

DOMINIQUE LAHANIER-REUTER

Analyse épistémologique et didactique du hasard : étude des conceptions sur le hasard d'étudiants et d'élèves telles qu'elles peuvent être engagées lors de la résolution de problèmes de statistiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1997-1998, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 75-89

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1997-1998__3_75_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1997-1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Analyse épistémologique et didactique du hasard : étude des conceptions sur le hasard d'étudiants et d'élèves telles qu'elles peuvent être engagées lors de la résolution de problèmes de statistiques

Dominique LAHANIER - REUTER

Equipe THEODILE Lille III EA1764

Elaboration de la problématique et des hypothèses de recherche

La recherche entreprise a pour origine l'observation de phénomènes empiriques au cours de situations d'enseignement - apprentissage mettant en jeu des modélisations probabilistes.

Au cours de la pratique d'enseignante, en classes de 1^{ère} et T^e des lycées, puis en Licence de Sciences de l'éducation, j'ai pu être confrontée à des conflits de sens relatifs au hasard. Il est fréquent en effet d'entendre des élèves ou des étudiants choisir systématiquement une distribution équiprobable, (à la question, par exemple, quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard fête son anniversaire le 25 mars, l'élève ou l'étudiant interrogé adoptera pour réponse $\frac{1}{2}$, en arguant du fait qu'il n'existe que deux alternatives à cette question), il est également fréquent d'être confronté à des refus de réponses (en particulier dans le cas de tirage au sort d'échantillons représentatifs de populations), refus de réponses argumenté par le fait que « tout peut arriver, on ne peut rien savoir, puisqu'il s'agit de hasard ».

L'hypothèse principale que j'ai alors construite, dans le but initial de comprendre et de construire ainsi une possible anticipation de ces dysfonctionnements est la suivante :

Au cours de ces séquences, circuleraient dans l'espace de la classe des conceptions diverses du hasard, conceptions diverses parce que saisies tantôt sur le mode de la connaissance ordinaire, tantôt sur le mode de la connaissance scientifique. La diversité de ces conceptions serait une source de conflits laissant l'enseignant impuissant à les résoudre, du fait de la cohérence et de la rationalité de ces modes différents d'élaboration de connaissances.

L'élaboration de cette hypothèse principale engendre alors plusieurs problèmes différents. Tout d'abord, elle exige de pouvoir décrire des conceptions relatives à un objet particulier, puis de tenter de les reconstruire, afin de pouvoir identifier les conflits éventuels. Enfin, la désignation des lieux conflictuels entre conceptions du hasard issues du mode de la connaissance commune et conceptions mathématiques du hasard pose le problème de l'identification de variables de situations didactiques facilitantes ou au contraire source d'obstacles à la gestion de ces conflits.

Elaboration de paramètres descriptifs de conceptions relatives à un objet particulier

Les paramètres descriptifs choisis pour rendre compte des conceptions relatives au hasard l'ont été selon deux axes de recherche. Le premier est celui de l'examen des

propositions de tels paramètres dans le champ de la didactique des mathématiques, en particulier des travaux de Gérard Vergnaud¹⁷, Michèle Artigue¹⁸ et Nicolas Balacheff¹⁹. Le second est constitué de l'étude des points de rupture repérés entre mode de la connaissance commune et mode de la connaissance scientifique.

Dans le cadre de cet exposé, je choisirais de présenter les résultats qu'apportent l'examen de ce second axe, afin de pouvoir expliquer les raisons qui m'ont amenée à adopter le modèle descriptif proposé par Nicolas Balacheff. En effet, la problématique que j'ai pu construire exigeait de ma part une mise en correspondance des similitudes et des éventuels points conflictuels entre ces deux modes de connaissance.

Similitudes et divergences entre modes de la connaissance commune et de la connaissance scientifique

Je reprendrai dans le paragraphe qui suit les résultats et les études de Gaston Bachelard²⁰, Jean Ullmo²¹, Serge Moscovici²², pour ne citer qu'eux. Le principe qui sous-tend cette comparaison entre différents modes de connaissance est de considérer les deux modes de connaissance évoqués en tentant d'éviter de les hiérarchiser et de les mettre en concurrence, mais au contraire en leur attribuant à chacun une légitimité et une cohérence rationnelle.

Les similitudes relevées dans ce cas prennent alors tout leur sens. Ces deux modes de connaissance sont tous deux des activités intellectuelles, dont le moteur est le problème et dont les productions sont des connaissances. De même, ils ont en commun un projet, celui de rendre le monde intelligible, de le comprendre ou de l'expliquer, et éventuellement de rendre possible l'action d'un individu ou d'un groupe d'individus.

Cependant, les différences entre ces deux modes de connaissance existent, et peuvent être identifiées selon quatre critères :

- L'élaboration et le devenir des problèmes et de la problématique
- Le langage utilisé et ses caractéristiques
- Les opérations mobilisées et leur but
- Enfin, les validations ou les systèmes de contrôle requis.

L'élaboration et le devenir des problèmes

¹⁷ Vergnaud G., 1990, « La théorie des champs conceptuels », *Recherche en Didactique des mathématiques*, Vol 10 n° 2/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 133-170.

¹⁸ Artigue M., 1991, « Epistémologie et didactique », *Recherche en Didactique des mathématiques*, Vol 10 n° 2/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 241-285.

¹⁹ Balacheff N., 1995, « Conception, connaissance et concept », Contribution à l'école d'été de Didactique des Mathématiques, Saint-Sauves d'Auvergne.

²⁰ Bachelard G., 17^{ème} édition 1987, *Le nouvel esprit scientifique*, P.U.F., Paris.

²¹ Ullmo J., 1958, *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris.

²² Moscovici S., 2^{ème} édition 1976, *La psychanalyse, son image, son public*, P.U.F., Bibliothèque de psychanalyse, Paris.

Si les problèmes constituent effectivement le moteur de l'activité intellectuelle que constitue la connaissance commune, il faut reconnaître que cette connaissance commune se refuse à la problématisation, au sens où elle s'attache à la résolution de faits isolés, pour lesquels elle construit des systèmes explicatifs ou interprétatifs également restreints. Les connaissances communes restent fragmentaires et locales. Au contraire, la connaissance scientifique se nourrit des problèmes qu'elle construit, et s'attarde davantage à l'établissement de relations entre faits et phénomènes ainsi qu'à leur reproductibilité. Si la connaissance commune a pour projet l'extinction du problème, la connaissance scientifique a en revanche le projet de sa systématisation et l'élaboration de nouvelles problématiques. La connaissance commune recherche des réponses, tandis que la connaissance scientifique recherche des questions.

Langages utilisés et caractéristiques de ces langages

Si la connaissance commune utilise le langage « naturel », où les définitions sont rarement explicites, voire multiples, floues, la connaissance scientifique s'élabore *via* un langage spécifique, théoriquement rigoureux, ainsi que d'un symbolisme particulier. Mais la frontière entre langage « naturel » et langage scientifique est une frontière extrêmement perméable, et en cela redoutable. La connaissance commune s'empare de termes scientifiques (tel par exemple ce « mouvement brownien » que l'on peut retrouver dans divers articles de journaux pour désigner des déplacements de personnalités), et reconstruit des sens différents de celui qu'il pouvait revêtir dans le champ scientifique. De même, le langage scientifique emprunte des termes du langage courant, en leur attribuant un sens éloigné de celui qu'ils possédaient initialement. Enfin, je soulignerai le fait que, qu'il s'agisse de l'un ou l'autre de ces domaines de connaissance, le langage est soumis à des variations de sens historiques. Le terme « hasard » en particulier subit dans l'un et l'autre cas des altérations, des modifications au fil du temps.

Les opérations et leurs buts

Le mode de la connaissance commune procède essentiellement par adaptation, généralisation le plus souvent hâtive ainsi que par analogie. La construction d'un objet quotidien passe le plus souvent par l'identification d'attributs ou de propriétés, c'est-à-dire par une définition plutôt essentielle, voire par simple étiquetage. Le but de ces opérations est avant tout de « rendre l'étrange familier » et d'éliminer l'insolite, l'inconnu pour le ramener au connu.

Le mode de la connaissance scientifique quant à lui, procède surtout soit par induction soit par déduction, et tente d'élaborer des généralisations dialectiques. La construction d'un objet conceptuel, si elle est parfois atteinte par le biais d'une définition essentielle, s'appuie également sur la recherche des invariants opératoires, c'est-à-dire sur la recherche de relations répétables et reproductibles.

Validations et systèmes de contrôle

C'est, semble-t-il, le point le plus conflictuel qui puisse être détecté entre ces deux modes de connaissance. En effet, la connaissance commune se donne pour principe de validation celui de l'évidence et de l'utilité des connaissances produites à fournir des réponses

aux problèmes locaux posés. Pour reprendre la formule de Dominique Bourgain²³, « la connaissance commune n'organise pas ses doutes ».

La connaissance scientifique se doit de soumettre les connaissances produites aux systèmes de preuves reconnues, institutionnalisées au sein de la communauté scientifique. Les validations construites sont essentielles et sont des parties constitutives des connaissances produites.

En conclusion, j'adopte comme paramètres pertinents à la description de conceptions de connaissances relatives au hasard le quadruplet proposé par Nicolas Balacheff, formé des problèmes résolus par ces connaissances et le cadre problématique dans lequel ils s'insèrent, du langage et des éventuelles expressions symboliques par le biais duquel ces connaissances s'expriment et se communiquent, les opérations mises en jeu et enfin les systèmes de contrôle qui assurent leur cohérence.

Essai de description de conceptions scientifiques du hasard

La construction de paramètres pertinents pour décrire des conceptions relatives au hasard permet dans un premier temps de mettre en évidence des conceptions diverses dans le champ scientifique. Conformément à l'interrogation initiale, je commence par interroger le champ mathématique, afin tout d'abord de montrer l'efficacité de ces paramètres et de rendre compte d'éventuelles tensions à l'intérieur de ce champ scientifique.

L'exemple choisi pour illustrer le fonctionnement du quadruplet retenu est celui de l'étude comparée de deux articles de mathématiciens connus, (re)publiés simultanément dans une même revue. Il s'agit des deux articles de Benoît Mandelbrot²⁴ et Georges Chaitin²⁵, dans lesquels le premier propose une catégorisation entre trois hasards (le hasard bénin, le hasard lent, le hasard sauvage) tandis que le second traite du problème de la mesure de l'aléatoire dans une suite finie composée de 0 et de 1.

La problématique dans laquelle s'inscrivent les deux chercheurs est en effet différente: la première s'intitule hasard décelé, la seconde hasard évalué. Benoît Mandelbrot s'interroge sur les modélisations probabilistes de phénomènes observés, Georges Chaitin recherche un outil de hiérarchisation des suites selon leur plus ou moins grande complexité. Les questions qui fondent leurs travaux sont également différentes, puisque Mandelbrot cherche initialement à modéliser des phénomènes bousiers et économiques, tandis que Chaitin se demande comment penser la différence intuitive des suites 000000 et 010010. Ces problématiques et problèmes me suggèrent de poser comme caractéristiques des conceptions du hasard en jeu, que le hasard dont traite Mandelbrot est un être, un objet physique, observable, et que celui que pose Chaitin est un être mathématique, formel.

Le langage utilisé est le langage formel de la théorie des probabilités, mais également constitué d'associations langagières, tantôt synonymiques, tantôt antinomiques, au hasard. Si Mandelbrot recourt aux termes de fluctuations, d'irrégularités, d'écarts sauvages ou critiques,

²³ Bourgain D., 1988, *Discours sur l'écriture : analyse des représentations sociales de l'écriture en milieu professionnel*, Thèse de Doctorat d'état, Université de Franche-Comté (Besançon).

²⁴ Mandelbrot B., 1996, « Du hasard bénin au hasard sauvage », dans *Le hasard*, dossier hors série de *Pour la science*, Belin, Paris, pp. 12-18.

²⁵ Chaitin G., 1996, « Les suites aléatoires », dans *Le hasard*, dossier hors série de *Pour la science*, Belin, Paris, pp. 68-73.

il leur oppose ceux de régularisables, de monotones, de bénins. En revanche, Chaitin associe au hasard les expressions de désordre, d'enchevêtrement, d'absence de structure interne, et rejette celles de sagesse, de possible détermination. Ces diverses associations et rejets sémantiques induisent des conceptions du hasard qui seraient davantage construites dans le premier cas *via* des descriptions de phénomènes non réguliers, sans cesse reproduits, observés, dans le second *via* des descriptions structurelles de suites finies.

Si je prends ensuite en compte les opérations mises en place par les deux chercheurs, il apparaît également une divergence éclairante entre ces opérations. Mandelbrot recherche des invariants opératoires autres que les théorèmes de convergence liés au hasard bénin. Ce faisant, il décide de prendre en compte les phénomènes non expliqués par le paradigme, les problèmes non résolus, afin en retour de proposer dialectiquement une extension de la théorie. Les opérations exposées s'inscrivent dans le cadre analytique. Les opérations effectuées par G. Chaitin me paraissent avant tout être des opérations de transferts ou transformations de questionnements. La question initiale (donner une mesure de l'aléatoire de suites finies composées de 0 et de 1) est réécrite dans le cadre de la théorie de l'information, et devient la suivante : mesurer la complexité du programme permettant l'obtention d'une telle suite.

Enfin, les validations théoriques s'inscrivent, comme je l'ai souligné précédemment dans les deux cadres que constituent les théories analytiques et de l'information : l'étude des distributions *L* stables ou le théorème de Gödel.

J'espère ainsi avoir mis en évidence que deux conceptions mathématiques différentes du hasard se révélaient au fur et à mesure de l'exploitation des paramètres retenus. Ces conceptions du hasard donnent ensuite lieu à des tentatives de réorganisation des savoirs ainsi construits, tentatives qui se sont révélées dans ce cas fructueuses.

Utilisation des paramètres élaborés à la description de conceptions locales et pragmatiques du hasard, auprès d'une population particulière

Après avoir éprouvé cette pertinence des paramètres choisis à éclaircir les divergences voire les conflits et les tentatives de réorganisation des savoirs scientifiques qui en résultent, je vais décrire les choix expérimentaux qui ont été les miens dans l'essai de reconstruction interprétative de conceptions locales du hasard.

La population concernée par l'expérimentation est diverse : elle est composée d'une centaine d'étudiants de Licence de Sciences de l'éducation de l'Université Charles-de-Gaulle Lille III, de trente élèves de Tes d'un lycée de Roubaix. S'y est adjointe, mais dans le cas d'un seul volet de cette série d'expérimentation, les vingt six élèves d'une classe de CM2 de la région de Lens.

Description des expériences

Les décisions expérimentales sont commandées par la problématique initiale. Il s'agit d'être à même de désigner des conflits éventuels entre connaissances construites sur le hasard, en tant que concept quotidien et connaissances mathématiques sur le hasard.

J'ai mis en place trois situations expérimentales. La première est destinée à reconstruire les problèmes résolus par le hasard, la seconde à identifier les associations langagières privilégiées, et la troisième à identifier l'opérationnalisation des connaissances construites par les sujets dans le cas de résolutions de problèmes exigeant une modélisation probabiliste de la situation.

Plus précisément, la première expérience consiste en la demande de rédaction de légendes accompagnant des illustrations tirées de la littérature enfantine. Ces illustrations ont été choisies selon qu'elles présentaient des collections d'objets identiques dans leurs formes (les arbres) ou leurs désignations (des chiffres), selon que ces collections pouvaient avoir été produites par un être humain (les traits d'un dessin) ou non (les flocons de neige), selon enfin qu'un être humain désignait l'un de ces éléments (la jeune fille et les sacs) ou non (les animaux). La seule contrainte exigée lors de la production de ces textes courts était l'emploi du terme hasard.

Au cours de la seconde expérience, était proposé aux sujets une liste de quinze items (mélange, destin etc.). Ces quinze items ont été choisis selon leur occurrence essentiellement dans le champ mathématique (dispersion, désordre, irrégularités, variations, mélange), selon leur occurrence dans le champ de la pensée commune (destin, rencontre, surprise, coïncidence, fortune) et enfin selon leur apparition dans les deux champs de façon indifférenciée (chance, tirage au sort, risque, justice, accident). Il a été alors demandé de choisir les cinq items associés positivement au hasard, puis les cinq qui semblaient au sujet les plus éloignés.

Enfin, j'ai proposé deux problèmes dont la résolution mathématique exigeait un recours à une modélisation probabiliste. Ces deux problèmes ont été choisis parce que les calculs à effectuer dans l'un et l'autre cas étaient identiques, parce que la question posée permettait d'apporter de nouvelles informations sur la situation initiale (et non pas uniquement de changer le statut de certaines données numériques²⁶), enfin parce que le premier (le problème des poissons) met en scène un hasard que je qualifierai de naturel, puisqu'il s'agit du mouvement aléatoire de poissons dans un espace clos, et le second un hasard né d'une opération de mélange effectué par un être humain sur des objets manipulables (des copies).

Résultats de la première expérience, analyse des discours produits

Les discours produits par les élèves de CM2, les élèves de Tes et les étudiants de Sciences de l'éducation sont divers. J'ai rendu compte de cette diversité en regroupant les textes produits selon des catégories qui sont :

- La catégorie A1, qui regroupe les textes dans lesquels le sujet rend compte du choix au hasard d'un élément quelconque d'une collection d'objets identiques.
- La catégorie A2, qui regroupe les textes dans lesquels le sujet met en scène un choix répété au hasard d'éléments quelconques d'une collection identifiée.
- La catégorie I, qui est celle des textes au cours desquels le sujet relate un événement interrogeant. Cet événement est fortement dépendant de l'illustration choisie. Il peut en effet désigner un choc brutal (celui de la petite fille et de l'arbre), une rencontre décisive (la découverte d'un tableau ignoré d'un peintre célèbre), un fait troublant (la neige au mois d'août).
- Enfin, la catégorie F est celle des textes décrivant un fait fortuit. Le fait mis en scène est dans ce cas un événement non interrogeant, qui est un parmi les possibles, et qui aurait tout aussi bien pu ne pas être réalisé.

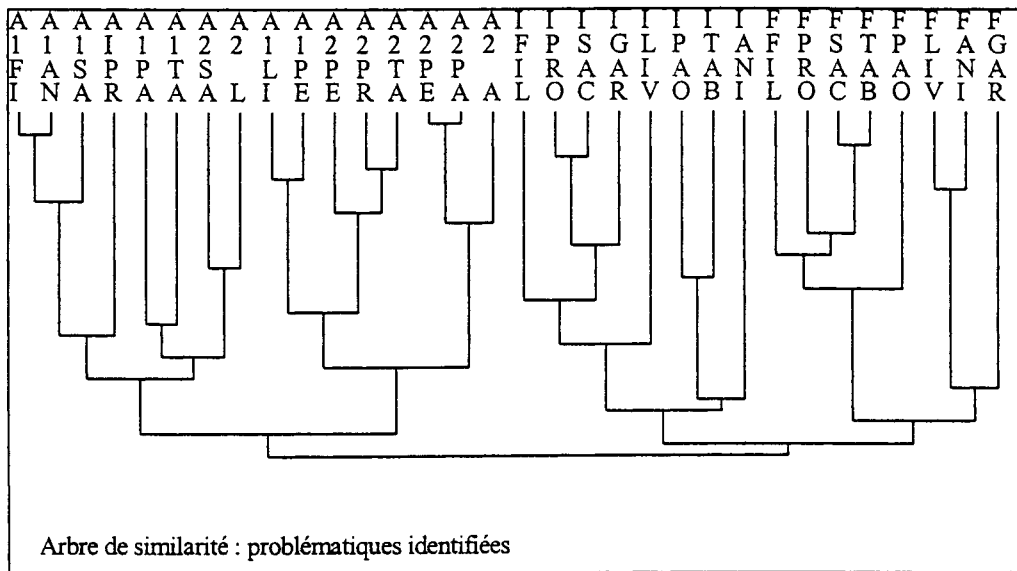
²⁶ Comme par exemple de transformer une donnée numérique statistique de fréquence en une probabilité.

Cette identification de catégories laisse en suspens le problème primordial de l'hypothèse de cohérence des traces conceptuelles ainsi reconstruites. Afin de pouvoir apporter un élément de réponse à cette interrogation, j'ai mené une analyse statistique sur les données recueillies. Le choix du type d'analyse est à mon sens essentiel dans ce cas. Il s'agit pour moi de faire apparaître des réseaux, des proximités et des hiérarchisations entre les choix des sujets. C'est pour cela que j'ai mené deux types d'analyses statistiques de données, l'analyse de similarité²⁷ et l'analyse implicative²⁸.

Arbres de similarité et graphes implicatifs relatifs à la première expérience

Le codage utilisé est alors un codage de type binaire. Sur l'ensemble des sujets sont définies 8x4 variables binaires. La première de ces variables est par exemple la présence ou l'absence de mobilisation de la problématique A1 dans le texte produit relativement à la première illustration, la seconde la présence ou l'absence de cette même problématique relativement à la seconde illustration et ainsi de suite. Les variables sont dénommées : A1 petite fille, A1 professeur, ..., F tableau, F animaux.

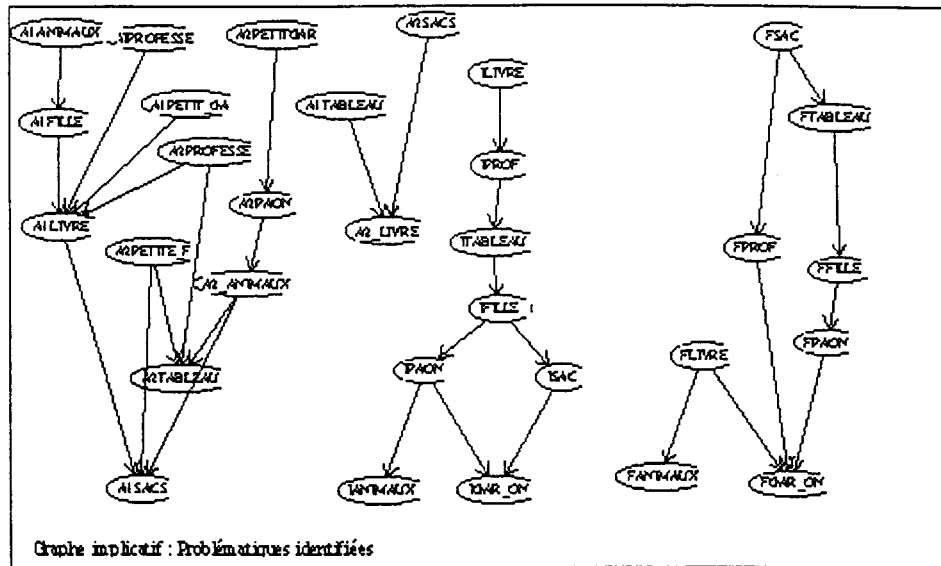
L'analyse de similarité permet d'exhiber l'arbre suivant :



Cet arbre de similarité montre une cohérence extrêmement significative entre les différents choix de problématiques.

²⁷ Lerman I.C., 1981, *Classification et analyse ordinale de données*, Dunod, Paris.

²⁸ Gras R. et coll., 1996, *L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données*, Editions La Pensée Sauvage, Collection Recherche en Didactique des Mathématiques, Grenoble.



De même, l'analyse implicative menée révèle des réseaux de choix aussi cohérents dans l'élaboration de la problématique.

Deuxième expérience, choix et rejets d'associations sémantiques au terme hasard

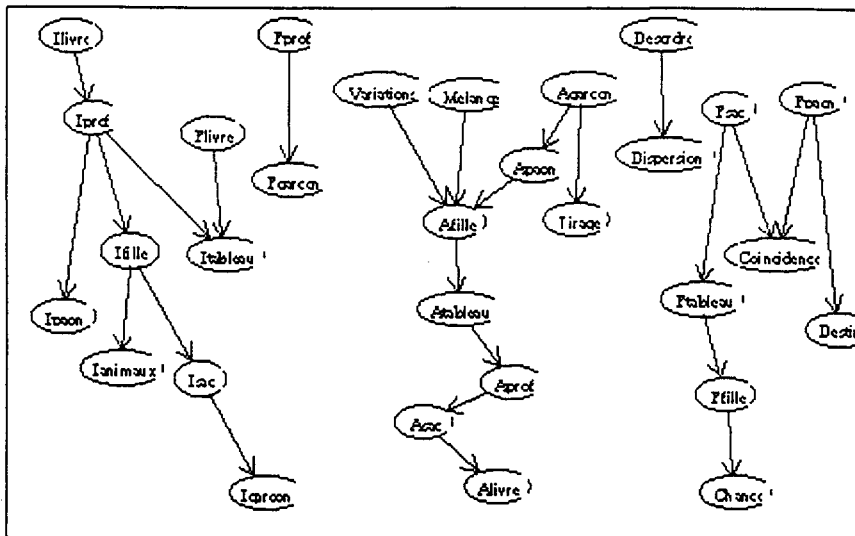
De même, afin de tester la cohérence des choix effectués par les sujets, j'ai créé sur cette population 15x2 variables binaires. Chacune d'entre elles correspond au choix « positif » d'un des quinze items ou au choix « négatif » (au rejet) de ce même item.

Les analyses statistiques menées révèlent une cohérence entre les choix des sujets, puisque les variables traduisant un choix positif des items mobilisés dans le champ scientifique sont voisines et appartiennent au même réseau implicatif.

Lien entre choix de la problématique et choix des associations sémantiques

Plus intéressant peut-être est l'interrogation qui se pose entre les liens éventuels entre les choix effectués au cours de la première et de la deuxième expérience. La cohérence est préservée, car les choix des problématiques « aléatoires » dont rendent compte les variables de type A1 et A2, sont liées au choix des items mobilisés traditionnellement dans le champ scientifique.

Mais je souhaite ici souligner davantage le rôle du langage vis-à-vis des problématiques reconstruites. Pour cela, je m'appuierai sur les résultats que permet d'obtenir l'analyse implicative.



En effet, l'étude de ce graphe implicatif tendrait à mettre en évidence le fait suivant : le langage, c'est-à-dire les associations sémantiques privilégiées, serait « premier », inducteur en quelque sorte des problématiques dans le cas où il s'agit de choix d'items accompagnant la désignation du hasard aléatoire dans le champ scientifique (comme « variations » par exemple). En revanche, ce serait les problématiques qui seraient inductrices de ces choix sémantiques dans le cas d'une conception « fortuite » du hasard, construite par le biais de la mobilisation d'items associés au hasard dans le champ de la connaissance commune (« destin » par exemple).

Ce résultat, qui je le rappelle est un résultat partiel, obtenu sur une population particulière et forcément restreinte, me paraît cependant digne de réflexion à poursuivre. Selon qu'il est construit plutôt comme concept quotidien ou plutôt comme concept scientifique, les rôles du langage et de l'élaboration de réponses à des problèmes ne seraient pas identiques, ou du moins simultanés.

Réponses spontanées aux problèmes posés

Les réponses apportées aux deux problèmes, par les élèves de Tes et les étudiants de Science de l'éducation me semblent des exemples frappants des dysfonctionnements que j'évoquais au début de cette intervention.

En effet, les sujets interrogés répondent massivement qu'il y a « 72 poissons » ou « au moins 72 poissons » dans le cas du premier problème. Ils accompagnent cette réponse d'un schéma qui rend compte de l'intersection de deux ensembles, celui des 40 poissons marqués issus de la première pêche, et celui des poissons tirés le deuxième jour. Je ne mets pas en cause, bien entendu, le fait que les sujets puissent ignorer que le mouvement des poissons est un mouvement désordonné. Mais cette connaissance n'est, dans l'ensemble, jamais utilisée au cours de la résolution. J'interprète cette résolution comme un refus de prendre en compte le hasard « naturel » de la distribution des poissons marqués.

Un autre type de réponse est, à mon sens tout aussi intéressant. Certains sujets répondent qu'il y a exactement 200 poissons dans le bassin, mais en arguant du fait que les poissons marqués se répartissent équitablement en cinq sous ensembles de 8 poissons. La fréquence des poissons marqués lors du deuxième tirage est alors représentée par une partition exacte.

Il me semble que, dans ce cas et dans l'autre, les sujets ne mobilisent aucune connaissance mathématique relative au hasard.

En ce qui concerne le second problème, les résolutions apportées sont également éclairantes quant à ces conceptions du hasard. La plupart des sujets interrogés répondent que l'enseignant n'a, dans aucun cas, à être surpris, puisque « c'est le hasard ». Cette fois, le hasard est identifié, ce qui confirme bien le fait que les connaissances construites sur le hasard diffèrent selon que le hasard est identifié comme « naturel » ou produit par la main de l'homme ou un mécanisme ad hoc.

En revanche, une conception largement partagée par les sujets étudiés est que les événements engendrés, observés dans une situation de hasard sont à juger selon leur possibilité d'apparition et non pas selon leur probabilité d'occurrence.

Interprétation en termes de conceptions des résultats des trois expériences

Afin d'interpréter les résultats précédents en terme de conceptions communes du hasard, j'ai mené des analyses statistiques auprès de la population ayant participé aux trois expériences. J'ai ainsi pu mettre en évidence trois grandes conceptions locales, pragmatiques du hasard, que je qualifierai comme suit :

le hasard de l'aléatoire, celui de la loterie, celui de l'événement historique.

- Le hasard de l'aléatoire se caractérise par un choix des problématiques aléatoires, un choix d'items empruntés au champ scientifique, variations, désordre, dispersion, irrégularités, ainsi qu'au minimum une interprétation en terme de rapport des éléments particularisés dans les deux problèmes.
- Le hasard de la loterie se caractérise par un choix de la problématique du fortuit, un choix d'items extérieurs au champ scientifique, surprise, coïncidence, mais aussi chance et tirage, ainsi que par des réponses de type arithmétiques dans le cas du premier problème.
- Enfin, la problématique de l'événement historique se caractérise par un choix essentiellement de la problématique de l'événement interrogeant, un choix d'items issus du langage courant, destin, rencontre, accident, et une indépendance vis-à-vis des réponses apportées aux deux problèmes.

Conclusion

Les conclusion partielles sont par conséquent, qu'il y a bien un conflit entre conceptions mathématiques du hasard et conceptions locales, issues du mode de la connaissance commune, que ce conflit est source de dysfonctionnements, enfin que le rôle du langage est essentiel.

J'espère avoir montré, tout d'abord qu'il pouvait être constaté effectivement des phénomènes didactiques interrogeants lors de situations d'enseignement-apprentissage mettant en jeu des modélisations probabilistes.

Ces phénomènes didactiques peuvent se constituer en refus de prise en compte de l'aléatoire d'une situation décrite, mais également en une absence de problématisation probabiliste des événements engendrés par le hasard du tirage au sort. Ces phénomènes observés donnent lieu le plus souvent à une impasse, ou à une situation conflictuelle, puisque ces dysfonctionnements sont le fruit, semble-t-il de conceptions organisées, rationnelles, construites par les élèves. C'est tout du moins ce que j'ai tenté de mettre en évidence en

construisant pas à pas cette cohérence entre choix de problématiques, d'associations sémantiques et de résolutions de problèmes mathématiques. C'est bien cette rationalité, rationalité certes extérieure au champ mathématique, mais présente et attestée, qui me paraît la source de ces situations conflictuelles.

La première conséquence, au niveau didactique, que je pourrai tirer de cette étude est que ces conflits, ces dysfonctionnements ne peuvent trouver de résolution que dans la dévolution aux élèves d'une situation dont le fonctionnement requiert une rationalité d'ordre mathématique, et dénonce, ou mette en péril, le retranchement dans la rationalité issue du mode de la connaissance commune. J'ai tenté de construire une telle situation, en m'inspirant du premier problème des poissons. L'exigence est alors de tracer sur un ensemble de 400 poissons les limites du bassin. La mise à la disposition des élèves d'un gabarit circulaire symbolisant le filet, la demande d'action de tracer les poissons marqués, permet, pour la plupart des sujets concernés, d'éprouver visuellement la discontinuité invraisemblable des 32 poissons dispersés dans l'ensemble de la feuille avec le regroupement des 8 poissons issus du second tirage du pêcheur. En revanche, la continuité vraisemblable de cette répartition porte l'élève à choisir des contours du bassin englobant quelques 200 poissons.

Cependant, même si cette situation apporte des éléments intéressants du point de vue didactique, il me semble que cette étude resterait incomplète si je ne mentionnais ici les pistes de réflexion qui restent ouvertes. La première est celle des caractéristiques de la population étudiée. Quel rôle en effet est-il possible d'attribuer aux caractéristiques socio-culturelles quant aux conceptions du hasard ? De même, quel est l'effet du cursus mathématique ? Je n'ai pour l'instant aucun élément de réponse à ces questions. La seconde piste ouverte est celle des relations entre langage et problématique, que j'ai pu interroger au cours de cette étude. Il est évident qu'elle est loin d'être résolue, mais il ne fait à mes yeux aucun doute qu'elle est riche d'enseignement au point de vue didactique.

Bibliographie

- Artigue M., 1991, « Epistémologie et didactique », *Recherche en Didactique des mathématiques*, Vol 10 n° 2/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 241-285.
- Bachelard G., 17^{ème} édition 1987, *Le nouvel esprit scientifique*, P.U.F., Paris
- Balacheff N., 1995, « Conception, connaissance et concept », Contribution à l'école d'été de Didactique des Mathématiques, Saint-Sauves d'Auvergne
- Bourgain D., 1988, *Discours sur l'écriture : analyse des représentations sociales de l'écriture en milieu professionnel*, Thèse de Doctorat d'état, Université de Franche-Comté (Besançon).
- Chaitin G., 1996, « Les suites aléatoires », dans Le hasard, dossier hors série de *Pour la science*, Belin, Paris, pp. 68-73.
- Gras R. et coll., 1996, *L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données*, Editions La Pensée Sauvage, Collection Recherche en Didactique des Mathématiques, Grenoble.
- Lerman I.C., 1981, *Classification et analyse ordinale de données*, Dunod, Paris
- Mandelbrot B., 1996, « Du hasard bénin au hasard sauvage », dans Le hasard, dossier hors série de *Pour la science*, Belin, Paris, pp. 12-18.
- Moscovici S., 2^{ème} édition 1976, *La psychanalyse, son image, son public*, P.U.F., Bibliothèque de psychanalyse, Paris.
- Ullmo J., 1958, *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, Paris
- Vergnaud G., 1990, « La théorie des champs conceptuels », *Recherche en Didactique des mathématiques*, Vol 10 n° 2/3, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 133-170.

Annexes

Illustrations proposées lors de la première expérience



n°1



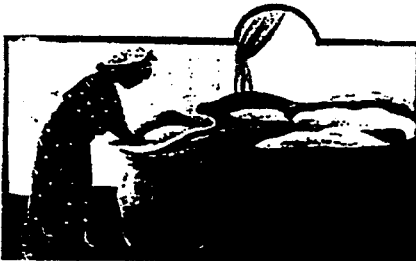
n°4



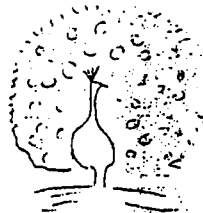
n°2



n°5



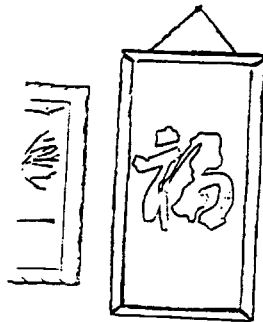
n°3



n°6

Liste d'items

mélange
accident
chance
risque
coïncidence
tirage au sort
surprise
justice
fortune
variations
dispersion
rencontre
destin
désordre
irrégularités



n°7



n°8

Textes des problèmes soumis

Premier problème

A l'ouest de la Cité, dans le quartier résidentiel, se trouve le magnifique Kensington Garden.

J'admirais Round Pond et les virevoltes incessantes des poissons rouges. Je me demandais combien de poissons il y avait approximativement dans ce bassin. Je pris un filet et attrapais ainsi 40 poissons, les marquais et les relâchais. Le lendemain matin, muni du même filet, j'en attrapais encore 40 et m'aperçut que 8 d'entre eux étaient déjà marqués. Pouvez vous répondre à ma question ?

Deuxième problème

A la correction d'une épreuve d'examen, un professeur corrige 40 copies. Une réunion rassemble les différents correcteurs de cette épreuve afin d'établir un barème commun. Il est décidé de procéder B une double correction. Les copies sont mélangées puis redistribuées.

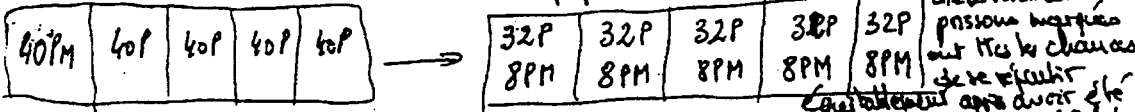
Le professeur examine le nouveau paquet de 40 copies qui lui a été attribué et s'aperçoit que 8 de ces copies faisaient partie du premier paquet qu'il avait déjà corrigé. Doit-il s'en étonner ?

Résolution de ces problèmes, quelques exemples

Premier problème

A l'ouest de la Cité, dans le quartier résidentiel, se trouve le magnifique Kensington Garden. J'admirais Round Pond, et les virevoltes incessantes des poissons rouges. Je me demandais combien de poissons il y avait approximativement dans ce bassin. Je pris un filet et attrapais ainsi 40 poissons, les marquais et les relâchais. Le lendemain, muni du même filet, j'en attrapais encore 40 et m'aperçus que 8 d'entre eux étaient déjà marqués. Pouvez vous répondre à la question?

Il y a approximativement 200 poissons dans le bassin puisqu'en une fois de filet j'attrape $\frac{1}{5}$ de l'échantillon marqué, je généralise et faire un schéma expliquant votre réponse. donc ce pourcentage 20% à l'ensemble de la population.



Quels sont les passages, les qualificatifs, les expressions qui figurent dans le texte du problème qui vous ont été utiles ou qui vous ont aidés dans la résolution?

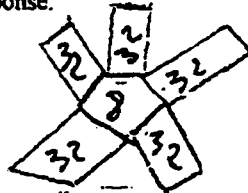
même filet même effectif de 40 captures dont 8 déjà marqués

Deuxième problème

A la correction d'une épreuve d'examen, un professeur corrige 40 copies. Une réunion rassemble les différents correcteurs de cette épreuve afin d'établir un barème commun. Il est décidé de procéder à une double correction. Les copies sont mélangées, puis redistribuées. Le professeur examine le nouveau paquet de 40 copies qui lui a été attribué et s'aperçoit que 8 de ces copies faisaient partie du premier paquet qu'il avait déjà corrigé. Doit-il s'en étonner?

Si les copies ont été distribuées équitablement, on peut dire qu'il n'a rien de remarquable, car il a 5 autres professeurs, correcteurs.

Faites un schéma expliquant votre réponse.



$40 : 5 = 8$
Chacun des correcteurs a 8 de ces copies

Quelles sont les phrases, expressions etc. utiles, ou qui vous ont aidé, de l'énoncé?

Un professeur corrige 40 copies? S'aperçoit que 8 de ces copies faisaient partie du premier paquet.

Troisième problème

Dans la réserve du Marquenterre vivent des oiseaux d'espèces protégées. L'une d'entre elles en particulier est menacée et on souhaite connaître le nombre de ces oiseaux dans la réserve. Pour cela, des ornithologues décident de baguer 40 de ces oiseaux. Une semaine plus tard, revenant sur les lieux, ils observent les oiseaux qui tournoient, se posent, s'envolent à nouveau. Ils parviennent à en décompter 40 de l'espèce en danger. Parmi eux, ils en identifient 8 qui ont été bagués. Pouvez-vous répondre à la question?

$40 + (40 - 8) = 72$
il y a au minimum 72 oiseaux appartenant à l'espèce.

et faire un schéma expliquant votre réponse.



Quelles sont les phrases, expressions, etc. utiles ou qui vous ont aidé, de l'énoncé?

Ils décident de baguer 40 de ces oiseaux. Par la suite, on décompte 40 de l'espèce en danger dont 8 qui sont bagués.

Les trois problèmes sont-ils identiques, ou non? Expliquez votre position.

Le problème 1 et 3 sont identiques, mais le problème 2 est différent puisque l'inconnu est différent, donc le raisonnement aussi.