

GILBERT ARSAC

**Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration  
et les phénomènes de validation en France**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1989, fascicule S6  
« Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 27-30

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1989\\_\\_S6\\_27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989__S6_27_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Vendredi 25 août 1989

Conférence : "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France"

par Gilbert ARSAC

Laboratoire LIRDIS, - Université de LYON 1

L'objet de cette conférence est de faire le point sur les problématiques actuelles de recherche sur l'apprentissage de la démonstration et du raisonnement en France. Comme la démonstration est le procédé de validation dont l'usage systématique différencie les mathématiques des disciplines expérimentales, elle représente un enjeu central pour l'enseignement mais aussi pour l'épistémologie. Ces deux points de vue interfèrent donc nécessairement mais sans pouvoir coïncider puisque le concept de transposition didactique est là pour rappeler qu'on ne saurait déduire directement le contenu et les méthodes d'enseignement d'une étude historique ou épistémologique pourtant indispensable. Ainsi s'impose le plan de cet exposé :

- la première partie est consacrée à la démonstration dans les mathématiques : nous étudions ici les positions d'un certain nombre d'auteurs qui, soit se limitent à une étude épistémologique, soit visent une étude didactique, mais partent d'abord d'un point de vue épistémologique.

- la deuxième partie est consacrée à la démonstration dans l'enseignement : nous étudions ici des auteurs dont le point de départ est d'abord un problème d'enseignement, ce qui n'exclut pas bien entendu qu'ils aient aussi un point de vue épistémologique.

Aucune de ces deux parties ne peut prétendre être exhaustive : par exemple, faute de temps et de compétence, il ne sera pas question des recherches utilisant l'outil informatique ni de celles, fondamentales, portant sur les conceptions des enseignants. Nous espérons simplement, compte tenu de ces restrictions avoir envisagé l'essentiel des problématiques possibles. Nous avons synthétisé à la fin de chacune des deux parties l'essentiel des convergences et des divergences des recherches entreprises. C'est sur ces synthèses qu'insiste ce résumé.

### 1) La démonstration dans les mathématiques

Les conclusions qui vont être exposées reposent sur les textes suivants : Balacheff (1987 et 1988), équipe du débat scientifique de l'IREM de Grenoble (1985), Arsac (1987), Barbin (1988), Bkouche (1989).

Après confrontation de ces textes, il nous semble possible de prendre le risque de proposer la synthèse suivante qui, si elle ne fait pas l'unanimité, nous paraît du moins majoritaire chez les différents auteurs examinés.

1) L'analyse épistémologique s'attache toujours au sens de la démonstration, c'est à dire au fait que la démonstration est le procédé de validation dont l'emploi exclusif caractérise les mathématiques.

2) Au contraire, son attention se porte beaucoup moins sur l'aspect que l'on pourrait appeler algorithmique de la démonstration, sur la question de

l'existence et de l'évolution de règles de la démonstration. Cet aspect "règles" n'apparaît explicitement que chez Balacheff et Bkouche. Quant à l'aspect langagier, il n'est mentionné que chez Balacheff.

3) Cependant, tous les auteurs cités soulignent l'évolution des procédés de validation et des niveaux de rigueur et la mettent en relation avec les nécessités de l'activité mathématique, c'est-à-dire avec la nature et la complexité des problèmes à résoudre, cet aspect étant particulièrement marqué chez Barbin. Seuls deux auteurs (Barbin, Arsac) mettent de plus cette évolution en relation avec la société ambiante et les débats idéologiques qui s'y déroulent.

4) La plupart également, soulignent le lien entre le niveau d'élaboration des concepts et le type de raisonnement que l'on peut développer à leur sujet, ceci concerne par exemple en géométrie la notion de figure.

5) Les conclusions didactiques que ces auteurs tirent de leurs études sont divergentes, tout au moins certains auteurs l'affirment-ils, mais nous semblent quand même partir des deux mêmes idées de base :

-conformément à la priorité au sens soulignée en 1), il y a refus de séparer la démonstration de la résolution de problème qui lui donne son sens, voire de la construction des concepts (N. Balacheff).

-conformément à la constatation de l'évolution historique soulignée en 3) apparaît l'idée d'une genèse de la démonstration chez l'enfant, parallèle à sa genèse historique, les différences entre les auteurs apparaissant surtout au niveau de l'analyse qu'ils font des raisons historiques de cette évolution. Tout le problème réside évidemment dans l'utilisation que l'on doit faire de l'histoire dans la définition de cette genèse chez l'enfant : faut-il reproduire les étapes historiques et seulement celles-là, et si oui lesquelles, la question étant encore moins simple à régler si l'on admet que certaines étapes et certaines évolutions ne sont pas liées seulement à des nécessités internes aux mathématiques.

## 2) La démonstration dans l'enseignement des mathématiques

Ici, les auteurs examinés sont : Antib (1988), Gaud et Guichard (1984 et 1988), Duval et Egret (1989), Egret et Duval (1989), Legrand (1988), Balacheff (1988). Ces travaux soulèvent les questions suivantes : Les travaux présentés dans cette deuxième partie visent tous à fournir aux enseignants des moyens de réponse aux problèmes posés par l'enseignement de la démonstration et du raisonnement. On peut cependant distinguer deux points de départ, deux problématiques :

1) partir du problème tel que l'énonce l'analyse épistémologique, ce qui amène à mettre l'accent sur :

-le sens de la démonstration, qui incite à considérer que les "situations de validation" en sont des lieux d'apprentissage privilégiés, en liaison avec la résolution de problème.

-la progression, suivant le modèle historique, d'un niveau de

preuve (ou de démonstration ? ) à un autre. L'un des points les plus délicats reste la définition de ces niveaux comme on l'a déjà vu.

-la progression dans le statut des concepts, en particulier celui de figure, fort difficile également à définir.

2) Partir du problème tel que l'énonce l'enseignement : rendre les élèves performants en terme de production de démonstration. Ce deuxième point de vue amène à mettre l'accent sur :

-la séparation entre l'apprentissage de la démonstration et la résolution de problème. Ceci pose le problème du rapport entre apprentissage de la démonstration, c'est-à-dire du procédé de validation des mathématiques, et situation de validation au sens didactique.

-tout ce qui concerne la "forme" ou la "structure" au sens large de la démonstration : processus logique, organisation d'énoncés, réglementation langagière comportant le rejet de la (les ? ) logiques implicite(s) du discours "nature

Conclusions générales : les questions ouvertes.

1) La démonstration, telle qu'elle est dans les mathématiques, est-elle enseignable ? Autrement dit, toute tentative d'enseignement explicite de la démonstration ne va-t-elle pas produire un "objet d'enseignement" qui présentera des distorsions par rapport à la démonstration telle qu'elle fonctionne dans les mathématiques ? Ne vaut-il pas mieux alors ne pas enseigner explicitement la démonstration ? Mais cette idée que la démonstration ne devrait pas faire l'objet d'un enseignement explicite n'est-elle pas une des causes de l'échec des élèves ?

2) Faut-il accorder priorité au point de vue épistémologique ou au problème d'enseignement ? Cette question est évidemment liée à la précédente : si un point de vue épistémologique "extrémiste" conduit à pratiquement refuser l'enseignement de la démonstration, un point de vue symétrique acceptant pour argent comptant le problème d'enseignement se fixera comme unique objectif d'apprendre aux élèves à résoudre les "problème de démonstration". Dans le cas où l'on se fixe effectivement comme objectif l'apprentissage de la démonstration, la question des priorités relatives à accorder respectivement au sens de la démonstration (procédé de validation) et au respect de certaines règles ou formes langagières est central.

3) Le problème le plus central pour la théorie didactique est celui du rôle des situations de validation : a priori, elles apparaissent comme celles qui peuvent donner du sens à la démonstration. Cependant, le problème des contraintes qu'il faut imposer dans leur définition pour que les procédés de validation mis en oeuvre par les élèves soient acceptables par un mathématicien reste à notre avis ouvert. De plus, le rôle du maître dans les situations de validation apparaît comme un problème fondamental.

4) Du point de vue épistémologique, le manque, tout au moins à notre connaissance, d'études précises sur les problèmes de forme et les problèmes langagiers soulevés par la démonstration est une difficulté pour la recherche didactique.

5) La recherche est actuellement plus orientée vers des propositions de remédiations à un état de choses jugé mauvais que vers une analyse poussée de la situation telle qu'elle est et a été (par exemple il ne semble pas exister d'étude systématique des manuels), et elle ne prend guère en compte d'autres questionnements possibles concernant ce qu'on pourrait appeler le contrôle de la transposition.

### BIBLIOGRAPHIE

ANTIBI R. 1988, Etude sur l'enseignement de la notion de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions, Thèse, IREM de Toulouse

ARSAC G. 1987, L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, Recherches en didactique des mathématiques, 8 (3) p. 267-312.

BALACHEFF N. (1977) : Processus de preuve et situations de validation Educational Studies in Mathematics, vol 18, n°2, Mai 1977, p. 147-176.

BALACHEFF N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège. Thèse d'état. Grenoble : université Joseph Fourier.

BARBIN E (1988) : la démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques bulletin de l'APMEP n° 366, déc 88

BKOUICHE R (1989) De la démonstration, IREM de Lille

DUVAL et EGRET (1989) : L'organisation déductive du discours, Annales de didactique et de sciences cognitives, (2) p. 25-40 Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg.

EGRET et DUVAL (1989) : Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, Annales de didactique et de sciences cognitives, (2), p. 41-64, Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg.

GAUD D. GUICHARD J. P. (1984) : Apprentissage de la démonstration, Petit X, n°4, p. 5-25.

GAUD D. GUICHARD J. P. (1988) : Géométrie de 4ème, fasc 1; initiation à la démonstration. IREM, Université de Poitiers.

IREM de Grenoble (1985) : Apprentissage du raisonnement. Publication de l'IREM de Grenoble, université J. Fourier.

LEGRAND M. (1988) : Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique : le débat scientifique en situation d'enseignement. Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, (C. Laborde éd.) La Pensée Sauvage, Grenoble.