FRANÇOIS CONNE
JEANNE GUIET

Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989, fascicule S6
« Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 51-57
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_51_0>

Samedi 26 août 1989

Atelier : *"Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques"*

par François CONNE, Jeanne GUIET

La Romanechie 1163 ETOY -- SUISSE
Ecole Makarento B, 3, rue C. Blanc, VITRY

"Ce n'est pas un professeur car avec lui, on ne sait jamais..."
(anonyme post-moderne)

I - PREAMBULE.

Ma proposition visait à élucider les rapports entre la théorie présentée au cours de G. VERGNAUD et l'objet didactique, et ceci autrement qu'en terme de "*science d'emprunt*" ou encore "*science de référence*".

J'aurais voulu induire chez les participants une saisie autre qu'analytique des données que j'avais fournies. J'avais prévu par un corrigé de présenter cet aspect analytique. Il est délicat d'engager des élèves sur une telle "*heuristique*". Je me suis dit qu'il serait peut-être judicieux d'amener ceci par :

a) un volume d'informations assez grand à traiter, des données présentées linéairement (textes) ;

b) une analogie à faire entre deux textes de propos très différents.

Ma consigne réalisait ce projet. Je demandais en effet de lire les textes (à mesure qu'ils étaient distribués) et de :

1) dégager la démarche de l'auteur (saisie globale)

2) décrire l'effet produit par leurs illustrations (explications).

Cette consigne était justifiée par la question/prémisse suivante :
"*Voilà deux études distinctes qui ne parlent pas de la même chose, dont le but est autre. Pourtant elles font appel au même concept de modèle. Ce recours est dicté par des nécessités analogues. C'est peut-être là, plus que dans les contenus précis de ces études, que se situe "la réalité didactique", objet de nos recherches.*

II - TEXTE DE Y. CHEVALLARD.

(Extrait de : "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", Petix *x*, n° 19 d'abord pp 59-61, puis pp 52-64).

a) L'auteur commence par exposer une situation/problème qu'il évoque ainsi : *"On dispose d'un paquet de bonbons que l'on veut répartir équitablement entre un certain nombre d'enfants : comment le faire ?"* Bien entendu, dès le moment où il lit cet énoncé, le lecteur va penser à la division, mais notre auteur rompt cette association en posant en outre la question suivante : *"En quoi et comment, les mathématiques peuvent–elles intervenir pour résoudre ce problème ?"* Son propos sera donc de nous en montrer divers traitements, se rapprochant de plus en plus des mathématiques officielles (scolaires, ici la division). Ainsi nous expose-t-il tout d'abord une procédure *"concrète"* effective que l'on peut utiliser : la distribution des bonbons aux élèves. Puis il nous expose deux autres modèles qui en dérivent, illustrant ainsi comment on est passé *"franchement dans le monde des mathématiques"*.

Du point de vue rhétorique, il convient de noter que l'auteur ne fait jamais qu'évoquer des situations et des modes de les traiter par le recours à des modèles (instruments + règles de traitement). C'est par cet artifice, en dégageant un modèle visiblement non concret (le modèle de la division), qu'il nous donne un exemple de modèle, mais nous entretient au fait d'autre chose, à savoir la modélisation.

b) Sa démarche dans le texte (pp 52-64) est donc de nous faire transiter de la définition du couple système/modèle vers la notion de modélisation. Il nous a introduits à deux affirmations majeures de sa théorie :
(p 61) *"La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique de l'école primaire à l'université"* ;
(p 62) *"Les modèles dans l'enseignement permettent de dégager, dans un réel plus ou moins différencié, les systèmes sur lesquels la mathématisation voudra avoir prise. Le premier problème que pose toute entreprise de modélisation est celui de l'adéquation du modèle au système qu'il permet d'étudier (...). Dès le plus humble niveau, cette question est résolue, traditionnellement, pour tout un chacun, par l'apprentissage de modèles standards permettant de faire face à des situations standards"*.

III - REFERENCE RAPIDE A LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS.

Si ces prises de position sont très loin de celles que G. VERGNAUD adopte, il n'en reste pas moins une préoccupation majeure commune, à savoir ce problème de l'adéquation. La question de l'adéquation de la connaissance à la réalité est effectivement la pierre de touche de l'entreprise de G. VERGNAUD et c'est en se posant cette exigence que cet auteur se démarque de théories psychologiques en vogue aujourd'hui. "*Adéquation*" est-ce un terme assez fort pour rendre compte de l'exigence de G. VERGNAUD ? Non ! De même, il est clair qu'il est question de *"connaissance"* et de *"réalité"* plus que de *"modèle"* ou de *"système"*. Mais on comprend bien qu'une psychologie qui ne se donnerait pas ces exigences serait inintéressante pour la didactique.

IV - RECHERCHE SUR LES PROBLEMES ADDITIFS.
Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétiques (R.D.M. n° 5.3, pp 326-328 et pp 282-295).

a) Dans cette recherche sur les problèmes additifs, la question-prémisse que je me suis posée était de comprendre quelle était l'adéquation de la distinction conceptuelle état/transformation pour saisir la pensée des élèves. Ceci m'a amené d'abord à caractériser les traitements possibles et observés chez les élèves. De là, et gardant le point de vue du savoir mathématique, j'ai questionné les modèles construits par les chercheurs dans le montage de leurs expériences, dans celui de la construction de leurs explications, et même l'identification des modèles auxquels se réfèrent les enseignants eux-mêmes dans leur fonctionnement didactique. Un résultat essentiel de ma recherche est d'avoir dégagé la cohérence (consistance) de ces trois facettes de la modélisation. En ce sens, cette étude d'apparence psycho-pédagogique est bien plus une étude didactique.

b) Prenons comme premier exemple la comparaison entre résolution arithmétique et algébrique. Revenons, en guise d'introduction, à une dernière citation du texte de Y. CHEVALLARD : ("*La notion de modélisation est une*) *grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives entre arithmétique et algèbre notamment*". Voici comme ceci avait été réalisé dans mon étude publiée dans R.D.M. n° 5.3 (pp 326-328 n° V.2 Equations). Prenons l'exemple du problème "Didier" :

Didier joue deux parties de billes.
A la première partie il perd 7 billes.
Il joue une seconde partie.
En tout, il a perdu 4 billes.
Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Dans mon texte, j'évoque la résolution arithmétique comme un "*jeu de relations aussi subtil que non linéaire, les relations étant traitées en tout sens, partiellement ou complètement en une ou plusieurs fois*".

L'analyse faite tout au long de mon étude permet de dégager un modèle reposant sur 4 ordres de relations en jeu dans les raisonnements :

	alg		
1°) Ordre chronologique	$\leftrightarrow$	$(-7)+X=(-4)$	méthode
2°) La relation entre composantes et composée	$\leftrightarrow$	$X=(-4)-(-7)$	de traitement
3°) La relation entre gains et pertes relativement au registre	$\leftrightarrow$	$X=-(4-7)$	algébrique
4°) Les relations numériques engagées dans le calcul et le calcul	$\leftrightarrow$	$X=(+3)$	

Remarque.

1. Il existe une méthode de résolution arithmétique. Mais celle-ci est devenue désuette, bien plus que les problèmes d'arithmétique, bien qu'elle ait inspiré et qu'elle inspire encore les chercheurs, qui souvent croient y retrouver d'anciennes vertus. (cf. mon compte-rendu de "Lecture de l'Enfant", "La mathématique et la réalité" de G. VERGNAUD R.D.M. n° 3.2. Mais G. VERGNAUD a bien progressé depuis ce livre, en proposant entre autres <u>la théorie des champs conceptuels</u> !).

2. On pourrait rapprocher cette énumération (à gauche) de la description du champ conceptuel associé aux énoncés de problèmes (situations évoquées). Ce modèle est aisément mis en correspondance avec la méthode de résolution algébrique (à droite), méthode qui est, soit-dit en passant, un modèle de résolution algébrique ! On obtient le schéma suivant caractérisant mon analyse.

Résolution arithmétique $\xrightarrow{\text{analyse}}$ Modèle relationnel de la résolution arithmétique

correspondance

Résolution algébrique $\longrightarrow$ Méthode de résolution algébrique

limite du traitement usuel
(savoir reconnu culturellement)

3. Il convient de noter que la correspondance qui nous occupe ici, traite de façon <u>non usuelle</u> la question de la modélisation algébrique. En effet, le propre de la résolution algébrique, <u>en tant que méthode</u>, est de rompre avec l'espace des relations (prendre distance, impliciter) et non de garder à vue, à tout moment de la résolution, ces relations. Mais dans mon analyse il s'agit au contraire d'expliciter comment les deux modèles (arithmétique et algébrique) permettent la résolution du <u>même</u> problème. Il s'agit d'exprimer d'une part quelle est leur adéquation propre, et d'autre part comment ils se distinguent.

c) Il est possible d'approfondir ces propos en examinant comment cette analyse du traitement relationnel est faite, et comment le recours à des modélisations l'a permise. Il s'agissait, là encore, de la question de l'adéquation entre modèles et savoir mathématique et en particulier : l'articulation addition/soustraction, nombre entier/nombre relatif, et enfin les propriétés structurelles des opérations (associativité, commutativité, groupe, etc.).

Partant du point de vue que l'addition/soustraction rend compte à la fois (mais pas seulement) de l'action d'une transformation (effet d'un gain ou d'une perte sur un avoir de billes) et la composition de ces transformations (bilan de 2 ou plusieurs parties), voulant travailler cette nuance, j'ai cherché à voir quelles autres nuances lui étaient liées. Usant de la notation fonctionnelle, très élémentairement, j'ai réécrit la composition de transformations (bilan). On voit que, d'un côté, la composition des transformations en bilan dépend de l'associativité de l'addition. Mais on voit aussi, d'un autre côté, que l'associativité de l'addition est "*modulée*" dans son écriture dès le moment où l'on distingue gains et pertes. Ceci peut se dénoter dans les écritures :

$$G_m \circ G_n (E_i) = (E_i + n) + m = E_i + (n+m) = G_{n+m} (E_i)$$

$$P_m \circ P_n (E_i) = (E_i - n) - m = E_i - (n+m) = P_{n+m} (E_i)$$

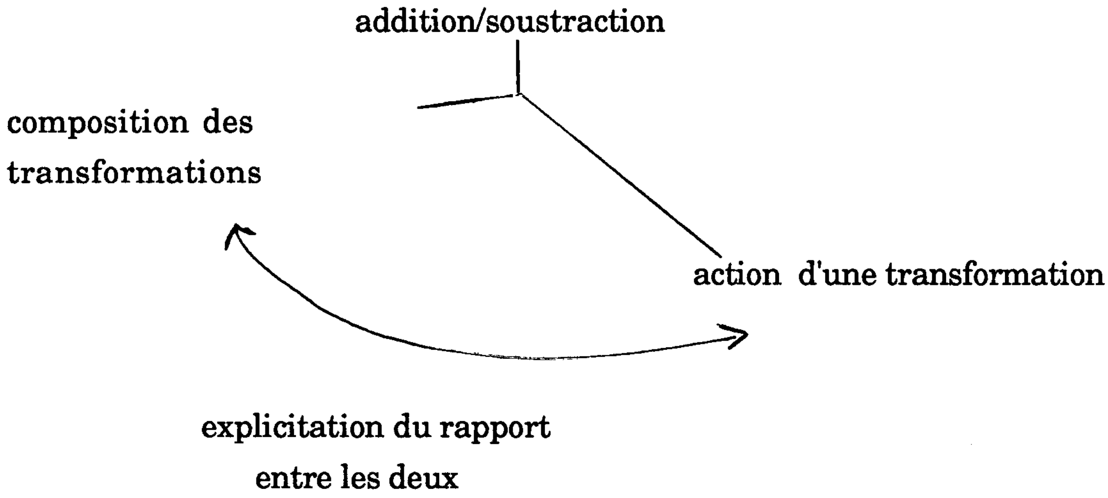
$$P_m \circ G_n (E_i) = \begin{cases} (E_i + n) - m = E_i + (n-m) = G_{n-m} (E_i) & n \geq m \\ (E_i + n) - m = E_i - (m-n) = P_{m-n} (E_i) & n \leq m \end{cases}$$

Il est à noter que l'on a pu reprocher à l'enseignement de mathématiques modernes de s'être perdu dans ces nuances ! Deux moyens d'éviter les confusions sont envisageables :

a) recourir au modèle $\mathbb{Z}$ et distinguer signe du nombre et signe de la composition.

b) recourir à un modèle intermédiaire constitué à partir de $\mathbb{N}$ par l'adjonction de la notion de registre (cf. pp 284-286 puis 288-289 II.5 de l'article).

Mon analyse ici se schématise de la façon suivante :



L'analyse de type "*génétique*" cherche à rendre compte de la constitution des concepts d'addition et de soustraction. Ainsi elle parcourt ce schéma en remontant. Par contre l'expérimentation qu'elle soit psychologique ou enseignante parcourt ce schéma en descendant. Ceci veut dire que l'on peut légitimement considérer la composition des transformations ou l'action d'une transformation comme des modèles de l'addition/soustraction. Ce sont des modèles que l'on évoque aux élèves ou aux sujets des expériences psycho-pédagogiques. Or la structure de ce schéma a ceci de particulier qu'il n'est pas symétrique. Le parcours ascendant aboutit à un seul endroit alors que le parcours descendant présente un embranchement. Cette structure est au coeur du problème bien connu du recours au concret. L'inattention aux nuances qui accompagne si souvent ce recours est source de confusion dans l'enseignement, et de là quelques effets didactiques bien connus : effet Diénes, scholastique des propriétés des opérateurs (associativité et tout ce "toin-toin"), recours à des illustrations pour lesquelles l'élève a avantage à savoir d'avance etc. Mais ces confusions ont autant marqué les recherches psycho-pédagogiques et même didactiques. C'est ce que mon texte montre dans les pages 291 et suivantes. Par exemple une confusion qui a ramené l'étude des problèmes TTT aux problèmes $E_1T_1E_2T_2E_3$. Je montre que la résolution d'un problème $E_1T_1E_2T_2E_3$ suppose un enchaînement de deux, voire trois problèmes ETE de structures différentes. Cet exemple introduit à un résultat essentiel de mon étude, à savoir la mise en évidence de glissement de sens. A nouveau, une modélisation et une comparaison de modèles permet cette mise en évidence. Il s'agit ici de confronter la modélisation en termes d'état et de transformation (structure ETE, TTT, ETETE,...) avec le langage qui les exprime. D'abord dans la confection des énoncés, par le chercheur lui-même (ici Durand-Vergnaud) et l'examen de la façon dont les questions sont libellées (et le chercheur n'est pas libre de **ces expressions** !) ; ensuite dans la façon dont les élèves libellent leurs réponses. Là encore, le travail de ces nuances langagières consiste à les rattacher à d'autres nuances, et permet de "*faire surgir*" la façon dont les problèmes se posent dans des cas différents.

Exemple.

1) TTX (on demande le bilan de la composition de deux transformations) où c'est "*l'articulation des transformations qui constitue le problème dans ces énoncés*" (p 292). Et dans ce cas les schémas TTX et ETX sont très différents (ce que montrent bien les analyses de Durand-Vergnaud).

2) Tandis que les problèmes TXT où l'élève cherche un opérateur passant d'une transformation initiale à une transformation bilan sont bien plus proches, confondables, avec les problèmes EXE.

d) On pourrait dans cet article multiplier ces exemples d'analyse.

IV - CONCLUSON.

Le problème de l'adéquation du modèle au système est effectivement premier et crucial. Le traitement de ce problème est loin d'être trivial, il suppose la mise en oeuvre de techniques particulières et exigeantes. A mon avis, notre recherche en didactique n'est pas assez avancée pour qu'elle puisse, à l'heure actuelle, se passer de telles techniques. Attention le pédagogisme guette ! Il ne suffit pas, pour le conjurer, d'utiliser des termes, aussi savants soient-ils que ceux de système et de modèle.

Il est crucial de : . savoir modéliser
. savoir traiter le modèle
. ne pas oublier ce que le modèle a fonction d'oublier !

C'est exactement le sens du message donné par la 3ème conférence du C.N.E.T. lundi 28 au soir où l'Ingénieur du C.N.E.T. nous a montré comment la physique l'avait toujours guidé dans la recherche et finalement permis de se doter des instruments mathématiques adéquats.