A. R. DARWICH

Une loi du logarithme itéré pour les martingales locales multidimensionnelles et son application en régression linéaire stochastique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1
« Probabilités », , p. 46-55
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___1_46_0>

UNE LOI DU LOGARITHME ITERE POUR LES MARTINGALES LOCALES MULTIDIMENSIONNELLES ET SON APPLICATION EN REGRESSION LINEAIRE STOCHASTIQUE.

A.R. DARWICH
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

SUMMARY :

We give a law of iterated logarithm for cadlag vector local martingales.
This result precises the order of the almost sure convergence of least square estimates in multiple linear regression model.

RESUME :

On établit une loi du logarithme itéré pour les martingales locales cadlag multidimensionnelles.
Ce résultat précise l'ordre de la convergence presque sûre des estimateurs des moindres carrés dans un modèle de régression linéaire multiple.

Code : AMS 60 G , 62 J

I) INTRODUCTION

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles.

$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_d \end{pmatrix}$ désigne toujours une martingale localement de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ continue à droite, pourvue de limites à gauche (cadlag) et nulle en zéro.

Nous poserons : $\Delta M_t = M_t - M_{t-}$ *si* $t > 0$

On note par $< M >$ la matrice $(< M_i ; M_j >)_{1 \leq i, j \leq d}$ et par $\lambda_M (< M >)$ (resp : λ_m $(< M >)$) la plus grande (resp : plus petite valeur propre de $< M >$).
Lorsque la matrice $< M >$ est non-singulière , la matrice $< M >^{-1} = (\gamma_{i,j})_{\leq i, j \leq d}$ désigne la matrice inverse de $< M >$.

On établit dans le paragraphe II (resp : III) une loi du logarithme itéré (resp : une loi du type *log*) pour les martingales locales cadlag vectorielles.

Le paragraphe IV sera consacré à l'application de ces résultats à des modèles de régression linéaire multiple.

Dans le cas d'un modèle autorégressif gaussien, le théorème 1 précise l'ordre de la convergence des estimateurs obtenu dans [6] . [9].

II) LOI DU LOGARITHME ITERE

Théorème 1 :

Supposons que le couple $(M\,;\,\langle M\rangle)$ *vérifie :*

(1) $$\max_{1\le i\le d} E\,[\sup |\Delta M_i|\,] < +\infty$$

(2) *p. s.* $$\lambda_m(\langle M\rangle_t) \to +\infty\ ;\ \log\log \lambda_m(\langle M\rangle_t) = 0\,(\log\log \lambda_m(\langle M\rangle_t))$$
$$t \to +\infty$$

(3) *p. s.* $$\langle M_i\rangle_t \;=\; 0\,(V_i(t)) \text{ où } V_i = \frac{1}{\gamma_{i,i}}\ ;\ i = 1, 2, \dots, d$$

Alors on a :

p. s. $$\limsup_{t\to+\infty} \frac{|X_i(t)|\ \sqrt{V_i(t)}}{\sqrt{2\log\log V_i(t)}} < +\infty \qquad i = 1, \dots, d$$

où $$X = (X_1, \dots, X_d) = \langle M\rangle^{-1} M.$$

La démonstration du **théorème 1** dépend des deux lemmes suivants :

Lemme 1 :

Soit $A = (a_{i,j})_{\le i,j\le d}$ *une matrice définie positive et B la sous-matrice de A définie par :*

$$B = (a_{i,j})_{2\le i,j\le d}$$

Alors on a :

$$\frac{\gamma^1_{i,i}}{\gamma_{i,i}} \le 1 \qquad i = 2, 3; \dots, d$$

où $$\gamma^1_{i,i} = (B^{-1})_{i,i} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{i,i} = (A^{-1})_{i,i}$$

Démonstration du lemme 1 :

Considérons la matrice F définie par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \qquad (F \text{ est d'ordre } d)$$

F est une matrice semi-définie positive.
Donc pour tout vecteur $x \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\frac{x^* F x}{x^* A^{-1} x} \leq \lambda$$ où λ est la plus grande valeur propre de la matrice FA , et x^* est le vecteur transposé de x .

Comme $FA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donc $\lambda = 1$

Pour achever la démonstration, il suffit de choisir pour tout i $(i = 2, \ldots, d)$ le vecteur $x = (x_1 ; \ldots , x_d)^* \in R^d$ tel que $x_i = 1$ et $x_j = 0$ si $j \neq i$.

Lemme 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_d \end{pmatrix}$ *une martingale locale.*

Si le couple $(M , <M>)$ *vérifie les hypothèses* (1) ; (2) *et* (3) , *alors le couple* $(M', <M'>)$ *les vérifie*

où $$M' = \begin{pmatrix} M_2 \\ \vdots \\ M_d \end{pmatrix}$$

Démonstration :

La condition (1) est immédiatement vérifiée.

L'inégalité suivante :

$$\lambda_m(<M>_t) \leq \lambda_m(<M'>_t) \leq \lambda_M(<M'>_t) \leq \lambda_M(<M>_t)$$

(cf [13])

implique la condition (2)

D'après le **lemme 1**, la condition (3) est vérifiée.

<u>Démonstration du théorème 1</u> :

Sans perte de généralité, on suppose $i = 1$

Si $d = 1$, alors on a la loi du logarithme itéré pour les martingales réelles (cf [9]).

$d > 1$:

Une récurrence sur d permet alors d'achever la démonstration.

Remarquons d'abord que d'après (2), le temps d'arrêt T défini par :

$T = inf \{ t : \lambda_m (< M >_t) \geq 1 \}$ est presque surement fini.

Ecrivons :

$$< M >_t = \begin{pmatrix} < M_1 >_t & K_t \\ K_t^* & H_t \end{pmatrix} \text{ où } K_t = (< M_1 , M_2 >_t , \dots , < M_1 , M_d >_t)$$

$$H_t = (< M_i , M_j >)_{2 \leq i,j \leq d} \quad \text{et} \quad < M_i > = < M_i , M_i > \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Pour tout $t \geq T$ on a :

$$X_1 (t) = \frac{M_1 (t)}{V_1 (t)} - \frac{K_t^* \; H_t^{-1} M_t'}{V_1 (t)}$$

et

$$\frac{X_1 (t) \sqrt{V_1 (t)}}{\sqrt{2 V_1 (t) \log \log V_1 (t)}} = \frac{M_1 (t)}{\sqrt{2 V_1 (t) \log \log V_1 (t)}} - \frac{\sum_{i=2}^{d} < M_1 , M_i >_t \; Y_i (t)}{\sqrt{2 V_1 (t) \log \log V_1 (t)}}$$

où
$$Y = (Y_2 , \dots , Y_d) = H^{-1} \; M'$$

D'après (3) et la loi du logarithme itéré pour les martingales réelles (cf [9]) on a :

$$p.s. \qquad \limsup_{t \to +\infty} \frac{|M_1 (t)|}{\sqrt{2 V_1 (t) \log \log V_1 (t)}} < + \infty$$

En vertu du **lemme 2**, le couple (M', H) vérifie les hypothèses (1) , (2) et (3) ; en plus la martingale M'est de dimension $d-1$, en appliquant le principe de récurrence et l'inégalité suivante : (inégalité de Kunita-Watanabe)

$$|< M_1 ; M_i >| \leq \sqrt{< M_1 >} \sqrt{< M_i >} \qquad i = 1, 2, \dots, d$$

on a :

$$p.\,s. \qquad \limsup_{t \to +\infty} \frac{Y_j(t) \sqrt{B_j(t)}}{\sqrt{2\, B_j(t) \log\log B_j(t)}} < +\infty, j = 2, 3, \dots, d$$

où $$B_j = \frac{1}{(H^{-1})_{j,j}}$$

La démonstration du théorème est donc achevée.

Corollaire 1 :

Supposons que le couple $(M ; < M >)$ *vérifie* (1) , (2) *et la condition suivante* :

$$p.\,s. \qquad < M_i >_t \sim V_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots, d$$
$$t \to +\infty$$

alors :

$$p.\,s. \qquad \lim \sup_{t \to +\infty} \frac{|X_i(t)| \sqrt{V_i(t)}}{\sqrt{2\, V_i(t) \log\log V_i(t)}} = 1$$

La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate du **lemme 1** et du **théorème 1**.

III) UNE LOI DU TYPE *log* :

Théorème 2 :

Supposons que le couple $(M ; < M >)$ *vérifie* :

1) $p.\,s.$ $\qquad \lambda_m(< M >_t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $\log \lambda_M(< M >_t) = 0(\log \lambda_m(< M >_t))$

2) $p.\,s$ $\qquad < M_i >_t = 0(V_i(t)) \qquad i = 1, 2, \dots, d$

alors on a :

$$p.s. \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{|X_i(t)| \sqrt{V_i(t)}}{[\log V_i(t)]^{1/2+\varepsilon}} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, d$$

La démonstration de ce théorème est analogue à la preuve du **théorème 1.**
En remarquant que si $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale cadlag réelle localement de carré intégrable de processus croissant $< M >$ alors :

$$p.s. \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{M_t}{\sqrt{< M >_t}\ [\log < M >_t]^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad , \varepsilon > 0$$

(th 2 de [9]).

IV) APPLICATION EN REGRESSION LINEAIRE STOCHASTIQUE :

Considérons le modèle de régression :

$$(5) \qquad Y_t = \int_0^t \theta x_s \; d< e >_s + \sigma \; e_t \qquad t \geq 0$$

Le processus $e = (e_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale réelle cadlag localement de carré intégrable nulle en 0 de processus croissant $< e >$.

Le régresseur stochastique $x = (x_t)_{t \geq 0}$ est un processus cadlag prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. $\theta = (\theta_1 ; \ldots ; \theta_d)$ et σ sont des paramètres inconnus dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Lorsque la matrice Λ_t définie par :

$$(6) \qquad \Lambda_t = \int_0^t x_s x_s^* \; d< e >_s$$

est non-singulier, l'estimateur de moindre carré θ_t de θ s'écrit :

$$(7) \qquad \theta_t = \Lambda_t^{-1} \int_0^t x_s \; d \, y_s$$

d'après (5) ; (6) et (7) on a :

$$(8) \qquad \theta_t - \theta = \sigma \, \Lambda_t^{-1} M_t \;\; où \;\; M = (M_t)_{t \geq 0}$$

est une martingale locale cadlag localement de carré intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie par :

(9) $$M_t = \int_0^t x_s \, d\, e_s \ , \ t \geq 0 \qquad \textit{dont la matrice } <M> = \Lambda.$$

__Corollaire 2__ :

Soit Λ_t définie par (6). *Supposons que* :

a)

(1°) $$\underset{1 \leq i \leq d}{Max} \quad E \ (sup \ | \Delta \ M_i | < + \infty$$

(2°) *p. s.* $$\lambda_m (<M>_t) \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty \quad et \quad \log \log \lambda_M (<M>_t) = 0 \ (\log \log \lambda_m (<M>_t))$$

(3°) *p. s.* $$<M_i>_t = 0 \quad (V_i(t)) \qquad i = 1 , 2 \ldots , d$$

alors on a :

p. s. $$\underset{t \to +\infty}{lim \ sup} \quad \frac{|(\theta_t - \theta)_i| \sqrt{V_i(t)}}{\sqrt{2 \log \log V_i(t)}} < + \infty$$

b) Si les conditions 1) *et* 2) *du théorème* 2 *sont vérifiées alors* :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|(\theta_t - \theta)_i| \sqrt{V_i(t)}}{[\log V_i(t)]^{1/2+\varepsilon}} = 0 \qquad i = 1 , 2 , \ldots , d$$

__Application à des modèles autorégressifs gaussiens à temps continu.__

Suivant [6] on définit le modèle comme suit :

(10) $$d\, x_t = B_\theta \, x_t \, dt + b \ d\omega_t \qquad t \geq 0 \, ; x_0 = 0$$

$\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien réel standard

et

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \end{bmatrix} \qquad \sigma \neq 0$$

$$(11) \qquad B_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & & & \theta_{d-1} & \theta_d \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, \dots, x_d)^* \in \mathbb{R}^d$$

Le processus x définit par (10) est un processus gaussien dont la d ième composante $Y = x_d$ est un processus autoregressif d'ordre d vérifiant l'équation (5) avec $e = \omega$ et $< e >_t = t$, $t \geq 0$.

Désignons par M_θ la plus grande partie réelle des valeurs propres de la matrice B_θ définie par (11).

Pour plus de détails voir [5] ; [6] et [9]).

On a :

Corollaire 3 :

Si $\quad M_\theta < 0 \quad$ *on a : p.s.* $\quad \displaystyle \limsup_{t \to +\infty} \frac{\| \theta_t - \theta \| \sqrt{t}}{\sqrt{\log \log t}} < +\infty$

Remarques :

a) Le modèle autorégressif Gaussien à temps continu est traité dans [5] ; [6] et [9].

Le **corollaire 3** ci-dessus précise l'ordre de la convergence presque sûre des estimateurs obtenus dans [6] et [9].

b) Ces résultats sont applicables à des modèles autorégressifs généraux, par exemple (cf [3]) à temps discret.

c) Dans le cas d'une martingale vectorielle gaussienne, la condition

$p.s \quad \lambda_m \; (< M >_t) \to +\infty$ est suffisante pour que :

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{X_i(t)\sqrt{V_i}(t)}{\sqrt{\log \log V_i(t)}} < \infty \qquad \text{pour } i = 1, \dots d. \quad (\text{cf } [8])$$

Références :

[1] T.W. ANDERSON et John B. TAYLOR :
Strong consistency of least square estimators in dynamic model. Ann of stat 1979 vol 7 n°3.

[2] N. CHRISTOPEIT
Quasi-least square estimation in semi-martingale regression modèls STOCHASTIC 16 1986.

[3] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER :
Probabilité et Potentiel - Tome 2 , Paris 1980 , HERMANN.

[4] T.L. LAI et C.Z. WEI :
Asymptotic properties of general autoregressive model, and strong consistency of least square estimates of their parameters.
J. Multivariate ANAL 13 - 1983 page 23.

[5] A. LE BRETON et M. MUSIELA :
Some parameter estimation problems for hypoelliptic homogeneous gaussian diffusions. BANACH centre publications 16 , 1985 page 337-356.

[6] A. LE BRETON et M. MUSIELA :
Une loi des grands nombres pour les martingales locales continues vectorielles et son application en régression linéaire stochastique.C.R.A.S t 303 n° 9 1986.

[7] A. LE BRETON et M. MUSIELA :
Laws of large numbers for semi-martingales with application in stochastic regression Pre-print.

[8] A. LE BRETON et M. MUSIELA :
Sur le comportement asymptotique des martingales gaussiennes vectorielles. (Communication personnelle non publiée).

[9] A. LE BRETON et M. MUSIELA :
Propriétés asymptotiques et estimation des paramètres pour les diffusions gaussiennes homogènes hypoelliptiques dans le cas purement explosif
C.R.A.S + 299 série n° 6 1954.

[10] D. LEPINGLE :
Sur les comportements asymptotiques des martingales locales.
Lecture Notes in Math vol 649.

[11] A. MEL'NIKOV :
The law of large number for multidimensional martingales.
Soviet Math Dok. vol 33 (1986) n° 1.

[12] A.A. NOVIKOV :
Consistency of L.S. estimates in regression models with martingale errors in STEKLOV Seminar 1984, Statistics and Control of stochastic processes (Springer-Verlag , 1985).

[13] C.R.RAO :
Linear statistical inference and its applications, 2^{d} ème édition 1972.