FRANÇOIS COQUET

Modèles statistiques et systèmes standards de processus de vraisemblance

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1
« Probabilités », , p. 32-45
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___1_32_0>

MODELES STATISTIQUES ET SYSTEMES STANDARDS DE PROCESSUS DE VRAISEMBLANCE

François COQUET
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Summary.
We give a caracterisation for families of processes which can be seen as systems of standart likelihood processes of some filtered experiment.
We deduce then that any weak limit of a sequence of filtered experiments (in the sense of Le Cam [2]) actually is a filtered experiment.

Résumé.
On donne une caractérisation des familles de processus qui peuvent être vus comme les systèmes standards des processus de vraisemblance d'une expérience statistique filtrée.
On en déduit que toute limite faible d'une suite d'expériences filtrées (au sens de Le Cam [2]) est effectivement une expérience filtrée.

Codes A.M.S.: 60F17, 62M.

0. Introduction.

Considérons une suite $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'expériences filtrées, c'est-à-dire de modèles

$$(\Omega^n, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}, (P^n_\theta)_{\theta\in\Theta})$$

où Θ désigne un ensemble quelconque d'indices, et une expérience "limite" $\mathcal{E}$.

On définit la convergence en loi de $(\mathcal{E}^n)$ vers $\mathcal{E}$ quand n tend vers l'infini par la convergence de familles attachées aux $\mathcal{E}^n$, les systèmes standards de processus de vraisemblance (définis en **II.**1.) vers la famille correspondante pour $\mathcal{E}$ (c.f. [1] et [2]).

Nous montrons ici que la faculté pour une famille de variables aléatoires à être le système standard des processus de vraisemblance d'une expérience statistique est préservée par la convergence des lois fini-dimensionnelles, indépendamment de la connaissance a priori d'une expérience limite $\mathcal{E}$. En clair, "si une suite $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'expériences statistiques converge, la limite est encore une expérience statistique".

Le Cam avait déjà obtenu, par des arguments de mesures coniques, ce résultat dans le cas d'expériences non filtrées (voir [2] ou [3]). Nous donnons en **I.** une démonstration élémentaire dans ce cadre, qui a le bon goût de se généraliser facilement aux expériences filtrées: c'est l'objet du **II.**, qui donne la définition, puis une caractérisation "intrinsèque" des systèmes standards de processus de vraisemblance. La partie **III.** contient le résultat annoncé ci-dessus. Enfin, le **IV.** n'a d'autre but que de souligner l'analogie, relativement au problème traité ici, entre la notion de système standard de processus de vraisemblance (directement héritée de [3]), et celle de système standard de processus de densités relatives, utilisée dans [1], et de maniement peut-être plus facile quand aucune mesure ne domine "naturellement" le modèle.

I. Cas d'une expérience statistique non filtrée.

1. Système standard des vraisemblances d'une expérience statistique.

Dans ce qui suit, on se donne un ensemble d'indices Θ, et on appelle A la famille des sous-ensembles finis de Θ. Λ désignera un élément de A, et θ un élément de Θ. Si $\Lambda\in$A, on note:

$$S(\Lambda)=\left\{x=(x^\theta)_{\theta\in\Lambda}\in\mathbb{R}^\Lambda;\ \forall\theta\in\Lambda,\ x^\theta\geq 0 \text{ et } \sum_{\theta\in\Lambda}x^\theta=1\right\}$$

Considérons une expérience statistique $\mathcal{E}=(\Omega,\mathcal{F},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ indicée par Θ.

Définition: On appelle système standard des vraisemblances de $\mathcal{E}$ la famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ où, pour tout $\Lambda\in$A,

$$\sigma_\Lambda=\mathcal{L}\left(\left(\frac{dP_\theta}{d\sum_{\rho\in\Lambda}P_\rho}\right)\Bigg|\sum_{\rho\in\Lambda}P_\rho\right)$$

On notera $z^{\theta/\Lambda}=\dfrac{dP_\theta}{d\sum_{\xi\in\Lambda}P_\xi}$ et $Q(\Lambda)=\sum_{\xi\in\Lambda}P_\xi$

La famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ de mesures sur $S(\Lambda)$ ainsi définie vérifie pour tout $\Lambda\in$A les propriétés suivantes:

(1): $\forall\theta\in\Lambda, \displaystyle\int_{S(\Lambda)} x^\theta \, d\sigma_\Lambda = 1$

(2) (cohérence): Pour tout $\Lambda'\in A$ tel que $\Lambda\subset\Lambda'$, et pour toute fonction f ne dépendant que des coordonnées dans Λ,

$$\int_{S(\Lambda)} f \, d\sigma_\Lambda = \int_{S(\Lambda')} f\left(\left(\frac{x^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho}\right)_{\theta\in\Lambda}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho \, d\sigma_{\Lambda'}$$

(avec la convention, toujours implicite dans la suite, que 0/0 = 0 et que, si a>0, a/0 = $+\infty$).

Nous allons voir que ces deux propriétés caractérisent les systèmes standards de vraisemblances.

2. modèle statistique lié à un système standard.

On se propose maintenant de montrer le résultat suivant:

Proposition 1: Toute famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ de mesures sur $S(\Lambda)$ possédant les propriétés (1) et (2) du 1. est le système standard des vraisemblances d'une expérience $\mathscr{E}$.

démonstration: Considérons donc une telle famille de mesures, et donnons-nous $\Omega = \mathbb{R}_+^{\Theta\times\Theta}$, muni des applications coordonnées $p^{\theta,\xi}$ (avec $(\theta,\xi)\in\Theta^2$), et des tribus $\mathscr{F}^\Lambda=\sigma(p^{\theta,\xi}, (\theta,\xi)\in\Lambda^2)$ (pour $\Lambda\in A$). Soit $\mathscr{F}$ la tribu engendrée par les $\mathscr{F}^\Lambda$ quand Λ décrit A.

Pour construire une probabilité P_θ sur $\mathscr{F}$, il suffit, d'après le théorème de Kolmogorov, de construire, pour chaque $\Lambda\in A$ tel que $\theta\in\Lambda$, une probabilité P_θ^Λ sur $\mathscr{F}^\Lambda$, telle que, si $\Lambda\subset\Lambda'$, P_θ^Λ coïncide avec la restriction à $\mathscr{F}^\Lambda$ de $P_\theta^{\Lambda'}$. Alors, il existe une probabilité P_θ sur $\mathscr{F}$ dont la restriction à tout $\mathscr{F}^\Lambda$ est P_θ^Λ.

Posons alors, pour $\Lambda\in A$, $\theta\in\Lambda$ et f $\mathscr{F}^\Lambda$-mesurable,

$$P_\theta^\Lambda(f) = \int_{S(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x^\xi}{x^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2}\right) x^\theta \, d\sigma_\Lambda$$

D'après la propriété (1), on définit bien ainsi une mesure de probabilité sur $\mathscr{F}^\Lambda$.

De plus, si $\Lambda\subset\Lambda'\in A$, (2) donne:

$$P_\theta^\Lambda(f) = \int_{S(\Lambda)} f\left(\left(\frac{\dfrac{x^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho}}{\dfrac{x^\eta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho}}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2}\right)\frac{x^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho}\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho \, d\sigma_{\Lambda'}$$

$$= P_\theta^{\Lambda'}(f)$$

d'où P_θ sur $\mathcal{F}$.

Il s'agit maintenant de vérifier que l'on a bien, pour $\Lambda\in A$, et pour l'expérience statistique $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$,

$$\sigma_\Lambda = \mathcal{L}((z^{\theta/\Lambda})_{\theta\in\Lambda} \mid Q(\Lambda))$$

Pour cela, nous passons par le

<u>Lemme 2:</u>

$$\forall\theta\in\Lambda\in A,\ z^{\theta/\Lambda} = \frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p^{\rho,\theta}}$$

<u>démonstration</u>: Soient $\Lambda'\in A$ tel que $\Lambda\subset\Lambda'$, et f $\mathcal{F}^{\Lambda'}$-mesurable; on a, pour $\theta\in\Lambda$,

$$P_\theta(f) = \int_{S(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x^\xi}{x^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2}\right)x^\theta \, d\sigma_{\Lambda'}$$

d'où:

$$Q(\Lambda)(f) = \int_{S(\Lambda')} f\left(\left(\frac{x^\xi}{x^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho \, d\sigma_{\Lambda'}$$

On a donc:

$$Q(\Lambda)\left(f\times\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p^{\rho,\theta}}\right) = P_\theta(f)\ ,$$

et comme cette relation est vérifiée par toute f $\mathcal{F}^{\Lambda'}$–mesurable, ceci pour tout $\Lambda'\supset\Lambda$, elle est vérifiée par toute f $\mathcal{F}$–mesurable, et on en déduit:

$$\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p^{\rho,\theta}} = \frac{dP_\theta}{dQ(\Lambda)} = z^{\theta/\Lambda}\ ,$$

d'où le lemme.

<u>*Retour à la Proposition*</u> 1:

D'après le lemme 2, si g est $\mathcal{F}^\Lambda$–mesurable,

$$Q(\Lambda)[g((z^{\theta/\Lambda})_{\theta\in\Lambda})] = Q(\Lambda)\left[g\left(\left(\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p^{\rho,\theta}}\right)_{\theta\in\Lambda}\right)\right]$$

$$= \int_{S(\Lambda)} g\left(\left(\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda}\frac{x^\rho}{x^\theta}}\right)_{\theta\in\Lambda}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho \, d\sigma_\Lambda$$

$$= \int_{S(\Lambda)} g((x^\theta)_{\theta\in\Lambda})\, d\sigma_\Lambda \quad (\text{car } \sum_{\rho\in\Lambda} x^\rho = 1 \ \sigma_\Lambda\text{-p.s.})$$

d'où le résultat annoncé. □

Nous allons voir maintenant une caractérisation analogue dans le cas d'expériences filtrées.

II. Modèle avec filtration.

1. Système standard des processus de vraisemblance d'une expérience filtrée.

On considère maintenant une expérience filtrée $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$. On suppose que $\mathcal{F} = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$; si $\theta\in\Theta$, $\Lambda\in A$ et $t\geq 0$, on note $P_{\theta,t}$ (resp. $Q(\Lambda,t)$) la restriction de P_θ (resp. $Q(\Lambda)$ à la tribu $\mathcal{F}_t$ et , pour $\theta\in\Lambda$,

$$z_t^{\theta/\Lambda} = \frac{dP_{\theta,t}}{dQ(\Lambda,t)}$$

Les autres notations demeurent inchangées par rapport au **I**.

Il s'agit maintenant de trouver un système caractérisant cette expérience filtrée, de la même manière que le système standard des vraisemblances caractérise une expérience non filtrée.

Pour cela, posons, pour $\Lambda\in A$, $S'(\Lambda) = S(\Lambda)^{[0,\infty[}$ et définissons, sur $S'(\Lambda)$ muni de ses boréliens, la mesure suivante:

$$\sigma_\Lambda = \mathcal{L}\left((z_t^{\theta/\Lambda})_{\theta\in\Lambda,\, t\geq 0} \;\middle|\; Q(\Lambda)\right)$$

<u>Définition</u>: La famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ ainsi définie est appelée système standard des processus de vraisemblance de l'expérience filtrée $\mathcal{E}$.

On notera dans la suite, pour $\Lambda\in A$ et $T\geq 0$, $\sigma_{\Lambda,T}$ la restriction à $\mathcal{F}_T$ de σ_Λ.

On a alors la

<u>Proposition 3</u>: la famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ ainsi définie vérifie les trois propriétés

suivantes:

$$(3):\ \forall\theta\in\Lambda\in A,\ \forall T\geq 0, \int_{S'(\Lambda)} x_T^\theta \, d\sigma_\Lambda = 1$$

(4): si $(s,t)\in E^2$, $s\leq t$, et si f ne dépend que des coordonnées dans Λ et dans $[0,s]$,

$$\int_{S'(\Lambda)} f(x)\,(x_t^\theta - x_s^\theta)\, d\sigma_\Lambda = 0$$

(5): si $\Lambda\subset\Lambda'\in A$, et si f ne dépend que des coordonnées dans Λ et dans $[0,T]$,

$$\int_{S'(\Lambda)} f\, d\sigma_\Lambda = \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\theta\in\Lambda,\ t\in[0,T]}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho \, d\sigma_{\Lambda'}$$

démonstration: (3) et (4) proviennent de ce que $(z^{\theta/\Lambda})$ est une $Q(\Lambda)$-martingale d'espérance 1.

(5): On a:

$$\int_{S'(\Lambda)} f\, d\sigma_\Lambda = \int_\Omega f\left(\left(\frac{dP_{\theta,t}}{dQ(\Lambda,t)}\right)_{\theta\in\Lambda,\ t\in[0,T]}\right) dQ(\Lambda,T)$$

$$= \int_\Omega f\left(\left(\frac{\dfrac{dP_{\theta,t}}{dQ(\Lambda',t)}}{\dfrac{dQ(\Lambda,t)}{dQ(\Lambda',t)}}\right)_{\theta\in\Lambda,t\in[0,T]}\right)\frac{dQ(\Lambda,T)}{dQ(\Lambda',T)}\, dQ(\Lambda',T)$$

$$= \int_\Omega f\left(\left(\frac{z_t^{\theta/\Lambda'}}{\sum_{\rho\in\Lambda} z_t^{\rho/\Lambda'}}\right)_{\theta\in\Lambda,\ t\in[0,T]}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} z_T^{\rho/\Lambda'}\, dQ(\Lambda',T)$$

d'où le résultat.

Remarques:

1. Il suffisait, en fait de démontrer (3) et (4) pour s et t appartenant à un sous ensemble dense de $\mathbb{R}_+$, dépendant éventuellement de Λ. Ce point, banal ici, trouvera son intérêt dans le théorème 6, quand on étudiera la convergence fini-dimensionnelle.

2. Si l'utilisation de fonctions f positivement homogènes permettait, pour la condition (2) du **I.** 1., de retrouver immédiatement la cohérence étudiée par Le Cam [2] ou Strasser [3], il n'en va pas de même ici pour la condition (5).

2. Modèle statistique lié à un tel système standard.

Nous arrivons maintenant au résultat principal, à savoir:

Théorème 4: Si une famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ de mesures sur $S'(\Lambda)$ vérifie les propriétés (3), (4) et (5) ci–dessus, il existe une expérience filtrée $\mathcal{E}$ admettant $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ comme système standard de processus de vraisemblance.

démonstration: Considérons une telle famille, l'espace Ω défini en **I**.2. et $\Omega' = \Omega^{[0,\infty[}$, muni des applications coordonnées $p_t^{\theta,\xi}$ pour $(\theta,\xi)\in\Theta^2$ et $t\in[0,\infty[$. On prend sur Ω', et pour $\Lambda\in A$, les tribus $\mathcal{F}^\Lambda = \sigma(p_t^{\theta,\xi}, (\theta, \xi)\in\Lambda^2, t\in[0,\infty[)$, $\mathcal{F} = \bigvee_{\Lambda\in A}\mathcal{F}^\Lambda$, et $\mathcal{F}_t^\Lambda = \sigma(p_s^{\theta,\xi}, (\theta, \xi)\in\Lambda^2, 0\le s\le t)$.

De plus, on note comme précédemment $\sigma_{\Lambda,T}$ la restriction de σ_Λ à la tribu des applications ne dépendant que de [0, T]

De même qu'en **I**, on va définir une probabilité $P_\theta^{\Lambda,T}$ sur chaque $\mathcal{F}_T^\Lambda$ avec $\theta\in\Lambda\in A$, telle que l'on ait cohérence en T et en Λ, et on en concluera d'après le théorème de Kolmogorov à l'existence d'une probabilité P_Λ sur $\mathcal{F}$ dont il faudra vérifier qu'elle admet $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ comme système standard de processus de vraisemblance.

Posons donc, pour toute fonction f $\mathcal{F}_T^\Lambda$–mesurable,

$$P_\theta^{\Lambda,T}(f) = \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{x_t^\eta}\right)_{(\eta,\xi)\in\Lambda^2,\, t\in[0,T]}\right) x_T^\theta \, d\sigma_\Lambda$$

D'après (3), $P_\theta^{\Lambda,T}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega', \mathcal{F}_T^\Lambda)$. De plus,pour $\Lambda\subset\Lambda'$, $\theta\in\Lambda$ et f vérifiant les hypothèses de (5),

$$\int_{\Omega'} f\, dP_\theta^{\Lambda,T} = \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{x_t^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2,t\in[0,T]}\right) x_T^\theta \, d\sigma_\Lambda$$

$$= \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{x_t^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2,t\in[0,T]}\right) \frac{x_T^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho} \sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho \, d\sigma_{\Lambda'}$$

(d'après (5))

$$= \int_{\Omega'} f\, dP_\theta^{\Lambda',T}$$

Par ailleurs, la cohérence en T provient directement de nos définitions, d'où la cohérence de notre famille et P_θ sur $\mathcal{F}$.

Il faut montrer maintenant que $\sigma_{\Lambda,T} = \mathscr{L}((z_t^{\theta/\Lambda})_{(t,\theta)\in[0,T]\times\Lambda} \mid Q(\Lambda,T))$. La procédure est analogue à celle du **I**.

Lemme 5:

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ \forall\theta\in\Lambda\in A,\ z_t^{\theta/\Lambda} = \frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p_t^{\rho,\theta}}$$

démonstration: La propriété (4) nous dit que, si f ne dépend que des évènements antérieurs à $t\leq T$ et de Λ, on a, pour $\Lambda\subset\Lambda'$:

$$P_\theta(f) = \int_{S'(\Lambda')} f\left(\left(\frac{x_s^\xi}{x_s^\eta}\right)_{(\xi,\eta)\in\Lambda^2, s\leq t}\right) x_t^\theta\, d\sigma_{\Lambda,T} \quad ,$$

d'où, par le même raisonnement que dans le lemme 2,le résultat. □

Retour au Théorème 4:

On a donc, si f ne dépend que de Λ et de $[0,T]$,

$$\int_{\Omega'} f\left((z_t^\theta)_{\theta\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) dQ(\Lambda) = \int_{\Omega'} f\left(\left(\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda} p_t^{\rho,\theta}}\right)_{\theta\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) dQ(\Lambda,T)$$

$$= \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{1}{\sum_{\rho\in\Lambda}\left(\frac{x_t^\rho}{x_t^\theta}\right)}\right)_{\theta\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) \sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho\, d\sigma_{\Lambda,T}$$

$$= \int_{S'(\Lambda)} f\, d\sigma_\Lambda \quad \text{car } \forall t\in[0,T],\ \sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho = 1\ \sigma_{\Lambda,T}\text{-p.s.}$$

d'où le théorème. □

3. Fonctions cadlag.

Le résultat ci-dessus présente l'inconvénient suivant: le sous-ensemble D de Ω' constitué des applications continues à droite et limitées à gauche sur Ω n'est pas mesurable pour la tribu $\mathscr{F}$ de Kolmogorov. Par contre, D est de mesure extérieure 1 dans Ω' pour toutes les σ_Λ. On peut donc, sans perte de généralité, considérer les σ_Λ comme portées par D, muni de la tribu trace.

Dans la suite, on se fixe une fois pour toutes une expérience filtrée $\mathscr{E}$, et on conserve les notations précédentes.

III. Convergence fini-dimensionnelle.

Théorème 6: On considère une suite de mesures de probabilité $(\sigma_\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N},\Lambda\in A}$ sur D vérifiant (3)–(4)–(5) et telles que, pour tout Λ, σ_Λ^n converge fini-dimensionnellement le long d'un sous-ensemble E_Λ, dense dans $\mathbb{R}_+$ et dépendant éventuellement de Λ, vers une mesure σ_Λ sur Ω' (ou sur D, voir **II**.3. ci-dessus). Alors la famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ vérifie (3)–(4)–(5).

démonstration: (3) est évident.

(4): pour toute fonction g continue bornée sur D et ne dépendant que d'un nombre fini d'instants $t_1,\ldots t_k$ de E_Λ, $\int g\, d\sigma_\Lambda^n \to \int g\, d\sigma_\Lambda$

Un argument de classe monotone donne le résultat pour une fonction f quelconque $\mathscr{G}$-mesurable ne dépendant que des coordonnées dans Λ et $[0,T] \cap E_\Lambda$.

La remarque 1. du **II**.1., après la proposition 3., permet alors de conclure.

(5) se démontre par le même argument.

IV. Densités relatives.

On considère maintenant, pour $\theta\in\Lambda\in A$, la probabilité σ_Λ^θ sur $B_\Lambda=B^{[0,\infty[}$ (avec $B=[0,\infty[^\Lambda)$ définie par:

$$\sigma_\Lambda^\theta = \mathscr{L}\left((z_t^{\xi/\theta})_{\xi\in\Lambda,\, t\in[0,+\infty[} \mid P_\theta \right),\ \text{où } z_t^{\xi/\theta} = \frac{z_t^{\xi/\Lambda}}{z_t^{\theta/\Lambda}} .$$

Définition: On appelle système standard des processus de densités relatives de l'expérience $\mathcal{E}$ la famille $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ ainsi définie.

De même qu'au **II**, pour $T\geq 0$, on note $\sigma_{\Lambda,T}^\theta$ la restriction de σ_Λ^θ aux évènements antérieurs à l'instant T. On a alors:

$$\sigma_{\Lambda,T}^\theta = \mathscr{L}\left((z_t^{\xi/\theta})_{\xi\in\Lambda,\, t\in[0,T]} \mid P_\theta \right)$$

et la proposition suivante est immédiate:

Proposition 7: On a, pour tout $\theta\in\Lambda\in A$, pour tout $T\geq 0$ et pour toute f ne dépendant que des coordonnées dans Λ et $[0,T]$, les formules de réciprocité suivantes:

$$(6):\ \sigma_\Lambda^\theta(f) = \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{x_t^\theta} \right)_{\xi\in\Lambda,\, t\in[0,T]} \right) x_T^\theta\, d\sigma_\Lambda$$

et:

$$(7):\ \sigma_\Lambda(f)=\sum_{\theta\in\Lambda}\int_{B_\Lambda} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\xi\in\Lambda,t\in[0,T]}\right) d\sigma_\Lambda^\theta$$

Nous donnons maintenant des propriétés "intrinsèques" (et, comme nous le verrons, caractéristiques) des σ_Λ^θ:

Proposition 8: La famille $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ vérifie les quatre propriétés suivantes:

(8): $\forall t\in[0,\infty[,\ \sigma_\Lambda^\theta(x_t^\theta=1)=1$

(9): si $s\leq t$, et si g ne dépend que des coordonnées dans [0, s] et Λ, pour $\theta\in\Lambda$, en posant:

$$M(g,\theta,t)=\sum_{\xi\in\Lambda}\int_{S'(\Lambda)} g\left(\left(\frac{x_r^\eta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_r^\rho}\right)_{\eta\in\Lambda,r\leq s}\right)\frac{x_t^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\, d\sigma_\Lambda^\xi$$

on a: $M(g,\theta,t)=M(g,\theta,s)$

(10): si $(\theta,\xi)\in\Lambda^2$, et si f ne dépend que des coordonnées dans Λ et [0,T],

$$\sigma_\Lambda^\xi(f)=\sigma_\Lambda^\xi(f\,1_{\{x_T^\theta=0\}})+\int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\eta}{x_t^\xi}\right)_{\eta\in\Lambda,t\in[0,T]}\right)x_t^\xi\, d\sigma_\Lambda^\theta$$

(11): si $\theta\in\Lambda\subset\Lambda'\in A$, et si f ne dépend que des coordonnées dans Λ,

$$\sigma_\Lambda^\theta(f)=\sigma_{\Lambda'}^\theta(f);$$

de plus, si f ne dépend que des coordonnées dans [0,T],

$$\sum_{\theta\in\Lambda}\int_{B_\Lambda} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\xi\in\Lambda,t\in[0,T]}\right) d\sigma_\Lambda^\theta=\sum_{\theta\in\Lambda'}\int_{B_{\Lambda'}} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\xi\in\Lambda,\,t\in[0,T]}\right)\frac{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho}{\sum_{\rho\in\Lambda'} x_T^\rho}\, d\sigma_{\Lambda'}^\theta$$

démonstration: (8) et la première partie de (11) sont immédiats; pour la deuxième partie de (11), la formule (6) donne:

$$\sum_{\theta\in\Lambda}\int_{B_\Lambda} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\xi\in\Lambda,t\in[0,T]}\right) d\sigma_\Lambda^\theta=\sigma_\Lambda(f)$$

$$=\int_{B_{\Lambda'}} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho}\right)_{\xi\in\Lambda,t\in[0,T]}\right)\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho\, d\sigma_{\Lambda'}$$

(d'après (5))

$$= \sum_{\theta\in\Lambda'} \int_{B_{\Lambda'}} f\left(\left(\frac{\dfrac{x_t^\xi}{\sum_{\eta\in\Lambda'} x_t^\eta}}{\sum_{\rho\in\Lambda}\left(\dfrac{x_t^\rho}{\sum_{\eta\in\Lambda'} x_t^\eta}\right)}\right)_{\xi\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) \sum_{\rho\in\Lambda}\left(\frac{x_T^\rho}{\sum_{\eta\in\Lambda'} x_T^\eta}\right) d\sigma_{\Lambda'}^\theta$$

(toujours d'après (11))

d'où le résultat.

(9) est une simple transposition de (4) (cf. **II**.1.). En effet,

$$M(g,\theta,t) = \sum_{\xi\in\Lambda} \int_{\Omega'} g\left(\left(\frac{z_r^{\eta/\xi}}{\sum_{\rho\in\Lambda} z_r^{\rho/\xi}}\right)_{\eta\in\Lambda, r\leq s}\right) \frac{z_t^{\theta/\xi}}{\sum_{\rho\in\Lambda} z_t^{\rho/\xi}} dP_\xi$$

$$= \int_{\Omega'} g\left(\left(\frac{z_r^{\eta/\Lambda}}{\sum_{\rho\in\Lambda} z_r^{\rho/\Lambda}}\right)_{\eta\in\Lambda, r\leq s}\right) \frac{z_t^{\theta/\Lambda}}{\sum_{\rho\in\Lambda} z_t^{\rho/\Lambda}} dQ(\Lambda)$$

$$= \int_{S'(\Lambda)} g\left(\left(\frac{x_r^\eta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_r^\rho}\right)_{\eta\in\Lambda, r\leq s}\right) x_t^\theta \, d\sigma_\Lambda^\xi$$

(car $\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho = 1$ σ_Λ -p.s.)

$$= \int_{S'(\Lambda)} g\left(\left(\frac{x_r^\eta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_r^\rho}\right)_{\eta\in\Lambda, r\leq s}\right) x_s^\theta \, d\sigma_\Lambda^\xi$$

(d'après (4))

$$= M(g,\theta,s)$$

Il reste à montrer (10): soit f vérifiant les conditions requises;

$$\sigma_\Lambda^\xi(f) - \sigma_\Lambda^\xi\left(f 1_{\{x_T^\theta=0\}}\right) = \int_{\Omega'} f\left((z_t^{\eta/\xi})_{\eta\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) 1_{\{z_T^{\theta/\xi}>0\}} \, dP_{\xi,T}$$

$$= \int_{\Omega'} f\left((z_t^{\eta/\xi})_{\eta\in\Lambda, t\in[0,T]}\right) 1_{\{z_T^{\theta/\xi}>0\}} \, z_T^{\xi/\theta} \, dP_{\theta,T}$$

(en effet, sur $\{z_T^{\theta/\xi} > 0\}$, on peut multiplier et diviser par $z_T^{\theta/\Lambda}$)

$$= \int_{\Omega'} f\left((z_t^{\eta/\xi})_{\eta\in\Lambda, t\in[0,T]} \right) z_T^{\xi/\theta}\, dP_{\theta,T}$$

(car $z_T^{\theta/\xi} > 0$ $P_{\theta,T}$-p.s.)

$$= \int_{\Omega'} f\left(\left(\frac{z_t^{\eta/\theta}}{z_t^{\xi/\theta}} \right)_{\eta\in\Lambda, t\in[0,T]} \right) z_T^{\xi/\theta}\, dP_{\theta,T}$$

(en effet, pour pouvoir effectuer la division à l'intérieur de la parenthèse de f, il faut que $\forall t\le T$, $z_t^{\xi/\theta} > 0$. Or cela est vérifié si et seulement si $z_T^{\xi/\theta} > 0$, car une surmartingale positive nulle en t est nulle pour tout $s\ge t$; en outre, le terme résiduel [quand $z_T^{\xi/\theta}=0$] est nul).

$$= \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^{\eta}}{x_t^{\xi}} \right)_{\eta\in\Lambda, t\in[0,T]} \right) x_T^{\xi}\, d\sigma_\Lambda$$

d'où (10) et la proposition 8. □

Il vient alors le

Lemme 9: Il y a correspondance bi-univoque entre les familles $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ de mesures sur $S'(\Lambda)$ vérifiant (3)–(4)–(5) et les familles $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ de probabilités sur B_Λ vérifiant (8)–(9)–(10)–(11).

démonstration: D'après ce qui précède, la donnée de $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ vérifiant (3)–(4)–(5) mène à la construction d'une expérience filtrée $\mathcal{E}$, d'où son système des processus de densités relatives $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$, qui vérifie (8)–(9)–(10)–(11).

Réciproquement, soit un système $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ vérifiant ces propriétés, et soit, pour $\Lambda\in A$, σ_Λ donné, pour f ne dépendant que de [0,T] et Λ, par (7).

(De même qu'en **II** 1., on définit bien ainsi une mesure sur $\mathcal{F}$ ne chargeant que $S'(\Lambda)$. On conserve les notations $\sigma_{\Lambda,T}$ et $\sigma_{\Lambda,T}^\theta$ ci-dessus.)

On a alors:

$$\square \int_{S'(\Lambda)} x_T^\xi\, d\sigma_{\Lambda,T} = \sum_{\theta\in\Lambda} \int_{B_\Lambda} \frac{x_T^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho}\, d\sigma_\Lambda^\theta$$

(d'après (7))

$$= \sum_{\theta\in\Lambda} \left(\int_{B_\Lambda} \frac{x_T^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho} 1_{\{x_T^\xi=0\}} \, d\sigma_\Lambda^\theta + \int_{B_\Lambda} \frac{\frac{x_T^\xi}{x_T^\theta}}{\sum_{\rho\in\Lambda}\left(\frac{x_T^\rho}{x_T^\theta}\right)} x_T^\theta \, d\sigma_\Lambda^\xi \right)$$

(d'après (10))

$$= \sum_{\theta\in\Lambda} \left(\int_{B_\Lambda} \frac{x_T^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho} \; x_T^\theta \, d\sigma_\Lambda^\xi \right)$$

$$= \sum_{\theta\in\Lambda} \left(\int_{B_\Lambda} \frac{x_T^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho} \; d\sigma_\Lambda^\xi \right)$$

(d'après (8))

$= 1$ d'où (3)

□ Sous les hypothèses de (4),

$$\int_{S'(\Lambda)} f(x)\, x_t^\theta \, d\sigma_\Lambda = \sum_{\xi\varepsilon\Lambda} \int_{B_\Lambda} f\left(\left(\frac{x_r^\eta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_r^\rho} \right)_{\eta\in\Lambda, r\le s} \right) \frac{x_t^\theta}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho} \, d\sigma_\Lambda^\xi$$

$= M(f,\theta, t)$ (cf. (7))

$= M(f,\theta,s)$

$$= \int_{S'(\Lambda)} f(x)\, x_s^\theta \, d\sigma_\Lambda \qquad \text{d'où (4)}$$

□ Enfin, si $\Lambda\subset\Lambda'$, et sous les hypothèses de (5),

$$\sigma_{\Lambda,T}(f) = \sum_{\theta\in\Lambda} \int_{B_\Lambda} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho} \right)_{\xi\in\Lambda, t\in[0,T]} \right) d\sigma_{\Lambda,T}^\theta$$

$$= \sum_{\theta\in\Lambda'} \int_{B_{\Lambda'}} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho} \right)_{\xi\in\Lambda,\, t\in[0,T]} \right) \frac{\sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho}{\sum_{\rho\in\Lambda'} x_T^\rho} \, d\sigma_{\Lambda'}^\theta$$

(d'après (11), deuxième partie)

$$= \int_{S'(\Lambda)} f\left(\left(\frac{x_t^\xi}{\sum_{\rho\in\Lambda} x_t^\rho} \right)_{\xi\in\Lambda, t\in[0,T]} \right) \sum_{\rho\in\Lambda} x_T^\rho \, d\sigma_{\Lambda';T}$$

d'où (5) et le lemme 9 □

Théorème 10: Soit $(\sigma_\Lambda^{n,\theta})_{\theta\in\Lambda\in A, n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur B_Λ vérifiant (8)–(9)–(10)–(11), telle que, pour tout Λ et tout $\theta\in\Lambda$, la suite $(\sigma_\Lambda^{n,\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fini-dimensionnellement, quand n tend vers $+\infty$, vers une mesure σ_Λ^θ sur B_Λ; alors la famille $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ vérifie (8)–(9)–(10)–(11).

démonstration: le lemme précédent permet d'affirmer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\sigma_\Lambda^{n,\theta})_{\theta\in\Lambda\in A}$ est le système standard des processus de densités relatives d'une expérience $\mathcal{E}^n$, dont le système standard des vraisemblances $(\sigma_\Lambda^n)_{\Lambda\in A}$ est donné par la formule (7).

Cette même formule (7) prouve immédiatement que, pour tout Λ, la suite $(\sigma_\Lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fini-dimensionnellement, quand n tend vers $+\infty$, vers une mesure σ_Λ.

D'après les théorèmes 4 et 6, $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\in A}$ est le système standard des processus de vraisemblance d'une expérience $\mathcal{E}$. Enfin, il est clair que, pour tout $\theta\in\Lambda\in A$, σ_Λ et σ_Λ^θ vérifient entre elles les relations (6) et (7), et donc que $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ est le système standard des processus de densités relatives de $\mathcal{E}$.

Par suite, $(\sigma_\Lambda^\theta)_{\theta\in\Lambda\in A}$ vérifie (8)–(9)–(10)–(11) et le théorème est démontré. □

La conclusion suivante est désormais immédiate:

Théorème 11: (i) Si une suite $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'expériences filtrées converge faiblement le long d'un ensemble dense (au sens de [1]), la limite est une expérience filtrée.

(ii) On obtient le même résultat si $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fonctionnellement faiblement (toujours selon la définition de [1]).

Bibliographie:

J. Jacod: [1] Convergence of filtered statistical models and Hellinger processes. Preprint (1987)

L. Le Cam: [2] Asymptotic methods in statistical decision theory. Springer Verlag, New-York (1986)

H. Strasser: [3] Mathematical theory of statistics. De Gruyter, Amsterdam (1985)

C. Dellacherie, P.A. Meyer: Probabilités et potentiel II. Hermann, Paris (1982)