < |\theta| \leq \pi} |\theta|^{-1} \mu(d\theta), \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Alors

Théorème A. ([LW], théorème 1) *Pour tous entiers positifs $m \geq n$*

$$\|A_n f - A_m f\|_{2,\mu}^2 \leq 4\pi \hat{\mu}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right]. \quad (2)$$

Cette inégalité implique immédiatement que pour toute suite croissante (n_p) d'entiers positifs

$$\sum_{p=1}^{\infty} \|A_{n_{p+1}}(f) - A_{n_p}(f)\|^2 \leq 6\pi \|f\|^2. \quad (3)$$

De plus, si $N(A(f), \varepsilon)$ désigne le cardinal minimal d'un recouvrement de $A(f)$ par des boules hilbertiennes de rayon ε , alors

$$N(A(f), \varepsilon) \leq 6\pi \|f\|^2 \varepsilon^{-2} + 1. \quad (4)$$

AMS Subject Classification 1985: Primary 60F99, Secondary 28D99.

Keywords: ergodic averages, spectral regularization, entropy numbers, square functions.

Nous proposons de donner une autre preuve à la fois très élémentaire et courte de l'inégalité de régularisation spectrale (2), avec toutefois une perte relative quant à la précision des constantes. Nous utiliserons un argument nouveau d'inversion dans le changement de variables. Posons pour tout réel $x \geq 1$, $V_x(\theta) = \frac{(e^{ix\theta} - 1)}{x(e^{i\theta} - 1)}$. Rappelons trois estimations élémentaires de ces noyaux. Pour tout réel $x \geq 1$, et tous entiers $m > n > 0$, $|V_x(\theta)| \leq \inf(1, \frac{2}{x|\theta|})$, $|V_n(\theta) - V_m(\theta)| \leq 2(\frac{m-n}{m})$, et $|\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta)| \leq \pi^2|\theta|$, si $|x\theta| \leq 1$ et $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. En vertu du lemme spectral ([RW], p.33), pour tous entiers $m > n > 0$

$$\|A_n f - A_m f\|^2 \leq \left(\int_{|\theta| \leq \frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m} \leq |\theta| < \frac{1}{n}} + \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} \right) |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta),$$

Posons alors pour tous $0 \leq y \leq \pi$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$K(\theta, y) = 2\pi^2 \mathbf{1}(|\theta| < y) |\theta| y^{-2} + 16 \mathbf{1}(|\theta| \geq y) |\theta|^{-1} \quad M^{(\mu)}(dy) = \int K(\theta, y) \mu(d\theta) dy.$$

Un calcul facile montre que

$$\int_0^\pi K(\theta, y) dy = 2\pi^2 \int_{|\theta|}^\pi \frac{|\theta|}{y^2} + \int_0^{|\theta|} \frac{dy}{|\theta|} \leq 4\pi^2.$$

Théorème. $\|A_n f - A_m f\|^2 \leq 4\mu \left\{ \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right] \right\} + M^{(\mu)} \left\{ \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right] \right\}.$

Démonstration. Il suffit d'estimer

$$(I) = \int_{|\theta| < \frac{1}{m}} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta) \quad (II) = \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta).$$

Concernant (I):

$$\begin{aligned} (I) &\leq 2 \int_{|\theta| < \frac{1}{m}} \left| \int_n^m \frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta) dx \right| \mu(d\theta) = 2 \int_{|\theta| < \frac{1}{m}} \left| \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta) \right]_{x=\frac{1}{y}} \frac{dy}{y^2} \right| \mu(d\theta) \\ &\leq 2\pi^2 \int_{|\theta| < \frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left| \left[\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta) \right]_{x=\frac{1}{y}} \right| \frac{dy}{y^2} \mu(d\theta) \leq 2\pi^2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta| < y} \frac{|\theta|}{y^2} \mu(d\theta) \right) dy. \end{aligned}$$

Concernant (II):

$$\begin{aligned} (II) &\leq \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} (|V_n(\theta)| + |V_m(\theta)|) \cdot |V_n(\theta) - V_m(\theta)| \mu(d\theta) \\ &\leq 4 \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} \left(\frac{2}{n|\theta|} + \frac{2}{m|\theta|} \right) \cdot \left(\frac{m-n}{m} \right) \mu(d\theta) \\ &\leq 16 \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|} \left(\frac{m-n}{mn} \right) \mu(d\theta) = 16 \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} \left(\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|} dy \right) \mu(d\theta) \\ &= 16 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta| > \frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|} \mu(d\theta) \right) dy \leq 16 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta| > y} \frac{1}{|\theta|} \mu(d\theta) \right) dy. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré $\int_{(|\theta| < \frac{1}{m}) \cup (|\theta| > \frac{1}{n})} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta) \leq M^{(\mu)} \left\{ \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right] \right\}.$ Le théorème est donc établi. ■

Références:

[LW] Lifshits M., Weber M. *Régularisation spectrale en théorie ergodique et en probabilités*, Note aux Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **324** Sér. 1, 1996, p.99-103.

[RW] Rosenblatt J., Wierdl M., Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis, *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis*, London Math. Soc., 1994, **205**, p.3-151.

[W] Weber M. *Entropie métrique et accroissements des moyennes ergodiques*, 1996, à paraître dans Rendiconti **47**.

M. Weber: *Mathématique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France, e-mail: weber@math.u-strasbg.fr*