Jean-Pierre Conze
Emmanuel Lesigne

Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1 « Probabilités », , p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___1_1_0>

SUR UN THEOREME ERGODIQUE POUR DES MESURES DIAGONALES

Jean-Pierre CONZE (*)

Emmanuel LESIGNE (**)

Résumé : En reprenant l'étude d'une équation fonctionnelle associée à la convergence des moyennes ergodiques de la forme

(1) $$\frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} f(T^n x).\ g(T^{2n}x).\ h\ (T^{3n}x)$$

on montre que le comportement de (1) fait intervenir les translations sur les nilvariétés. Ce résultat complète, en la corrigeant, une démonstration de la convergence dans L^1 de (1), donnée dans [1] et [4].

Ce travail a été annoncé dans [2].

Code AMS : 28 D

(*) J.P.C. : IRMAR Université de Rennes I . 35O42 RENNES CEDEX

(**) E.L. : Université de Bretagne Occidentale - Département de Mathématiques - 6 Av. Le Gorgeu - 29287 BREST CEDEX

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de donner une démonstration du résultat suivant :

> Théorème : Soient $(X, \mathfrak{a}, \mu)$ un espace probabilisé, T une transformation préservant la mesure sur cet espace, ergodique ainsi que toutes ses puissances et f, g, h trois fonctions mesurables et bornées sur $(X, \mathfrak{a})$. On a alors : les moyennes
>
> (1) $$\frac{1}{N}\sum_{n=O}^{N-1} f \circ T^n . g \circ T^{2n} . h \circ T^{3n}$$
>
> convergent dans $L^1(\mu)$.

Nous renvoyons à [1] pour une présentation générale du problème étudié.

Le théorème était énoncé dans [1], mais la démonstration en était incomplète, une erreur apparaissant dans l'étude d'une équation fonctionnelle ([4]).

Nous affirmions dans [1] que les expressions (1) convergent vers O en moyenne dès que f, g, ou h est orthogonal au "spectre discret au sens d'Abramov". H. Furstenberg et B. Weiss ont remarqué que cette réduction était abusive en construisant un contre-exemple à partir d'une translation sur un quotient de groupe nilpotent.

Présentons le plan de cet article.

Dans la première partie nous définissons un nouveau type de spectre discret généralisé qui remplacera le type d'Abramov dans la démonstration du théorème. Nous indiquons la stratégie générale de cette démonstration.

La seconde partie est consacrée à l'énoncé d'un théorème ergodique "du type Wiener-Wintner" pour des translations sur les quotients compacts de groupes nilpotents.

Après ces deux courtes parties d'exposition, arrivent les parties techniques. Dans la troisième nous reprenons l'étude de l'équation fonctionnelle. Les définitions et les résultats intermédiaires y sont précisément décrits.

Enfin nous complétons la démonstration du théorème dans la quatrième partie. Nous y reprenons "en cours de route" la preuve donnée dans [1].

I SPECTRE DISCRET GENERALISE

I- 1 Définitions

On appelle extension d'une nil-translation par un caractère tout système dynamique probabilisé (Y, B, ν, S) de la forme

$$Y = N/\Gamma \times S^{d-1}, \nu = \nu_1 \otimes \nu_2,$$

$$S(x.\Gamma, y) = (x_o x.\Gamma, \sigma(x)\, Dy) \qquad \text{si } x \in N \text{ et } y \in S^{d-1}, \text{ où}$$

N est un groupe nilpotent (connexe, simplement connexe et d'ordre 2),
Γ est un sous-groupe discret de N tel que N/Γ soit compact,
S^{d-1} est la sphère unité de $\mathbb{C}^d$,
B est la tribu borélienne de Y,
ν_1 est la probabilité sur N/Γ invariante sous l'action de N,
ν_2 est la probabilité uniforme sur S^{d-1},
x_o est un élément fixé de N,
σ est un caractère de N, identique à 1 sur Γ, et D est une matrice diagonale unitaire.

Soit $(X, \mathcal{Q}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé. On considère toutes les sous-tribus $\mathcal{Q}'$ de $\mathcal{Q}$ qui vérifient

$$(*)\begin{cases} \text{il existe un entier } d > 0 \text{ tel que le système } (X, \mathcal{Q}', \mu, T^d) \\ \text{soit, à isomorphisme près,} \\ \text{un facteur d'une "extension d'une nil translation par un caractère"} \end{cases}$$

L'ensemble de ces sous-tribus engendre une sous-tribu $\mathcal{D}$ de $\mathcal{Q}$. Remarquons que la tribu $\mathcal{D}$ est limite croissante d'une suite de sous-tribus de $\mathcal{Q}$ vérifiant (*).

Le système $(X, \mathcal{D}, \mu, T)$ est le plus petit facteur du système initial qui "contienne" tous les systèmes dont une puissance est un facteur d'une "extension d'une nil-translation par un caractère".

Ce concept de spectre discret généralisé ne sera pas utilisé dans la suite ; il peut toutefois aider à la compréhension de la démonstration grâce à la présentation qui suit.

I- 2 Une présentation de la preuve du théorème

Nous corrigeons ici les affirmations (5) et (6) figurant dans [1], page 161. Les deux points fondamentaux de la démonstration sont :

(5)' pour $f, g, h \in L^\infty(\mu)$,

si f, g ou h est orthogonal (dans $L^2(\mu)$) à $L^2(\mathcal{D},\mu)$,

alors $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum f \circ T^n \,.\, g \circ T^{2n} .\, h \circ T^{3n} = O$ dans $L^1(\mu)$;

(6)' pour tous f, g, h bornées et $\mathcal{D}$-mesurables, la suite $\left(\frac{1}{N} \sum f \circ T^n \,.\, g \circ T^{2n} .\, h \circ T^{3n}\right)$ converge μ- presque partout.

II - UN THEOREME ERGODIQUE POUR LES NIL-TRANSLATIONS

Soit L un groupe nilpotent d'ordre 2, connexe, simplement connexe et de dimension finie. Soient a un élément de L et D un sous-groupe discret de L tel que $L/_D$ soit compact.

Le résultat suivant a été démontré dans [5] :

(A) pour toute fonction continue g sur $L/_D$ et tout $\lambda \in L$,

la suite $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=O}^{N-1} g(a^n\lambda.D)$ est convergente.

On utilise, pour démontrer (A), le théorème ergodique de Wiener-Wintner. Dans [6], on trouve la généralisation suivante de ce théorème :

(B) soient $(\Omega, \mathcal{T}, P, \vartheta)$ un système dynamique probabilisé et f une fonction intégrable sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$; il existe une partie Ω' de Ω telle que $P(\Omega') = 1$ et, pour tout polynôme réel Q et tout $\omega \in \Omega'$, la suite

$$\frac{1}{N} \sum_{n=O}^{N-1} \exp(2i\pi Q(n)).\ f(\vartheta^n\omega)$$

est convergente.

En utilisant (B) dans la technique mise en place pour prouver (A), on obtient le résultat suivant.

<u>Théorème</u>: Pour toute fonction continue g sur $L/_D$, pour tout $\lambda \in L$, pour tout polynôme réel Q, la suite

$$\frac{1}{N} \sum_{n=O}^{N-1} \exp(2i\pi Q(n)).\ g(a^n\lambda.D)$$

est convergente.

III - RESOLUTION D'UNE EQUATION FONCTIONNELLE

Présentation du plan :

Dans un premier paragraphe nous présentons l'équation fonctionnelle, deux exemples de solutions et le théorème donnant la forme générale des solutions de l'équation ; dans une seconde partie, nous rappelons la définition et les propriétés caractéristiques des fonctions matricielles irréductibles définies sur un système dynamique ; le troisième paragraphe est consacré à l'étude de "l'équation fonctionnelle sans constante λ_t", sans hypothèse d'irréductibilité ; enfin la démonstration du théorème est décrite dans la quatrième partie.

Les passages de la démonstration qui sont déjà présents dans [4] ne seront pas reproduits ici.

III-1 Enoncé du résultat

Nous notons $\mathfrak{M}_d$ l'anneau des matrices complexes (d,d) et U_d le groupe des matrices unitaires (d,d).

Nous considérons un groupe G compact, abélien, connexe, à base dénombrable, muni de sa tribu borélienne et de sa probabilité de Haar. Nous fixons un élément α de G tel que la translation $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ soit ergodique sur G, et, pour un entier $d > 0$, une application H de G dans U_d.
Nous supposons que H est une fonction matricielle irréductible pour T_α (cf. III-2).

Nous dirons que H satisfait à l'équation fonctionnelle (E) si :

> pour tout $t \in G$, il existe une application mesurable F_t de G dans $\mathfrak{M}_d$, non presque partout nulle, et un nombre complexe λ_t, de module 1 et dépendant mesurablement de t, tels que
>
> (1) $$H(x+t) \,.\, F_t(x) = \lambda_t \,.\, F_t(x+\alpha).\, H(x), \qquad \text{p.p.}$$

Exemples. a) Si $d = 1$ et si H est un caractère du groupe G, on a bien sûr H solution de (E), avec $F_t \equiv 1$ et $\lambda_t = H(t)$.

b) Le second exemple est moins trivial et a été donné par H. Furstenberg et B. Weiss : nous allons construire H comme cobord dans une extension de (G, T_α), extension qui sera du type "translation sur une nil-variété". On aura encore $d = 1$.

Soient p un entier > 0, B une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, à coefficients entiers. Sur $N = \mathbb{R}^{p+1}$, on définit une loi de groupe nilpotent (notée $*$) par

$$(x,x') * (y,y') = (x+y,\ x'+y' + B(x,y))$$
$$\text{où } x, y \in \mathbb{R}^p \text{ et } x', y' \in \mathbb{R}.$$

Le sous-groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^{p+1}$ est discret dans N et le quotient $N/_\Gamma$ est compact. Soit α un élément de $\mathbb{R}^p$ induisant une translation ergodique du tore $\mathbb{R}^p/_{\mathbb{Z}^p}$. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^p$, de module 1, telle que la fonction F définie sur N par

$$F(x,x') = f(x) \,.\, e^{2i\pi x'}$$

soit invariante à droite par Γ ; (toute fonction mesurable de $[O,1]^p$ dans U_1 se prolonge en une telle fonction f). Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, posons

$$H(x) = f(\alpha+x) . \overline{f(x)} . e^{2i\pi B(\alpha,x)}.$$

Remarquons que, pour $x \in \mathbb{R}^p$ et $x' \in \mathbb{R}$, on a

$$H(x) = F((\alpha,O) * (x,x')) . \overline{F(x,x')}.$$

On vérifie sans peine que H est définie sur le tore $G = \mathbb{R}^p/_{\mathbb{Z}^p}$ et est solution de (E) avec

$$F_t(x) = f(x+t) . \overline{f(x)} \quad \text{et} \quad \lambda_t = e^{2i\pi B(\alpha,t)}.$$

Remarque : Si H est solution de (E), alors toute fonction matricielle cohomologue à H est encore solution de (E). (Une fonction matricielle K est dite cohomologue à H si elle est de la forme

$$K(x) = A(x+ \alpha). H(x). A(x)^{-1}$$

où A est une application mesurable de G dans $G\mathcal{L}_d(\mathbb{C})$).

Nous allons voir qu'en un sens, les exemples ci-dessus représentent les seuls cas possibles d'existence de solutions de (E).

Théorème : Soit H une solution de (E). On a alors :

a) Il existe un groupe compact abélien $\tilde{G}$, un homomorphisme surjectif p de $\tilde{G}$ sur G et un élément $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{G}$ tels que $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$;

il existe une matrice unitaire diagonale D, une application mesurable M de G dans U_d, une application mesurable A de $\tilde{G}$ dans U_d, une application mesurable f de $\tilde{G}$ dans U_1 tels que :

pour presque tout $\tilde{x}$ dans $\tilde{G}$,

$$H(p(\tilde{x})) = f(\tilde{x}). A(\tilde{x} + \tilde{\alpha}). D.A(\tilde{x})^{-1}. M (p(\tilde{x})) \tag{2}$$

et les applications M et f vérifient les propriétés décrites dans b) et c).

b) il existe un scalaire μ dans U_1, un caractère γ de G et une matrice scalaire S tels que pour presque tout x dans G,

$$\underline{M(x+\alpha) = \mu\ H(x).\ M(x)\ .\ H(x)^{-1}}\ .$$

$$M^d(x) = \gamma(x). S \quad \text{et} \quad \mu^d = \gamma(\alpha). \tag{3}$$

c) La fonction f est un cobord dans une extension nilpotente de $(\tilde{G}, T_{\tilde{\alpha}})$; plus précisément, il existe un groupe nilpotent N de dimension finie, connexe, simplement connexe et d'ordre 2, dont on note N' le sous-groupe dérivé ;

il existe un sous-groupe discret Γ tel que $N/_\Gamma$ soit compact ;

il existe un homomorphisme surjectif p_2 de $\tilde{G}$ sur le groupe compact abélien $N/_{\Gamma N'}$,

une application mesurable b de $N/_{\Gamma}$ dans U_1 et un élément a de N tels que

(4) $p_2(\tilde{\alpha}) = a.\Gamma N'$ et

si $\tilde{x} \in \tilde{G}, \nu \in N$ et $p_2(\tilde{x}) = \nu.\Gamma N'$, alors

(5) $\underline{f(\tilde{x}) = b(a.\ \nu.\Gamma).\ \overline{b(\nu.\Gamma)}}$.

Commentaires : Si on compare l'énoncé du théorème aux deux exemples donnés précédemment, on peut considérer que la fonction M joue le rôle de la fonction H du premier exemple, et que la fonction f joue le rôle de la fonction H du second exemple.

Essayons de résumer le théorème : notons R, $\tilde{R}$, R' et R'' les translations de, respectivement, G, $\tilde{G}$, $N/_{\Gamma N'}$ et $N/_{\Gamma}$ définies par $R(x) = x+\alpha$, $\tilde{R}(\tilde{x}) = \tilde{x} + \tilde{\alpha}$,

$R'(\nu.\Gamma N') = a\nu.\Gamma N'$ et $R''(\nu.\Gamma) = a\nu.\Gamma$;

on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & (\tilde{G}, \tilde{R}) \xrightarrow{p} (G, R) \\ & \downarrow p_2 & \\ (N/_{\Gamma}, R'') \longrightarrow (N/_{\Gamma N'}, R') & & \end{array}$$

où les flèches désignent des homomorphismes de systèmes dynamiques mesurés ; au facteur multiplicatif M près, la fonction matricielle H est cohomologue, dans l'extension $(\tilde{G}, \tilde{R})$ de (G,R), au produit d'une matrice diagonale constante et d'une fonction scalaire f. Cette fonction f est en fait définie sur le facteur $(N/_{\Gamma N'}, R')$ de $(\tilde{G}, \tilde{R})$, et elle est un cobord dans l'extension $(N/_{\Gamma}, R'')$ de $(N/_{\Gamma N'}, R')$.

Corollaires : On peut compléter l'énoncé du théorème par les deux points suivants :

d) il existe une matrice unitaire diagonale E telle que, pour presque tout $\tilde{x}$ dans $\tilde{G}$,

(6) $H^{(d)}(p(\tilde{x})) = \gamma(p(\tilde{x}))\ .\ f^{(d)}(\tilde{x})\ .\ A(\tilde{x} + d\tilde{\alpha})\ .\ E\ .\ A(\tilde{x})^{-1}$

où l'on note $H^{(k)}(x) = H(x+(k-1)\alpha).\ H(x+(k-2)\alpha)\dots H(x)$

et $f^{(k)}(\tilde{x}) = f(\tilde{x} + (k-1)\tilde{\alpha})\ .\ f(\tilde{x} + (k-2)\tilde{\alpha})\dots\ f(\tilde{x})$;

e) soit m un multiple de d ; quitte à modifier f, γ, S, E et a, on peut remplacer dans l'énoncé du théorème les affirmations (3) , (4) et (5) par

$M^m(x) = \gamma(x).\ S$ et $\mu^m = \gamma(\alpha)$,

$p_2(m\tilde{\alpha}) = a.\Gamma N'$ et

$H^{(m)}(p(\tilde{x})) = \gamma(p(\tilde{x}))\ .\ f(\tilde{x})\ .\ A(\tilde{x}+m\tilde{\alpha}).\ E\ .\ A(\tilde{x})^{-1}$.

Remarque : Dans toute la suite, et sauf mention explicite du contraire, les égalités entre applications définies sur un espace mesuré seront des égalités presque partout.

III - 2 Irréductibilité

Soient $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré ergodique et H une application mesurable de X dans U_d.

On peut montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il n'existe pas d'application mesurable P de X dans U_d telle que

$P(Tx). H(x). P(x)^{-1}$ soit décomposée en blocs diagonaux ;

(ii) si A et N sont des applications mesurables de X dans $\mathcal{M}_d$, telles que

$A(Tx) . H(x) = N(x) . A(x)$, alors $A \equiv O$ ou A est presque partout inversible ;

(iii) si A est une application mesurable de X dans $\mathcal{M}_d$, telle que

$A(Tx) = H(x) . A(x) . H(x)^{-1}$, alors A est égale à une matrice scalaire constante.

Une application H vérifiant ces propriétés sera appelée une fonction matricielle irréductible.

En reprenant le vocabulaire utilisé dans [1], on peut dire qu'une fonction matricielle est irréductible si et seulement si elle représente, dans une extension du système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, la transformation restreinte à un $(\mathcal{B}, T)$-module irréductible.

III - 3 Un résultat préliminaire

Considérons le système dynamique (G, T_α) précédemment présenté. Soit H une application mesurable de G dans U_d.

Nous dirons que H satisfait à l'équation fonctionnelle (E'), si :

> il existe une partie non négligeable de G, notée V, telle que, pour tout $t \in V$, il existe une application F_t, mesurable et non nulle, de G dans $\mathcal{M}_d$ vérifiant
>
> (7) $H(x+t) . F_t(x) = F_t(x+\alpha) . H(x)$.

<u>Proposition</u> : Soit H une fonction matricielle irréductible sur (G, T_α), satisfaisant à (E'). On a alors :

H est une fonction scalaire (c'est à dire $d = 1$) cohomologue à une constante. Autrement dit, il existe une fonction b, mesurable et de module 1, et une constante δ, de module 1, telles que

$$H(x) = \delta . b(x+\alpha) . \overline{b(x)}.$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [4], pages 180-183.

<u>Corollaire</u> : Soit H une solution de (E'), non nécessairement irréductible.

On a alors :

H est cohomologue à une matrice diagonale constante. Autrement dit, il existe une appliction mesurable B de G dans U_d et une matrice unitaire diagonale D telles que

$$H(x) = B(x+\alpha) . D. B(x)^{-1}.$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition précédente et du fait que la fonction matricielle H peut s'écrire sous la forme

$$H(x) = M(x+\alpha) \begin{pmatrix} H_1(x) & & O \\ & H_2(x) & \\ & \ddots & \\ O & & H_k(x) \end{pmatrix} M(x)^{-1}$$

où M est une application mesurable de G dans U_d et où les H_i sont des fonctions matricielles irréductibles sur G.

III- 4 Démonstration du théorème et du corollaire

Cette démonstration se déroule en plusieurs étapes. En voici le plan.

1) Réduction au cas où F_t est à valeurs dans U_d.

2) Réduction au cas où $F_t(x)$ est une fonction mesurable du couple (t,x).

3) Etude de l'équation $M(x+\alpha) = \mu \,.\, H(x).\, M(x) \,.\, H(x)^{-1}$.

4) Réduction au cas où λ_t vérifie, au voisinage de O, une propriété d'homomorphisme.

5) Passage à une rotation arbitraire sur G.

6) Etude de certaines fonctions définies sur G x G et vérifiant, au voisinage de O, une propriété de bihomomorphisme.

7) Construction, dans une extension $(\tilde{G}, \tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \tilde{\alpha})$ de (G, T_α), d'une solution scalaire de l'équation fonctionnelle.

8) Etude des relations liant H à la solution scalaire précédente. Ceci achèvera la preuve de **a**).

9) Preuve de **b**).

10) Construction d'une "nil-translation". Preuve de **c**).

11)Preuve de **d**) et **e**).

---

1) On peut supposer que H est solution de (E) avec la condition supplémentaire que les applications F_t sont à valeurs dans U_d. Ceci est démontré dans [4], page 184.

---

2) On peut supposer que H est solution de (E) avec la condition supplémentaire que l'application $(t,x) \mapsto F_t(x)$ est mesurable sur $G \times G$. Ceci est démontré dans [4], pages 184-186.

---

3) Notons $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ l'ensemble des matrices (d,d) à coefficients dans $L^2(G)$, muni du produit scalaire hilbertien

$$\langle M,N \rangle = \frac{1}{d} \int_G tr(M(x) \,.\, N^*(x))\ dx.$$

Il existe une famille orthonormée $U_H(d)$ de $\mathcal{M}_d(L^2(G))$, formée de fonctions matricielles unitaires, et un groupe dénombrable $\Gamma = \left\{ \mu_U \mid U \in U_H(d) \right\}$ de complexes de module 1 tels que :

$$(8)\quad \begin{cases} \text{si } M \text{ est un élément non nul de } \mathcal{M}_d(L^2(G)) \text{ vérifiant} \\ M(x+\alpha) = \mu.H(x).M(x).H(x)^{-1} \text{ avec } \mu \in \mathbb{C} \\ \text{alors il existe } U \in U_H(d) \text{ et } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que} \\ M = \lambda.U \text{ et } \mu = \mu_U \end{cases}$$

Ceci est démontré dans [4], pages 186-188.

---

4) et 5) On peut supposer que H est solution de (E) avec les conditions supplémentaires suivantes :

. pour tout $t \in G$, F_t est à valeurs dans U_d.

. pour tous t, $s \in G$, il existe $\lambda(s,t) \in U_1$ tel que

$$(9)\quad F_s(x+t) \,.\, F_t(x) = \lambda(s,t) \,.\, F_t(x+s) \,.\, F_s(x).$$

. la fonction λ définie sur $G \times G$ vérifie :

pour tous $t, s \in G$, $\lambda(s,t) = \overline{\lambda(t,s)}$;

pour tout $t \in G$, $\lim\limits_{s \to O} \lambda(s,t) = 1$;

il existe un voisinage de O dans G, noté V, tel que, si $s \in G$ et $t, t' \in V$, alors

$$\lambda(s,t+t') = \lambda(s,t) \,.\, \lambda(s,t').$$

Ceci est démontré dans [4], pages 188-192.

---

6) Le lemme énoncé dans [4], page 192, est faux. Il est ici remplacé par le résultat suivant.

<u>Lemme</u> : Soient G un groupe compact abélien connexe, V un voisinage de O dans G et λ une application de $V \times V$ dans U_1 telle que

(i) pour tous $t, t', s \in V$, si $t + t' \in V$ alors $\lambda(t+t',s) = \lambda(t,s) \,.\, \lambda(t',s)$,

(ii) pour tous $t, s \in V$, $\lambda(t,s) = \overline{\lambda(s,t)}$,

(iii) pour tout $t \in V$, $\lim\limits_{s \to O} \lambda(t,s) = 1$.

On a alors :

il existe un homomorphisme continu et surjectif Π de G dans un tore $\mathbb{T}^n$ de dimension finie n, il existe une matrice antisymétrique réelle M, d'ordre n, et il existe un voisinage V' de O dans G tels que

. $\mathrm{Ker}\,\Pi \subset V'$

. si $t, s \in V'$,

si $\Pi(t) = (x_1, x_2,...., x_n) \bmod \mathbb{Z}^n$ avec $x_k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

si $\Pi(s) = (y_1, y_2,..., y_n) \bmod \mathbb{Z}^n$ avec $y_k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

(10) $\lambda(s,t) = \exp(2i\pi.(y_1, y_2,..., y_n) . M .{}^t(x_1, x_2,..., x_n))$.

Preuve du lemme :

Commençons par étudier le cas où G est un tore.

Etude du cas où $G = \mathbb{T}^n$

Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $]-\delta, +\delta[^n \bmod \mathbb{Z}^n \subset V$.

Notons U le voisinage $]-\delta, +\delta[^n$ de O dans $\mathbb{R}^n$.

On définit un U x U une fonction $\ell(y,x)$ par $\ell(y,x) = \lambda(s,t)$ si $s = y \bmod \mathbb{Z}^n$ et $t = x \bmod \mathbb{Z}^n$.

Cette fonction ℓ vérifie, pour tout x, y et y' dans U,

si $y + y' \in U$, alors $\ell(y+y', x) = \ell(y,x) . \ell(y',x)$,

$\ell(y,x) = \overline{\ell(y,x)}$,

et la fonction $z \in \ell(y,z)$ est continue en O.

On peut prolonger cette fonction à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en posant, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\ell(y,x) = \left[\ell\left(\frac{y}{m}, \frac{x}{m}\right)\right]^{m^2}$$

où m est un entier choisi suffisamment grand pour que $\frac{y}{m}$ et $\frac{x}{m}$ soient dans U.

Cette définition a bien un sens grâce à la propriété de bi-homomorphisme local de ℓ.

La fonction ℓ ainsi prolongée est antisymétrique et vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\ell(.,x)$ est continue et est un homomorphisme de groupe de $\mathbb{R}^n$ dans U_1. Les homomorphismes continus de $\mathbb{R}^n$ dans U_1 sont bien connus :

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$\ell(y,x) = \exp(2i\Pi < y,a_x >)$.

Grâce à l'antisymétrie de ℓ on obtient : pour tous y, x et x' dans $\mathbb{R}^n$,

$<y,a_x> + <y,a_{x'}> = <y,a_{x+x'}> \bmod \mathbb{Z}$.

On en déduit que a_x est une fonction linéaire de x. En notant les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs lignes, on arrive à : il existe une matrice réelle M d'ordre n telle que

${}^t a_x = M.{}^t x$ et $\ell(y,x) = \exp(2i\,\Pi\, y . M.{}^t x)$.

Du fait que ℓ est antisymétrique, on déduit enfin que M l'est. Le résultat du lemme est ainsi établi quand $G = \mathbb{T}^n$ (avec $\Pi = \mathrm{id}$).

Etude du cas général d'un groupe G compact, abélien et connexe.

Nous allons nous ramener à la situation précédente par un passage au quotient. Il existe un sous-groupe fermé G' de G tel que $G' \subset V$ et tel que $G/_{G'}$ soit isomorphe au produit d'un groupe fini et d'un tore de dimension finie. (cf. par exemple [3] théorème 24.7). Pour $t \in V$, notons ρ_t la restriction de $\lambda(.,t)$ à G'. Les hypothèses du lemme entraînent que ρ_t est un caractère de G'. De plus, pour tout $s \in G'$,

on a

$\lim_{t \to O} \rho_t(s) = 1$. Le groupe dual de G' étant discret, on en déduit qu'il existe un voisinage V_1 de O dans G tel que $V_1 \subset V$ et, pour tout $t \in V_1$, $\rho_t \equiv 1$. Dans le groupe G', la partie $V_1 \cap G'$ est un voisinage de O. On utilise à nouveau le théorème sur la structure des groupes compacts abéliens pour obtenir : il existe un sous groupe fermé G" de G' tel que $G'' \subset V_1$ et $G'/_{G''}$ est isomorphe au produit d'un groupe fini et d'un tore de dimension finie. Du fait que les groupes duaux de $G/_{G'}$ et $G'/_{G''}$ admettent chacun un nombre fini de générateurs, on déduit que le dual de $G/_{G''}$ admet un nombre fini de générateurs, c'est à dire que $G/_{G''}$ est isomorphe au produit d'un groupe fini et d'un tore de dimension finie. De plus le groupe G étant supposé connexe, le groupe fini est trivial. Le groupe $G/_{G''}$ est isomorphe à un tore $\mathbb{T}^n$. Notons Π la projection de G sur $\mathbb{T}^n$, induite par cet isomorphisme, et notons $W = \Pi(V_1)$. L'application Π est ouverte et W est donc un voisinage de O dans $\mathbb{T}^n$. On définit une application $\tilde{\lambda}$ de W x W dans U_1 en posant $\tilde{\lambda}(\Pi(s), \Pi(t)) = \lambda(s,t)$, pour tous s et t dans V_1.

En utilisant le fait que λ est localement un bihomomorphisme et que,

si $s \in G'' = \operatorname{Ker} \Pi$ et $t \in V_1$, alors $\lambda(s,t) = \lambda(t,s) = 1$, on vérifie que $\tilde{\lambda}$ est bien définie.

L'application Π étant continue, les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme sont vérifiées par $\tilde{\lambda}$. On peut appliquer à $\tilde{\lambda}$ la première partie de la preuve, et on obtient exactement la conclusion du lemme.

---

7) On peut appliquer à la fonction λ apparaîssant dans (9) le lemme précédent. En utilisant (9) nous allons démontrer que la matrice M figurant dans (1O) est à coefficients dans $\frac{1}{d}.\mathbb{Z}$.

Fixons $\delta > O$ tel que $\Pi^{-1}(\,]-\delta, +\delta[^n \bmod \mathbb{Z}^n) \subset V'$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \delta$.

Si i est un entier entre 1 et n, on fixe un élément t_i de G tel que
$\Pi(t_i) = (O, ..., O, \frac{1}{p} \bmod \mathbb{Z}, O, ..., O)$, où la composante non nulle apparaît au $i^{\text{ème}}$ rang.

Posons $\tilde{F}_i(x) = F_{pt_i}(x)^{-1} . F_{t_i}(x+(p-1)\,t_i) . F_{t_i}(x+(p-2)\,t_i) .... F_{t_i}(x)$.

Un calcul simple, à partir de (9), conduit, pour tout $s \in G$, à :

$$(13) \qquad \tilde{F}_i(x+s) = (\lambda(t_i,s))^p . \lambda(pt_i,s)^{-1} . F_s(x) . \tilde{F}_i(x) . F_s(x)^{-1}.$$

Si de plus $s \in V'$, du fait que $pt_i \in \operatorname{Ker} \Pi$, on déduit que

$$\lambda(pt_i,s) = 1.$$

Soit j un autre entier entre 1 et n.

Un calcul simple, à partir de (13), conduit à :

$$\tilde{F}_i(x) = (\lambda(t_i, t_j))^{p^2} \cdot \tilde{F}_j(x) \cdot \tilde{F}_i(x) \cdot \tilde{F}_j(x)^{-1}.$$

En considérant les déterminants des deux membres de cette égalité, on obtient

$$(\lambda(t_i, t_j))^{dp^2} = 1.$$

Si on note $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on a $\lambda(t_i,t_j) = \exp(2i\pi \frac{1}{p^2} m_{ij})$. Ceci prouve que les coefficients de la matrice M sont dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$.

Introduisons à présent quelques notations .

g Si $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ et $Y = (y_1,y_2,..., y_n)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$B(X,Y) = X.M.\,{}^tY.$$

On note $M = N - {}^tN$, où N est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, et

$$B'(X,Y) = X.N.{}^tY.$$

Ainsi, on a $B(X,Y) = B'(X,Y) - B'(Y,X)$.

g Si $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$[X] = (p_1, p_2,..., p_n) \text{ où } p_i \in \mathbb{Z} \text{ et } x_i \in]-\frac{1}{2} + p_i, \frac{1}{2} + p_i].$$

g On note Π' l'application de G dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ définie par : pour tout $x \in G$,

$\Pi(x) = \Pi'(x) \bmod \mathbb{Z}^n$.

Ainsi on a, pour tous t et s dans V',

$$(14) \qquad \lambda(t,s) = \exp(2i\pi \,.\, B(\Pi'(t), \Pi'(s))).$$

g Enfin, si X et Y sont dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$(15) \qquad \Psi_X(Y) = \exp(-2i\pi\,(B'(X,Y) + B'(Y, [Y]) - B'(X+Y, [X+Y]))).$$

Du fait que les coefficients de la forme bilinéaire B' sont dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, on déduit, par un calcul simple, que si $Z \in (d.\mathbb{Z})^n$, alors

$$\Psi_X(Y+Z) = \Psi_X(Y).$$

La fonction Ψ_X est donc en fait définie sur $(\mathbb{R}/_{d.\mathbb{Z}})^n$.

Un calcul simple permet également de vérifier que :

si X, Y et Z sont dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$(16) \quad \Psi_Y(Z+X) \,.\, \Psi_X(Z) = \exp(2i\pi.\, B(X,Y)) \,.\, \Psi_X(Z + Y) \,.\, \Psi_Y(Z)$$

<u>Construction du groupe $\tilde{G}$</u>

Notons Π_2 la projection canonique de $(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n$ sur $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}})^n$.

Considérons le groupe compact abélien

$$G_2 = \{(x_1, x_2) \in G \times (\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n \mid \Pi(x_1) = \Pi_2(x_2)\}.$$

Notons β le point de $(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n$ tel que $\beta = \Pi'(\alpha) \bmod (d.\mathbb{Z}^n)$

Considérons le sous-groupe fermé $\tilde{G}$ de G_2 engendré par (α, β).

Notons p_1 et p_2 les projections de $\tilde{G}$ sur, respectivement, G et $(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n$.

Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & G \arrow[d, "\Pi"] \\
(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n \arrow[r, "\Pi_2"] & (\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}})^n
\end{tikzcd}$$

La translation par $\tilde{\alpha} = (\alpha, \beta)$ est une transformation ergodique de $\tilde{G}$.

Nous allons à présent "remonter" l'équation (16) dans $\tilde{G}$.

Si (x_1, x_2) et (t_1, t_2) sont dans $\tilde{G}$, on pose :

$$f_{(t_1, t_2)}(x_1, x_2) = \Psi_{\Pi'(t_1)}(x_2).$$

Notons V_2' l'image, par la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n$, du cube $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n$.

V_2' est un voisinage de O dans $(\mathbb{R}/_{d\mathbb{Z}})^n$ et on a :

si $(x_1, x_2) \in \tilde{G}$ avec $x_2 \in V_2'$ alors $x_2 = \Pi'(x_1) \bmod (d.\mathbb{Z}^n)$.

De (16) on déduit à présent que : si $s = (s_1, s_2)$ et $t = (t_1, t_2)$ sont dans $\tilde{G}$ avec s_2 et t_2 dans V_2',

alors

$$f_s(x+t) \,.\, f_t(x) = \exp(2i\pi.B(\Pi' \circ p_1(t), \Pi' \circ p_1(s))) \,.\, f_t(x+s) \,.\, f_s(x).$$

En particulier, puisque β a été choisi dans V_2', on a, pour tout $t = (t_1, t_2)$ dans $\tilde{G}$ tel que $t_2 \in V_2'$,

(17) $$f_{\tilde{\alpha}}(x+t) \,.\, f_t(x) = \exp(2i\pi.B(\Pi'(t_1), \Pi'(\alpha))) \,.\, f_t(x+\tilde{\alpha}) \,.\, f_{\tilde{\alpha}}(x).$$

8) On fixe de nouveau un nombre δ dans $]\ 0,\frac{1}{2}[$ tel que

$$\Pi^{-1}(]-\delta, +\delta[^n \bmod \mathbb{Z}^n) \subset V'.$$

Soit j un entier positif tel que $\frac{1}{j}\Pi'(\alpha) \in\ ]-\delta, +\delta[^n$.

Soit ε un élément de G tel que $\Pi'(\varepsilon) = \frac{1}{j}\Pi'(\alpha)$.

Puisque $\Pi'(\varepsilon) < \frac{1}{2j}$, on a $\Pi'(j\varepsilon) = j.\ \Pi'(\varepsilon)$.

On en déduit que $\alpha\text{-}j\varepsilon \in \operatorname{Ker}\Pi$, et donc $\alpha\text{-}j\varepsilon \in V'$.

Si $x_1 \in G$, on pose

$$(18) \quad H'(x_1) = F_{\alpha-j\varepsilon}(x_1+j\varepsilon)\ .\ F_\varepsilon(x_1+(j-1)\varepsilon)\ .\ F_\varepsilon(x_1+(j-2)\varepsilon)\ldots F_\varepsilon(x_1).$$

Un calcul simple, à partir de (9), permet d'établir que, pour tout $t_1 \in V'$,

$$H'(x_1+t_1)\ .\ F_{t_1}(x_1) = \lambda(\alpha\text{-}j\varepsilon, t_1)\ .\ (\lambda(\varepsilon, t_1))^j.\ F_t(x_1+\alpha).\ H'(x_1).$$

De (14) on déduit que

$$\lambda(\alpha\text{-}j\varepsilon, t_1)\ .\ (\lambda(\varepsilon, t_1))^j = \exp(2i\pi.B(\Pi'(\alpha)\ , \Pi'(t_1))).$$

Posons, pour $x = (x_1, x_2) \in \tilde{G}$, $\tilde{H}(x) = f_{\tilde{\alpha}}(x)\ .\ H'(x_1)$.

Grâce à (17), on peut affirmer à présent que, pour tout $t \in (V' \times V_2') \cap \tilde{G}$

$$\tilde{H}(x+t)\ .\ (f_t(x)\ .\ \tilde{F}_t(x)) = (f_t(x+\tilde{\alpha})\ .\ \tilde{F}_t(x+\tilde{\alpha}))\ .\tilde{H}(x)$$

(où $\tilde{F}_t(x) = F_{t_1}(x)$).

Nous constatons que $\tilde{H}$ satisfait à l'équation fonctionnelle (E') sur le système dynamique$(\tilde{G}, T_{\tilde{\alpha}})$.

Nous pouvons appliquer le corollaire énoncé dans le **III-3**. Il existe une matrice diagonale unitaire D et une application mesurable A de $\tilde{G}$ dans U_d telles que

$\tilde{H}(x) = A(x+\tilde{\alpha}).\ D.\ A(x)^{-1}$.

Autrement dit, $H'(p_1(x)) = f(x)\ .\ A(x+\tilde{\alpha})\ .\ D.\ A(x)^{-1}$ où $f = \overline{f_{\tilde{\alpha}}}$.

Un calcul simple, à partir de **(E)** et de **(18)**, permet d'établir que
$H(x_1+\alpha) \,.\, H'(x_1) = \lambda_{\alpha-j\varepsilon}.(\lambda_\varepsilon)^j \,.\, H'(x_1+\alpha).\, H(x_1)$.

D'où , en posant $\mu = \lambda_{\alpha-j\varepsilon}.(\lambda_\varepsilon)^j$ et $M(x_1) = H'(x_1)^{-1} \,.\, H(x_1)$,

$$(19) \qquad M(x_1+\alpha) = \mu\, H(x_1) \,.\, M(x_1) \,.\, H(x_1)^{-1}.$$

Finalement, on a : pour presque tout $x = (x_1, x_2)$ dans $\tilde{G}$,

$$(20) \qquad H(x_1) = f(x) \,.\, A(x+\tilde{\alpha}) \,.\, D.\, A(x)^{-1}.\, M(x_1)$$

où $f = \overline{f_{\tilde{\alpha}}}$ et M vérifie **(19)**.

Ceci achève la preuve de **a)**.

9) On a, d'après **(19)**, $M(x+\alpha) = \mu.H(x).\, M(x).\, H(x)^{-1}$.

On en déduit que $\det M(x+\alpha) = \mu^d.\det M(x)$.

De plus on sait que $|\det M| = 1$.

Il existe donc un caractère γ de G et une constante δ de module 1 tels que $\det M(x) = \delta.\gamma(x)$ et $\mu^d = \gamma(\alpha)$.

On a $M^d(x+\alpha) = \gamma(\alpha).\, H(x) \,.\, M^d(x).\, H(x)^{-1}$.

D'où $\qquad \bar{\gamma}(x+\alpha)\, M^d(x+\alpha) = H(x) \,.\, (\bar{\gamma}(x)\, M^d(x)) \,.\, H(x)^{-1}$.

Puisque H est supposée irréductible, on peut en déduire, d'après **III-2** (iii), que $\bar{\gamma}.M^d$ est une matrice scalaire constante S.

Ceci achève la preuve de **b)**.

---

10) On commence par écarter le cas trivial où la forme bilinéaire B' est nulle. En effet, dans ce cas, la fonction f apparaîssant dans (20) est constante égale à 1.

On considère la loi de groupe, notée $*$, définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$(X,X') * (Y,Y') = (X+Y,\, X'+Y'-B'(X,Y)) \quad \text{où } X, Y \in \mathbb{R}^n \text{ et } X', Y' \in \mathbb{R}.$$

$N = (\mathbb{R}^{n+1}, *)$ est un groupe nilpotent, connexe et simplement connexe, d'ordre 2. Son groupe dérivé N' est $\{(O,X') \mid X' \in \mathbb{R}\}$.

La forme bilinéaire B' étant à coefficients dans $\frac{1}{d}.\mathbb{Z}$, $((d.\mathbb{Z})^{n+1}, *)$ est un sous-groupe de N. On note Γ ce sous-groupe discret. Le quotient N/Γ est bien sûr compact. Le groupe compact abélien $N/\Gamma.N'$ est $(\mathbb{R}/d.\mathbb{Z})^n$. L'homomorphisme surjectif p_2 de $\tilde{G}$ sur $N/\Gamma.N'$ est défini dans 7).

On note a l'élément $(\Pi'(\alpha),O)$ de N.

On a bien $p_2(\tilde{\alpha}) = \beta = \Pi'(\alpha) \bmod ((d.\mathbb{Z})^n) = a.\Gamma N'$.

On considère la fonction b de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans U_1 définie par

$$b(X,X') = \exp(-2i\pi\,(X' + B'(X, [X]))).$$

Si $(K,K') \in \Gamma$, c'est à dire si $K \in (d.\mathbb{Z})^n$ et $K' \in d.\mathbb{Z}$, on a :

$$b((X,X') * (K,K')) = \exp(-2i\pi\,(X'+K'-B'(X,K) + B'(X+K, [X+K])))$$

$$= \exp(-2i\pi\,(X'+B'(X, [X]))),$$

car $[X+K] = [X] + K$ et $K' + B'(K, [X] + K)$ est entier.

La fonction b est donc en fait définie sur le quotient N/Γ.

Soit $v = (X,X') \in N$.

On a $b(a*v) . \overline{b(v)} = b(\Pi'(\alpha) + X, X' - B'(\Pi'(\alpha),X)) . \overline{b(X,X')} =$
$\exp(2i\pi(B'(\Pi'(\alpha),X) - B'(\Pi'(\alpha) + X, [\Pi'(\alpha) + X]) + B'(X,[X])))$.

D'après (15), on a donc :

$$b(a*v).\overline{b(v)} = \overline{\Psi}_{\Pi'(\alpha)}(X) = \overline{f_{\tilde{\alpha}}}.(\tilde{x}) \quad \text{si}$$

$$\tilde{x} \in \tilde{G} \text{ et } p_2(\tilde{x}) = X \bmod ((d\mathbb{Z})^n) = v.\Gamma N'.$$

Puisque $f = \overline{f_{\tilde{\alpha}}}$, on a démontré le résultat c).

---

11) Reprenons les conclusions de a). Du fait que

$$H(p(\tilde{x})) . M(p(\tilde{x}))^{-1} = f(\tilde{x}) . A(\tilde{x} + \tilde{\alpha}). D. A(\tilde{x})^{-1},$$

on déduit que

$$(H.M^{-1})^{(d)}(p(\tilde{x})) = f^{(d)}(\tilde{x}) \,.\, A(\tilde{x} + d\,\tilde{\alpha}) \,.\, D^d.\, A(\tilde{x})^{-1},$$

où, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$(H.M^{-1})^{(k)}(x) = (H.M^{-1})(x+(k-1)\alpha) \,.\, (H.M^{-1})(x+(k-2)\alpha)...(H.M^{-1})(x).$$

Un calcul simple, à partir de (19), permet d'établir que

$$(H.M^{-1})^{(k)}(x) = \overline{\mu}^{\frac{k(k-1)}{2}} .H^{(k)}(x).\ M^{-k}(x)$$

On obtient ainsi

$$H^{(d)}(p(\tilde{x}) = \mu^{\frac{d(d-1)}{2}} \,.\, f^{(d)}(\tilde{x}).\ A(\tilde{x}+d\tilde{\alpha}) \,.\, D^{d}.A(\tilde{x})^{-1}.M^{d}(p(\tilde{x}))$$

$$= \gamma(p(\tilde{x})).\, f^{(d)}(\tilde{x}) \,.\, A(\tilde{x} + d\,\tilde{\alpha}) \,.\, E.\, A(\tilde{x})^{-1}.$$

où $E = \mu^{\frac{d(d-1)}{2}} \,.\, S \,.\, D^d.$

Ceci achève la preuve de **d**).

Soit $m = kd$ un multiple de d.

Si on remplace γ^k par γ et S^k par S, on déduit de (3) que

$$M^m(x) = \gamma(x).S \quad \text{et} \quad \mu^m = \gamma(\alpha).$$

Si on remplace a^m par a, on déduit de (4) que

$$p_2(m\tilde{\alpha}) = a \,.\, \Gamma N'.$$

Si de plus on remplace f par $f^{(m)}$ et E par E^k, on déduit de (6) que

$$H^{(m)}(p(\tilde{x})) = \gamma(p(\tilde{x})) \,.\, f(\tilde{x}) \,.\, A(\tilde{x} + m\tilde{\alpha}) \,.\, E \,.\, A(\tilde{x})^{-1}.$$

Ceci achève la preuve de **e**).

IV LE THEOREME DE CONVERGENCE

Dans un premier paragraphe, nous rappelons des résultats figurant dans [1] (pages 161-171) et nous en déduisons que la démonstration du théorème se réduit à la preuve de l'assertion notée (6"), qui remplace l'assertion (6) de [1] (page 161). Le second paragraphe est consacré à la preuve de (6") ; on y utilise la résolution de l'équation fonctionnelle précédemment présentée.

IV-1 Une mesure produit conditionnelle

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé régulier totalement ergodique. Notons $\mathcal{B}$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ rendant mesurables les fonctions propres pour l'action de T sur $L^2(\mu, \mathcal{A})$. On note $\{e_i \mid i \geq 0\}$ une base orthonormée de $L^2(\mu, \mathcal{B})$ formée d'éléments propres pour T et formant un groupe multiplicatif. L'étude de la convergence de moyennes du type

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n . g \circ T^{2n},$$

menée dans [1], permet d'affirmer qu'il existe une mesure de probabilité ν sur $X \times X \times X$ vérifiant :

- pour tous f, g et h fonctions mesurables et bornées sur $(X,\mathcal{A})$,

$$\nu(f \otimes g \otimes h) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f(x) . g(T^n x). h(T^{2n}x)\, d\mu(x)$$

- pour tous f, g et h fonctions mesurables et de carré intégrable sur $(X,\mathcal{A},\mu)$, la fonction $(f \otimes g \otimes h)$ est ν-intégrable et on a

$$\nu(f \otimes g \otimes h) = \sum_{i \geq 0} \langle f,e_i\rangle . \langle g,e_i^2\rangle . \langle h,e_i^{-1}\rangle.$$

L'importance de cette mesure ν apparaît dans la proposition suivante :

> Proposition 1. Si f, g et h sont des fonctions mesurables et bornées sur $(X, \mathcal{A})$ et si la fonction $(f \otimes g \otimes h)$ est orthogonale, dans $L^2(\nu)$, au sous espace des fonctions $T \times T^2 \times T^3$ - invariantes, alors la suite
>
> $$(1) \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n . g \circ T^{2n} . h \circ T^{3n}$$
>
> converge vers O dans $L^1(\mu)$.

Nous ne reviendrons pas sur la preuve de cette proposition qui constitue le paragraphe V.3 de [1] (pages 171-172). Il faut donc étudier l'espace des fonctions $T \times T^2 \times T^3$-invariantes modulo ν. Pour cela on utilise la notion de B-module développée dans ([1]. I). Nous devons également donner une nouvelle définition.

Le système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un système dynamique à spectre discret et est isomorphe à une translation sur un groupe compact abélien (G, T_α). De plus la connexité de G est équivalente à la totale ergodicité du système initial. En reprenant

III-1, cet isomorphisme permet de donner un sens à la condition "H satisfait l'équation fonctionnelle (E)" quand H est une application B-mesurable de X dans U_d.

Définition : Un ($\mathfrak{B}$, T)-module irréductible V, de $\mathfrak{B}$-dimension finie, sera dit de type (E) si il existe une $\mathfrak{B}$-base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ de V et une matrice $\mathfrak{B}$-mesurable H telles que

$$\begin{pmatrix} e_1 oT \\ e_2 oT \\ \vdots \\ e_d oT \end{pmatrix} = H . \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

et H satisfait l'équation fonctionnelle (E).

Remarque : Grâce à la résolution de l'équation fonctionnelle (cf. III), on peut montrer que les (B, T)-modules de type (E) sont liés aux facteurs de (X, $\mathfrak{A}$, μ, T) dont une puissance est conjuguée à un facteur d'une "extension d'une nil-translation par un caractère". Ce point ne sera pas développé dans la suite.

Nous pouvons à présent énoncer la

Proposition 2 : Dans $L^2(V)$, le sous-espace des fonctions $T \times T^2 \times T^3$-invariantes est contenu dans le sous-espace engendré par les fonctions de la forme $f \otimes g \otimes h$ où

f est dans un (B,T)-module de type (E),
g est dans un (B,T^2)-module de type (E),
h est dans un (B,T^3)-module de type (E).

La preuve de cette proposition figure dans ([1], V.2). Elle peut se décomposer en trois étapes que nous rappelons ici.

Etape 1 : Dans $L^2(V)$, le sous-espace des fonctions $T \times T^2 \times T^3$-invariantes est contenu dans le sous-espace engendré par les fonctions $f \otimes g \otimes h$ où

f est dans $(\mathfrak{B},T)$ module de $\mathfrak{B}$-dimension finie,
g est dans $(\mathfrak{B},T)$ module de Etape 1 : Dans $L^2(V)$, le sous-espace des fonctions $T \times T^2 \times T^3$-invariantes est contenu dans le sous-espace engendré par les fonctions $f \otimes g \otimes h$ où

f est dans $(\mathfrak{B},T)$ module de $\mathfrak{B}$-dimension finie,
g est dans $(\mathfrak{B},T^2)$ module de $\mathfrak{B}$-dimension finie
h est dans $(\mathfrak{B},T^3)$ module de $\mathfrak{B}$-dimension finie.

(Ce résultat, qui est une conséquence du caractère "mesure produit conditionnelle" de ν, se déduit du théorème 3 de [1] (page 152)).

Etape 2 (lemme 1 [1] page 164). Soient f, g et h trois fonctions mesurables et bornées sur $(X,\mathcal{Q})$. Supposons que, dans $L^2(\nu)$, $f \otimes g \otimes h$ n'est pas orthogonal au sous-espace des $T \times T^2 \times T^3$-invariants. On a alors : pour toute suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq O}$, il existe u, v et w fonctions continues sur X telles que

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq O} \left|<T^{n_k} f.u, e_i>\right| > O,$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq O} \left|<T^{2n_k} g.v, e_i>\right| > O,$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq O} \left|<T^{3n_k} h.u, e_i>\right| > O.$$

Etape 3 Soient V un $(\mathcal{B},T)$-module irréductible dans $L^2(\nu)$ et soit $(\vartheta_1, \vartheta_2,\dots, \vartheta_d)$ une $\mathcal{B}$-base orthonormée de V. Supposons que, pour toute suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq O}$, il existe une fonction u continue sur X telle que

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq O} \left|<T^{n_k} \vartheta_1.u, e_i>\right| > O.$$

Alors V est un $\mathcal{B}$-module de type (E).

(La preuve de cette affirmation est incluse dans la preuve du lemme 2 de [1], page 166).

Conséquence des propositions précédentes.

On déduit des propositions 1 et 2 le résultat suivant :

(5")

> si f , g et h sont dans $L^\infty(\mu)$ et si
> {f est orthogonal à tout $(\mathcal{B}, T)$ - module de type (E) ou g est orthogonal à tout $(\mathcal{B},T^2)$-module de type (E) ou h est orthogonal à tout $(\mathcal{B}, T^3)$-module de type (E)}
>
> alors la suite
>
> $$(1) \quad \frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} f \circ T^n \,.\, g \circ T^{2n} \,.\, h \circ T^{3n}$$
>
> converge vers O dans $L^1(\mu)$.

Notons $\mathcal{E}$ le sous-espace fermé de $L^2(\mu) \times L^2(\mu) \times L^2(\mu)$ engendré par la réunion des $V_1 \times V_2 \times V_3$, où V_k est un $(\mathcal{B}\text{-}T^k)$-module de type (E) (k = 1, 2, 3). Le théorème sera démontré quand nous aurons établi la convergence des moyennes (1) pour
$(f, g, h) \in \mathcal{E} \cap L^\infty(\mu) \times L^\infty(\mu) \times L^\infty(\mu)$.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, les moyennes (1) convergent μ-presque partout (ce qui entraînera la convergence dans $L^1(\mu)$). Grâce à la trilinéarité des expressions considérées et à une inégalité maximale ([1], lemme 3, p. 173), il suffit de démontrer le résultat suivant.

(6")

Soient, pour $k = 1, 2$ et 3, V_k un $(\mathfrak{B}, T^k)$-module de type (E).
Soient $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{d_1})$ une $\mathfrak{B}$-base orthonormée de V_1,
$(g_1, g_2, \ldots, g_{d_2})$ une $\mathfrak{B}$-base orthonormée de V_2,
$(h_1, h_2, \ldots, h_{d_3})$ une $\mathfrak{B}$-base orthonormée de V_3.
Soient φ_1, φ_2 et φ_3 trois fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables bornées sur X.
Soient $f = \varphi_1 . \vartheta_1$, $g = \varphi_2 . g_1$, $h = \varphi_3 . h_1$.
Alors la suite des moyennes (1) converge presque partout.

Remarquons que la preuve de (6") qui va suivre peut s'appliquer à une situation plus générale : on peut remplacer, dans l'énoncé de (6"), les transformations T, T^2 et T^3 par trois transformations qui préservent la mesure sur $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ et qui commutent.

Remarquons également qu'un résultat du même type peut être énoncé pour toute famille finie de transformations.

C'est pour démontrer (6") que nous utiliserons le théorème ergodique sur les nil-translations présenté dans **II**.

IV - 2 Fin de la preuve de la convergence de (1) : preuve de (6")

Reprenons les notations de l'énoncé de (6")

$$\text{Notons} \quad F_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{d_1} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{d_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_3 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{d_3} \end{pmatrix}.$$

pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère une fonction matricielle

$$H_k = (h_{ij}^k)_{1 \leq i,j \leq d_k}$$

$\mathfrak{B}$-mesurable, à valeurs dans U_{d_k}, irréductible et telle que $F_k \circ T^k = H_k . F_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$H_k^{(n)}(x) = H_k(T^{k(n-1)}x).\, H_k(T^{k(n-2)}x) \ldots\ldots H_k(x)$$

$$\text{et} \qquad H_k^{(n)} = (h_{i,j}^{k,n})_{1 \leq i,j \leq d_k}.$$

On a

$$\vartheta_1(T^n x) = \sum_{i=1}^{d_1} h_{1,i}^{1,n}(x) \,.\, \vartheta_i(x).$$

En posant $f = \varphi_1 \,.\, \vartheta_1$, $g = \varphi_2 \,.\, g_1$ et $h = \varphi_3 \,.\, h_1$, on a

$$\frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} f \circ T^m \,.\, g \circ T^{2m} \,.\, h \circ T^{3m} =$$

$$\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{\ell=1}^{d_3} \left[\frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} \varphi_1 \circ T^m \,.\, \varphi_2 \circ T^{2m} \,.\, \varphi_3 \circ T^{3m} \,.\, h_{1,i}^{1,m} \,.\, h_{1,j}^{2,m} \,.\, h_{1,\ell}^{3,m} \right] . \vartheta_i . g_i . h_\ell .$$

Pour démontrer (6") il nous faut donc prouver que

(21) la suite

$$\frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} \varphi_1 \circ T^m \,.\, \varphi_2 \circ T^{2m} \,.\, \varphi_3 \circ T^{3m} \,.\, h_{1,i}^{1,m} \,.\, h_{1,j}^{2,m} \,.\, h_{1,\ell}^{3,m}$$

est p.p. convergente.

Cette expression ne fait intervenir que des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables. Le système dynamique probabilisé $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, qui est à spectre discret, est isomorphe à une translation $(G, x \mapsto x + \alpha)$ sur un groupe compact abélien G, connexe et à base dénombrable. On peut transférer toutes les expressions étudiées sur ce nouveau système. Sans changer les notations, nous considérerons dorénavant que les fonctions φ_k et H_k sont définies sur G et que $T(x) = x + \alpha$.

Par hypothèse, chaque fonction H_k est solution de l'équation fonctionnelle (E) (pour la translation $x \mapsto x + k\alpha$ de G). Fixons un entier d, multiple commun de d_1, d_2 et d_3 et appliquons le théorème et le corollaire démontrés dans III.

Conséquences de "résolution d'une équation fonctionnelle"

Pour $k = 1, 2$ ou 3, on a :

il existe une matrice unitaire diagonale E_k dans U_{d_k},

il existe un groupe compact abélien $\tilde{G}_k$,

il existe un homomorphisme surjectif p_k de $\tilde{G}_k$ sur G,

il existe α_k dans $\tilde{G}_k$, il existe une application mesurable A_k de $\tilde{G}_k$ dans U_{d_k},

il existe un caractère γ_k de G, tels que :

. $p_k(\alpha_k) = k.\alpha$.

. pour presque tout x dans $\tilde{G}_k$,

$$(22) \quad H_k^{(d)}(p_k(x)) = \gamma_k(p_k(x)) \,.\, f_k(x) \,.\, A_k(x+d\alpha_k) \,.\, E_k \,.\, A_k(x)^{-1},$$

où f_k est une application mesurable de $\tilde{G}_k$ dans U_1 vérifiant :

il existe un groupe nilpotent N_k de dimension finie, connexe, simplement connexe et d'ordre 2, dont on note N_k' le sous-groupe dérivé,

il existe un sous-groupe discret Γ_k de N_k tel que le quotient N_k/Γ_k soit compact,

il existe un élément a_k de N_k,

il existe un homomorphisme surjectif $p_{2,k}$ de $\tilde{G}_k$ sur le groupe compact abélien $N_k/\Gamma_k.N'_k$,

il existe une application mesurable b_k de N_k/Γ_k dans U_1, tels que :

. $p_{2,k}(d\alpha_k) = a_k \,.\, \Gamma_k N_k'$.

. si $x \in \tilde{G}_k$, $\nu \in N_k$ et $p_{2,k}(x) = \nu \,.\, \Gamma_k N_k'$, alors

$$f_k(x) = b_k(a_k \nu \,.\, \Gamma_k) \,.\, \overline{b_k(\nu.\Gamma_k)} \,.$$

Construction de produits fibrés

Posons $\tilde{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 \times \tilde{G}_3 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2) = p_3(x_3)\}$.

$\tilde{G}$ est un groupe compact abélien et l'application p de $\tilde{G}$ dans G définie par $p(x_1, x_2, x_3) = p_1(x_1)$ est un homomorphisme surjectif.

Posons

$N = \{(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in N_1 \times N_2 \times N_3 \mid (\nu_1.\Gamma_1 N_1', \nu_2.\Gamma_2 N_2', \nu_3.\Gamma_3 N_3') \in (p_{2,1} \otimes p_{2,2} \otimes p_{2,3})(\tilde{G})\}$.

N est un sous-groupe fermé de $N_1 \times N_2 \times N_3$, et il contient $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3 = G$. On fixe a_1' et a_1'' dans N_1, a_2' et a_2'' dans N_2 et a_3' et a_3'' dans N_3 tels que $\beta_1 = (a_1, a_2', a_3') \in N$,

$\beta_2 = (a_1', a_2, a_3'') \in N$ et $\beta_3 = (a_1'', a_2'', a_3) \in N$.

Pour démontrer **(21)** nous allons établir successivement quatre lemmes.

.<u>Lemme 1</u> : Soient c_1, c_2 et c_3 trois fonctions mesurables et bornées sur $N/_\Gamma$. Pour presque tout ν dans N, on a :

pour tous z_1 et $z_2 \in U_1$, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} z_1^m . z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} . c_1(\beta_1^m \nu.\Gamma) . c_2(\beta_2^m \nu.\Gamma) . c_3(\beta_3^m \nu.\Gamma)$$

est convergente.

.<u>Lemme 2</u> : Pour presque tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\tilde{G}$, on a :

pour tous z_1 et $z_2 \in U_1$, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} z_1^m . z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} . f_1^{(m)}(x_1) . f_2^{(m)}(x_2)\, f_3^{(m)}(x_3)$$

est convergente.

(si $x_k \in \tilde{G}_k$, on note $f_k^{(m)}(x_k) = f_k(x_k + (m-1)\, d\alpha_k) . f_k(x_k + (m-2)\, d\alpha_k) \ldots f_k(x_k)$).

.<u>Lemme 3</u> : Soient φ_1, φ_2 et φ_3 des fonctions mesurables et bornées définies respectivement sur $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ et $\tilde{G}_3$. Soit $\varepsilon \in U_1$. Pour presque tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\tilde{G}$, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m \prod_{k=1}^{3} \varphi_k(x_k + m d\alpha_k) . \gamma_k(\rho(x))^m . \gamma_k(\alpha)^{\frac{m(m-1)}{2}} . f_k^{(m)}(x_k)$$

est convergente.

.<u>Lemme 4</u> : Soient φ_1, φ_2 et φ_3 des fonctions mesurables et bornées sur G. Soient, pour $k = 1, 2$ et 3, des entiers i_k et j_k entre 1 et d_k.

Pour presque tout x dans G, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=O}^{M-1} \varphi_1(x+md\alpha) . \varphi_2(x+2md\alpha) . \varphi_3(x+3md\alpha).h^{1,dm}_{i_1,j_1}(x) . h^{2,dm}_{i_2,j_2}(x) . h^{3,dm}_{i_3,j_3}(x)$$

est convergente.

Preuve du lemme 1

Posons $L = N \times N \times N$, $a = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ et $D = \Gamma \times \Gamma \times \Gamma$. On peut appliquer le théorème énoncé dans II, au groupe nilpotent L, muni du sous-groupe discret D et du point a. Si $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ et $\tilde{c}_3$ sont des fonctions continues sur N/Γ, on en déduit, en posant $g = \tilde{c}_1 \otimes \tilde{c}_2 \otimes \tilde{c}_3$ et $\lambda = (\nu,\nu,\nu)$, que pour tout ν dans N, pour tous z_1 et z_2 dans U_1, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=O}^{M-1} z_1^m.z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} . \tilde{c}_1(\beta_1^m \nu.\Gamma) . \tilde{c}_2(\beta_2^m \nu.\Gamma) . \tilde{c}_3(\beta_3^m \nu.\Gamma) \text{ est convergente.}$$

Il faut montrer que, quitte à remplacer "pour tout ν dans N" par "pour presque tout ν dans N", cette propriété de convergence est encore vérifiée pour des fonctions c_1, c_2 et c_3 mesurables et bornées. Ceci se fait en utilisant le principe suivant :

soit Y un espace compact, muni d'une probabilité P et d'une transformation S préservant P ; soit Ω un ensemble de suites de points du disque unité de $\mathbb{C}$; on suppose que, pour toute fonction continue c sur Y,

(23) pour P-presque tout y, pour tout $\omega = (\omega_n)_{n\geq O}$ dans Ω, la suite

$$\frac{1}{M}\sum_{m=O}^{M-1} \omega_n . c(S^n y)$$

converge ;

on a alors : la même propriété de convergence (23) est satisfaite par toutes les fonctions c intégrables sur (Y,P).

Ce principe se vérifie de la façon suivante :

$$P\left\{ y \mid \sup_{\substack{M>O \\ \omega\in\Omega}} \left| \frac{1}{M}\sum_{m=O}^{M-1} \omega_n . c(S^n y) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$P\left\{ y \mid \sup_{M>O} \frac{1}{M}\sum_{m=O}^{M-1} |c(S^n(y))| > \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_Y |c|\, dP$$

d'après l'inégalité maximale ergodique ; on en déduit que l'ensemble des fonctions c vérifiant (23) est fermé dans $L^1(P)$, ce qui établit le principe.

Pour prouver le lemme 1 et passer d'un triplet $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ de fonctions continues à un triplet (c_1, c_2, c_3) de fonctions mesurables bornées, on utilise trois fois consécutivement le principe précédent.

On transmet ainsi la propriété de convergence de $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ à $(c_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ (en fixant $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3$),
puis de $(c_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$ à $(c_1, c_2, \tilde{c}_3)$ (en fixant c_1 et $\tilde{c}_3$),
enfin de $(c_1, c_2, \tilde{c}_3)$ à (c_1, c_2, c_3) (en fixant c_1 et c_2).

Le lemme 1 est démontré.

Preuve du lemme 2

Notons K l'image de $\tilde{G}$ par la projection $p_{2,1} \otimes p_{2,2} \otimes p_{2,3}$; ainsi K est un sous-groupe fermé du groupe compact abélien

$$\{(\nu_1.\Gamma_1 N_1', \nu_2.\Gamma_2 N_2', \nu_3.\Gamma_3 N_3') \mid \nu_i \in N_i \,;\, i = 1,2,3\}$$

Notons p' la projection de $N/_\Gamma$ sur K.

Notons comme précédemment P la probabilité de Haar sur l'espace homogène $N/_\Gamma$. Notons enfin $\tilde{P}$ la probabilité de Haar sur $\tilde{G}$. Les images de P par p' et de $\tilde{P}$ par $(p_{2,1} \otimes p_{2,2} \otimes p_{2,3})$ coïncident avec la probabilité de Haar sur K. On en déduit en particulier la remarque suivante : si C est une partie de K telle que $P((p')^{-1}(C)) = 1$ alors $\tilde{P}((p_{2,1} \otimes p_{2,2} \otimes p_{2,3})^{-1}(C)) = 1$.

Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{G}$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in N$ tels que $(p_{2,1} \otimes p_{2,2} \otimes p_{2,3})(x) = p'(\nu.\Gamma)$, c'est à dire $p_{2,k}(x_k) = \nu_k . \Gamma_k N_k'$ pour $k = 1, 2$ et 3.

On a $f_k(x_k) = b_k(a_k \nu_k.\Gamma_k) . \overline{b_k(\nu_k.\Gamma_k)}$.

De plus, si $j \in \mathbb{N}$, $p_{2,k}(x_k + jd\alpha_k) = a_k^j v_k . \Gamma_k N_k'$,

et donc $f_k^{(m)}(x_k) = b_k(a_k^m v_k.\Gamma_k) . \overline{b_k(v_k.\Gamma_k)}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Si on définit des fonctions c_1, c_2 et c_3 sur $N/_\Gamma$ par

$$c_k((v_1, v_2, v_3) . \Gamma) = b_k(v_k.\Gamma_k), \quad \text{on a}$$

$$f_k^{(m)}(x_k) = c_k(\beta_k^m v.\Gamma) . \overline{c_k(v.\Gamma)} .$$

D'où

$$\frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} z_1^m . z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} . f_1^{(m)}(x_1) . f_2^{(m)}(x_2)\, f_3^{(m)}(x_3) =$$

$$\frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} z_1^m . z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} . c_1(\beta_1^m v.\Gamma) . c_2(\beta_2^m v.\Gamma) . c_3(\beta_3^m v.\Gamma) \times \overline{c_1(v.\Gamma)}. \overline{c_2(v.\Gamma)}. \overline{c_3(v.\Gamma)}.$$

D'après le lemme 1, pour presque tout v dans N, cette dernière suite converge pour tous z_1 et z_2 dans U_1.

Grâce à la remarque faite au début de la preuve du lemme 2, on en déduit que, pour presque tout (x_1, x_2, x_3) dans $\tilde{G}$, cette suite converge pour tous z_1 et z_2 dans U_1. Ceci est la conclusion du lemme 2.

<u>Preuve du lemme 3</u> :

Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \tilde{G}$ et si φ_1, φ_2 et φ_3 sont des fonctions mesurables définies respectivement sur $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ et $\tilde{G}_3$, notons

$$\mathcal{M}(M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=O}^{M-1} \varepsilon^m \prod_{k=1}^{3} \varphi_k(x_k + md\alpha_k). \gamma_k(p(x))^m . \gamma_k(\alpha)^{\frac{m(m-1)}{2}} . f_k(x_k).$$

Si φ_1, φ_2, φ_3 sont des caractères de, respectivement, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ et $\tilde{G}_3$, on a :

$$\mathcal{M}(M,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)(x)=\left(\frac{z}{M}\sum_{m=0}^{M-1} z_1^m.z_2^{\frac{m(m-1)}{2}} .f_1^{(m)}(p(x)).f_2^{(m)}(p(x)).f_3^{(m)}(p(x)) \right).$$

où $z_1 = \varepsilon.\varphi_1(d\alpha_1).\ \varphi_2(d\alpha_2).\varphi_3(d\alpha_3)\ .\ \gamma_1(p(x)).\ \ \gamma_2(p(x))\ .\ \gamma_3(p(x))$,
$z_2 = \gamma_1(\alpha)\ .\ \gamma_2(2\alpha).\ \gamma_3(3\alpha)$ et $z = \varphi_1(x_1)\ .\ \varphi_2(x_2)\ .\ \varphi_3(x_3)$.

Grâce au lemme 2, on sait que pour presque tout x dans $\tilde{G}$, cette suite est convergente.

On en déduit que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des combinaisons linéaires de caractères de, respectivement, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ et $\tilde{G}_3$, alors la suite $(\mathfrak{M}(M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3))_{M>0}$ converge presque partout.

Le passage à des fonctions mesurables et bornées quelconques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se fait grâce à des inégalités maximales ; le principe est exactement le même que celui utilisé dans la preuve du **lemme 1.**

Preuve du lemme 4

De (22) on déduit que, si $k \in \{1,2,3\}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a, pour presque tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\tilde{G}$,

$$H_k^{(dm)}(p(x)) = \gamma_k(p(x))^m.\ \gamma_k(k\alpha)^{\frac{m(m-1)}{2}}.\ f_k^{(m)}(x_k).\ A_k(x_k+md\alpha_k).\ E_k^m\ .\ A_k(x_k)^{-1}.$$

Si on note $A_k = (a_{i,j}^k)_{1\leq i,j\leq d_k}$

$$\text{et } E_k = \begin{pmatrix} e_1 & & O \\ & e_2 & \\ 0 & & \ddots\ e_{d_k} \end{pmatrix},\quad \text{on a, si } (i,j) \in [1,d_k]^2,$$

$$h_{i,j}^{k,dm} = \gamma_k(\rho(x))^m.\ \gamma_k(k\alpha)^{\frac{m(m-1)}{2}}.\ f_k^{(m)}(x_k).\ \sum_{\ell=1}^{d_k} a_{i\ell}^k(x_k+md\alpha_k)\ .\ e_\ell^m\ .\ \overline{a_{j\ell}^k}\ (x_k).$$

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 des fonctions mesurables et bornées sur G.
Soient, pour $k = 1, 2$ et 3, des entiers i_k et j_k entre 1 et d_k.

Si $\tilde{x} \in \tilde{G}$ et si $x = p(\tilde{x})$, l'expression

$$\mathfrak{M}_M(\tilde{x}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \varphi_1(x+md\alpha).\varphi_2(x+2md\alpha)\ .\varphi_3(x+3md\alpha)\ .\ h_{i_1,j_1}^{1,dm}(x)\ .\ h_{i_2,j_2}^{2,dm}(x)\ .\ h_{i_3,j_3}^{3,dm}(x)$$ s'écrit comme une

somme d'expressions du même type que celle étudiée dans le lemme précédent.

On en déduit que la suite $(\mathfrak{M}_M)_{M>0}$ converge presque partout sur $\tilde{G}$. Du fait que $\mathfrak{M}_M(\tilde{x})$ ne dépend que de $p(\tilde{x})$ et du fait que l'image par p de la probabilité de Haar de $\tilde{G}$ est la probabilité de Haar de G, on déduit la conclusion du lemme 4.

Fin de la preuve du théorème

Si $k \in \{1,2,3\}$, $t \in \mathbb{N}$ et $(i,j) \in [1, d_k]^2$, on a

$$(24) \qquad h_{i,j}^{k,md+t}(x) = \sum_{\ell=1}^{d_k} h_{i,\ell}^{k,md}(x) \, . \, h_{\ell,j}^{k,t}(x+ mdk\alpha).$$

Soient φ_1, φ_2 et φ_3 des fonctions mesurables et bornées sur G et, pour $k = 1, 2$ et 3, soient i_k et j_k deux entiers entre 1 et d_k.

On a

$$\frac{1}{Md}\sum_{m=0}^{Md-1} \varphi_1(x+m\alpha).\varphi_2(x+2m\alpha).\varphi_3(x+3m\alpha).h_{i_1,j_1}^{1,m}(x).h_{i_2,j_2}^{2,m}(x).h_{i_3,j_3}^{3,m}(x) =$$

$$\frac{1}{d}\sum_{t=O}^{d-1}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\varphi_1(x+(md+t)\alpha.\varphi_2(x+2(md+t)\alpha)).\varphi_3(x+3(md+t)\alpha).h_{i_1,j_1}^{1,md+t}(x).h_{i_2,j_2}^{2,md+t}.(x).h_{i_3,j_3}^{3,md+t}(x)\right).$$

Grâce à (23) cette dernière expression peut s'écrire comme une somme finie d'expression du même type que celle étudiée dans le lemme 4.

On en déduit que la suite

$$\left(\frac{1}{Md}\sum_{m=0}^{Md-1}\varphi_1(x+m\alpha).\varphi_2(x+2m\alpha).\varphi_3(x+3m\alpha).h_{i_1,j_1}^{1,m}(x).h_{i_2,j_2}^{2,m}.(x).h_{i_3,j_3}^{3,m}(x)\right)_{M>0}$$

converge pour presque tout x dans G.

Ceci suffit bien sûr pour prouver que la suite

$$\left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\varphi_1(x+m\alpha).\varphi_2(x+2m\alpha).\varphi_3(x+3m\alpha).h^{1,m}_{i_1,j_1}(x).h^{2,m}_{i_2,j_2}.(x).h^{3,m}_{i_3,j_3}(x)\right)_{M>0}$$

converge pour presque tout x dans G.

L'affirmation **(21)** est établie, ce qui achève la démonstration.

REFERENCES

[1] **J.P. CONZE et E. LESIGNE**, Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales, *Bull. Soc. Math. Fr. , 112, 1984, p. 143-175.*

[2] **J.P. CONZE et E. LESIGNE**, Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 491-493, 1988.*

[3] **E. HEWITT et K.A. ROSS**, Abstract harmonic analysis, *Springer Verlag Berlin 1963*

[4] **E. LESIGNE**, Résolution d'une équation fonctionnelle, *Bull. Soc. Math. Fr., 112, 1984, p.176-196.*

[5] **E. LESIGNE**, Théorèmes ergodiques pour une translation sur une "nilvariété", *à paraître dans Erg. Th. and Dyn. Systems.*

[6] **E. LESIGNE**, Un théorème de disjonction de systèmes dynamiques et une généralisation du théorème ergodique de Wiener-Wintner, *Prepint.*