PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PAULETTE LIBERMANN

Les idées de Louis Antoine concernant l'enseignement de la géométrie

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule S6
« Journée Louis Antoine », , exp. n° 7, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988___S6_A7_0>

Les idées de Louis ANTOINE concernant l'enseignement de la géométrie

par **Paulette LIBERMANN**

Professeur Honoraire à l'Université de Paris 7

Je remercie les organisateurs de cette "Journée" de m'avoir invitée à évoquer le souvenir de Louis ANTOINE au travers de ses cours. Je suis heureuse de rendre hommage à ce grand Universitaire que fut Louis ANTOINE, ainsi qu'à Madame ANTOINE qui le seconda si bien dans son travail d'enseignant aveugle.

Depuis mon arrivée à Rennes en 1954 jusqu'à mon départ en 1966, je fus régulièrement accueillie dans la famille ANTOINE et nos relations d'amitié continuèrent sous forme épistolaire jusqu'à la mort de Mr et Mme ANTOINE .

Je remercie particulièrement M. BOCLE qui, ayant suivi l'enseignement de Louis ANTOINE, me procura des notes de cours prises par lui-même et par d'autres étudiants, ainsi que des textes d'examens ; les notes couvrent la période 1941-1944, les textes d'examen la période 1950-1957 (c'est-à-dire les dernières années d'enseignement de Louis ANTOINE).

Le cours de Géométrie Supérieure était un enseignement de "Diplôme" ; l'obtention de ce diplôme était nécessaire pour se présenter à l'Agrégation. Le cours s'adressait donc à des étudiants ayant terminé leur licence ; il correspondait à un enseignement actuel de Maîtrise ou de début de 3e cycle.

Louis ANTOINE a débuté cet enseignement durant l'année 1922-23 lorsqu'il a été nommé Maître de Conférences à Rennes. Voici le programme des matières traitées.

En 1923-24 et 1928-29 :

1°) Transformations birationnelles. Notions sur les transformations de contact.
2°) Déplacement d'un trièdre dont le mouvement dépend d'une ou deux variables. Coordonnées curvilignes. Systèmes orthogonaux et isothermes. Cartes d'une surface. Surfaces réglées. Congruences de droites. Complexes de droites. Surfaces applicables sur une surface donnée. Lignes géodésiques. Systèmes triples orthogonaux.

En 1941-42 :

Représentation conforme, problème de Dirichlet, surfaces minima.

En 1942-43 :

Application des surfaces. Fonctions elliptiques et applications géométriques.

En 1943-44 :

Cartes géographiques. Topologie : problème de coloriage ; théorèmes d'Euler pour les graphes.

Les cours (à l'exception des problèmes de topologie pour le coloriage des cartes) traitent de la Géométrie Différentielle classique et des fonctions d'une variable complexe.

Tous ces sujets sont actuels. Des livres parus ces dix dernières années (M. BERGER, D. LEHMANN) sont consacrés à l'étude des surfaces ; en particulier l'étude des surfaces minima est un sujet de recherches très actif et un colloque lui sera consacré en 1989. Le livre des mathématiciens Russes DOUBROVINE, NOVIKOV et FOMENKO ("Géométrie Contemporaine") aborde la théorie des surfaces d'un point de vue un peu voisin de celui de Louis ANTOINE. L'étude des surfaces est enseignée dans le cadre de la Licence ou de la Maîtrise dans de nombreuses Universités. Je regrette de ne pas avoir connu les sujets d'examens donnés par Louis ANTOINE car ils m'auraient été très utiles quand j'assumai cet enseignement à l'Université Paris VII !

Ce qui ressort de la lecture des documents qui m'ont été procurés, c'est la clarté et la précision avec lesquelles les sujets sont traités, ce qui montre combien Louis ANTOINE dominait bien ce qu'il exposait. Par ce souci de précision, Louis ANTOINE était en avance sur son temps ; bien que le langage mathématique ait changé, les textes de Louis ANTOINE sont toujours très compréhensibles. On est admiratif pour la manière dont Louis ANTOINE mène ses calculs jusqu'au bout, malgré les difficultés dues à la cécité. Bien que traitant par cycle de 3 ans le même programme, il se renouvelle dans sa manière d'exposer.

Ce goût de la précision est lié aux qualités de topologue de Louis ANTOINE qui se préoccupe constamment du domaine de validité des théorèmes énoncés (coordonnées indépendantes sur une surface, théorèmes de CAUCHY pour les fonctions d'une variable complexe, etc...).

Un sujet commun aux 3 cours que j'ai pu consulter est le problème de l'applicabilité des surfaces et de la représentation conforme. On rappelle que le ds^2 d'une surface plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (ou encore la première forme fondamentale) est la fonction qui associe à tout vecteur V tangent à la surface S au point x de S le carré de sa longueur, c'est-à-dire le nombre $\|V\|^2 = V.V$ (où . désigne le produit scalaire). A l'aide d'un système de coordonnées $(u,v) \to w(u,v)$, on exprime cette première forme fondamentale par

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

avec

$$E = \|\frac{\partial x}{\partial u}\|^2 \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \qquad G = \|\frac{\partial x}{\partial v}\|^2 .$$

Dans la terminologie de la Géométrie Différentielle classique, on dit que la surface S est applicable sur la surface S' s'il existe une correspondance entre les deux surfaces telle que les surfaces aient aux points homologues même ds^2 ; on dit de même qu'il existe une représentation conforme de S sur S', s'il existe une fonction numérique ρ telle que $ds'^2 = \rho^2\, ds^2$.

En langage contemporain, on dit que la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$ induit sur la surface S une structure Riemannienne déterminée par la première forme fondamentale (dont la restriction à chaque plan tangent est une forme quadratique définie positive). Un difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, appliquant $S \cap U$ dans $S' \cap U$ est dit une isométrie locale s'il transforme la première forme fondamentale de S en la première forme fondamentale de S'. On dit que S est applicable sur S' si, pour tout point de S, il existe une isométrie d'un voisinage de ce point sur un ouvert de S'.

Les problèmes d'applicabilité, de représentation conforme et plus généralement de cartographie conduisent à la recherche de systèmes de coordonnées adaptés : coordonnées orthogonales ($F = 0$), coordonnées isothermes ou conformes ($F = 0$, $E = G$) ou coordonnées géodésiques ($E = 1$, $F = 0$), pour lesquelles l'une des familles de courbes coordonnées est formée de géodésiques (courbes qui localement réalisent le minimum de la distance).

Etant donné un système de coordonnées quelconque (u,v), la recherche de coordonnées géodésiques (θ,φ) (telles que : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\theta^2 + c^2 d\varphi^2$) conduit L. ANTOINE à considérer le 1er paramètre différentiel de BELTRAMI qui à toute fonction $f(u,v)$ associe la nouvelle fonction

$$\Delta f = \frac{Gp^2 - 2Fpq + Eq^2}{EG - F^2} ,$$

avec $p = \frac{\partial f}{\partial u}$, $q = \frac{\partial f}{\partial v}$. Ainsi la fonction inconnue θ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles $\Delta\theta = 1$. Il est montré que Δf représente le carré de la longueur du vecteur gradient de f (noté grad f), défini en chaque point de la surface par les conditions :

$$\mathrm{grad}\, f \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = p , \quad \mathrm{grad}\, f \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = q ;$$

L. ANTOINE montre aussi que grad f ne dépend pas des coordonnées initiales (u,v) choisies. Il traite ce sujet dans tous ses cours, reprend les calculs à plusieurs reprises dans le même cours, sentant l'importance de la notion et cherchant à simplifier les calculs.

Tout se simplifie naturellement en utilisant la Géométrie Riemannienne et la dualité dans les espaces vectoriels : dans l'espace tangent à la surface en x, la valeur en x du gradient de f est le vecteur tel que pour tout vecteur X tangent en x à la surface, la relation suivante soit satisfaite

$$(\mathrm{grad}\, f)_x \,.\, X = (df)_x\,(X)\,.$$

L. ANTOINE considère aussi le 2e paramètre différentiel de BELTRAMI $\Delta_2 f$ qui n'est autre que la divergence du gradient de f ; il utilise la formule de GREEN pour montrer que la notion ainsi introduite ne dépend pas du choix des coordonnées. Les fonctions f telles que $\Delta_2 f=0$ sont les fonctions harmoniques, essentielles dans l'étude des transformations conformes qui nécessite l'introduction des fonctions holomorphes d'une variable complexe. L'opérateur Δ_2 est appelé maintenant le Laplacien ; il joue un rôle fondamental en Géométrie Riemannienne.

Un autre exemple de calculs très bien conduits par L. ANTOINE mais qui maintenant se simplifient par la considération de l'algèbre linéaire est lié au problème des altérations. En étudiant la cartographie ou encore le problème de l'habillage des surfaces (ce qui correspond à un tissu que l'on déforme, la longueur des fils représentés par les lignes coordonnées devant rester constante) il introduit la notion d'altération ; il montre qu'étant donnée une correspondance quelconque entre deux surfaces qui n'est pas une représentation conforme, en chaque point il existe un couple unique de directions orthogonales de la première surface transformé en un couple de directions orthogonales et qu'un cercle tracé dans le plan tangent à la première surface est transformé en une ellipse appelée l'indicatrice des déformations. Dans la terminologie contemporaine, on considère l'application linéaire tangente $T_x f$ à un difféomorphisme qui transforme un cercle en ellipse.

Dans l'exposé du problème du coloriage des cartes L. ANTOINE est amené à démontrer de manière élégante le théorème d'EULER pour le plan (et par inversion pour la sphère) ainsi que pour le tore, ce qui est l'occasion de montrer à ses étudiants comment faire des dessins coloriés très complexes. Cet exposé un peu succint ne donne qu'un aperçu de la richesse et de la précision de la pensée de

L. ANTOINE . Je regrette de ne pas avoir discuté de géométrie avec lui. Son ouverture d'esprit montre que la Géométrie Riemannienne contemporaine aurait pu l'intéresser.