HUBERT HENNION

Comportement des exposants de Lyapounov d'une matrice perturbée par des rotations

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 1
« Probabilités », , p. 89-98
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___1_89_0>

COMPORTEMENT DES EXPOSANTS DE LYAPOUNOV

D'UNE MATRICE PERTURBEE PAR DES ROTATIONS

par H. HENNION

Soit μ une probabilité sur $Gl(d, \mathbb{R})$ et $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes de lois μ, telles que :

$$E [\sup (\mathrm{Log}^+ \|X_1\| , \mathrm{Log}^+ \|X_1^{-1}\|)] < +\infty ,$$

la loi des grands nombres de Furstenberg-Kesten [6] affirme que

$$\lim_n \text{ p.s. } \frac{1}{n} \mathrm{Log} \|X_n \dots X_1\| = \gamma (\mu) .$$

Si $(\mu_s)_{s>0}$ est une famille de probabilités irréductibles sur $Gl(d, \mathbb{R})$ satisfaisant à l'hypothèse d'intégrabilité ci-dessus et convergeant vers μ lorsque s tend vers 0, la convergence de $\gamma(\mu_s)$ vers $\gamma(\mu)$ qui est facilement établie lorsque μ est irréductible peut être mise en défaut dans le cas contraire, comme le montre le cas où :

$$\mu = \delta_a , \quad \mu_s = (1 - s) \delta_a + s \delta_b , \quad 0 < s \leqslant 1 ,$$

$$a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} , \quad \lambda > 1, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le problème posé est alors celui d'énoncer des conditions sur $(\mu_s)_{s>0}$ propres à rétablir un comportement continu de $\gamma(\mu_s)$. On trouve des éléments de réponse dans [3] , [4] , [5] .

L'objet de ce qui suit est l'étude de ce problème pour des matrices 2x2 lorsque $\mu_s = m_s * \delta_a$ que a désigne la matrice diagonale définie ci-dessus et que $(m_s)_s$ est une famille de probabilités irréductibles portées par le sous-groupe SO(2) des rotations de $\mathbb{R}^2$ et convergeant vers la matrice identité. A la lecture de la preuve, il apparaîtra que la méthode utilisée peut s'appliquer à des situations plus générales, aussi cette rédaction n'a t'elle d'autre but que de marquer une étape d'un travail en cours, le résultat énoncé ci-après n'en est pas moins, à la connaissance de l'auteur, original.

Notations : si $r \in SO(2)$, $\Theta(r)$ désigne la mesure modulo π dans $]-\pi/2 , +\pi/2]$ de l'angle de la rotation r, pour $0 < \Theta < \pi/2$, on pose :

$$L_\Theta = \{ r : r \in SO(2) , | \Theta(r) | \geq \Theta \}$$

et l'on définit les probabilités m^Θ par :

$$m^\Theta (A) = \frac{m_s(A \cap L_\Theta)}{m_s (L_\Theta)}.$$

Théorème 1.

Supposons qu'il existe Θ_0, $0 < \Theta_0 < \pi/2$, tel que toutes les valeurs d'adhérence, s tendant vers 0, des probabilités $(m_s^{\Theta_0})_s$ satisfassent à la condition :

$$m (\{ r : \Theta(r) = \pi/2 \}) = 0 ,$$

alors

$$\lim_{s \to 0} \gamma(\mu_s) = \gamma(\delta_a) = \mathrm{Log}\, \lambda .$$

Notons $Gl(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices $2x2$ inversibles, $\mathbb{P}_1$ la droite projective et $g.x$ l'action projective de $g \in Gl(2, \mathbb{R})$ sur $x \in \mathbb{P}_1$; l'opérateur markovien P_s, $P_s f(x) = \int f(g.x) \mu_s (dg)$, f mesurable bornée sur $\mathbb{P}_1$, définit la marche aléatoire de loi μ_s sur $\mathbb{P}_1$; puisque m_s donc μ_s est irréductible, l'on sait, d'après Furstenberg [7], que :

$$\gamma(\mu_s) = \int \text{Log}\, \rho(g, x)\, \mu_s (dg)\, \nu_s (dx)$$

où ν_s est une probabilité P_s-invariante sur $\mathbb{P}_1$ et où $\rho(g, x)$ est la fonction sur $Gl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}_1$ obtenue par factorisation de la fonction $q(g, x) = \|gx\| . \|x\|^{-1}$ définie sur $Gl(2, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Puisque le support de $\mu_s \otimes \nu_s$ reste contenu dans un compact fixe, il suffit pour établir le théorème de montrer que les familles $(\nu_s)_s$ convergent vers δ_u où u désigne l'image dans $\mathbb{P}_1$ du vecteur $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi le théorème 1 est-il conséquence de

Théorème 2.

Sous les hypothèses du théorème 1, si $(\nu_s)_s$ est une famille de probabilités sur $\mathbb{P}_1$ satisfaisant à $\nu_s P_s = \nu_s$, alors

$$\lim_{s \to 0} \nu_s = \delta_u .$$

Il s'agit donc de fait d'étudier les mesures invariantes de perturbations markoviennes du système dynamique $(\mathbb{P}_1, a)$. Nous avons été inspiré dans cette étude par un article de Göra [2] reprennant dans le cas des sytèmes dynamiques des éléments des travaux de Wentzell et Freidlin sur les flots [1].

Un passage a la limite dans l'égalité $\nu_s P_s = \nu_s$, montre que les valeurs d'adhérence de $(\nu_s)_s$ sont a-invariantes et donc de la forme $(1 - w)\,\delta_u + w\,\delta_v$ où v est l'image projective de $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, il faut donc prouver que $w = 0$; à noter que, puisque $\lim_s \gamma(\mu_s) \geq 0$, $w \leq 1/2$.

La preuve consiste à appliquer à des chaines de Markov à espace d'état fini, associées aux chaines $(P_s)_s$ et à une partition de $\mathbb{P}_1$, un énoncé concernant le comportement des probabilités invariantes d'une famille de chaines irréductibles convergeant vers une chaine réductible.

1. La clé.

Proposition :

Soit $p_s = [\, p_s(i, j)\,]_{i=1\ldots r,\ j=1\ldots r}$, $s > 0$, une famille de probabilités de transition irréductibles sur $\{1 \ldots r\}$ et λ_s les probabilités invariantes correspondantes.

On suppose que :

(a) $\lim_{s\to 0} p_s(i, j) = \delta_{i-1,j}$ $\quad i = 2 \ldots r-1$

(b) $\lim_{s\to 0} p_s(1, j) = \delta_{1,j}$ $\quad j = 1 \ldots r$

(c) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{1 - p_s(1, 1)}{1 - p_s(r, r)} = \rho_1$

(d) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{p_s(1, r)}{1 - p_s(1, 1)} = \rho_2$

alors

$\limsup_{s\to 0} \lambda_s(r) \leq \rho_1\, \rho_2$.

Démonstration de la proposition.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n=0}^{\infty}, (P_i^s)_{i\in[1...r]})$ la chaine de Markov de transition p_s et $\tau = \inf[n : n \geqslant 1, X_n \in \{1, r\}]$, on a :

Lemme :

Si $c(s) = \sup_{i=2...r-1} P_i^s([X_\tau = r])$ alors $\lim_{s\to 0} c(s) = 0$.

Démonstration du lemme.

On a

$$P_i^s([X_\tau = r]) \leqslant P_i^s([X_\tau = r, \ \tau \leqslant r-2]) + P_i^s([\tau > r-2])$$

et

$$\begin{aligned} P_i^s([\tau > r-2]) &\leqslant P_i^s\left(\bigcup_{n=0}^{r-2} [X_n \in [2...r-2], X_{n+1} \geqslant X_n]\right) \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{r-2} P_i^s([X_n \in [2...r-2], X_{n+1} \geqslant X_n]) \\ &\leqslant (r-1) \sup_{j=2...r-1} \left\{ \sum_{k=j}^{r} p_s(j,k) \right\}, \end{aligned}$$

on conclut d'après (a).

Soit $\widetilde{p}_s$ la chaîne induite sur $\{1, r\}$ par p_s, on a :

$$\frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} = \frac{\widetilde{p}_s(1,r)}{\widetilde{p}_s(r,1)} = \frac{p_s(1,r) + \sum_{i=2}^{r-1} p_s(1,i)\, P_i^s([X_\tau = r])}{1 - p_s(r,r) - \sum_{i=2}^{r-1} p_s(r,i)\, P_i^s([X_\tau = r])}$$

d'où

$$\frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} \leqslant \frac{p_s(1,r) + c(s)(1 - p_s(1,1) - p_s(1,r))}{1-p_s(r,r)-c(s)(1-p_s(r,1)-p_s(r,r))} \leqslant \frac{p_s(1,r) + c(s)(1 - p_s(1,1))}{1-p_s(r,r)-c(s)(1-p_s(r,r))}$$

$$\leqslant \frac{1 - p_s(1,1)}{1 - p_s(r,r)} \; \frac{1}{1 - c(s)} \left(\frac{p_s(1,r)}{1 - p_s(1,1)} + c(s) \right)$$

finalement

$$\limsup_s \frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} \leqslant \rho_1 \quad \rho_2 . \qquad \blacksquare$$

2. Chaines de Markov moyennes.

Si $x \in \mathbb{P}_1$ est représenté par le vecteur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on note :

$$t(x) = \left|\frac{x_2}{x_1}\right| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Soit $t_1 > 0$ et et $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$, on pose :

$$t_i = \left(\frac{\lambda^2 + 1}{2}\right)^{i-1} t_1, \qquad i = 1 \ldots r-1$$

$$\alpha_1 = \text{Arctg}\, t_1 \;, \quad \alpha_r = \pi/2 - \text{Arctg}\, t_{r-1} \;,$$

$$\beta_1 = \text{Arctg}\, t_1 - \text{Arctg}\, \frac{t_1}{\lambda^2} \;, \quad \beta_r = \text{Arctg}\, t_{r-1} - \text{Arctg}\, \frac{t_{r-1}}{\lambda^2} .$$

et l'on associe au couple (t_1, r) la partition $\mathcal{P}(t_1, r)$ de $\mathbb{P}_1$ définie par :

$$c_1 = \{ x : t(x) \leqslant t_1 \}$$

$$c_i = \{ x : t_{i-1} < t(x) \leqslant t_i \}, \qquad i = 2 \ldots r-1 .$$

$$c_r = \{ x : t_{r-1} < t(x) \} .$$

Soit ν_s une probabilité P_s invariante sur $\mathbb{P}_1$, on note P_s la chaine sur $\{1 \dots r\}$ définie par :

$$p_s(i, j) = \frac{1}{\nu_s(c_i)} \int_{c_i} P_s\,(x, c_j)\, \nu_s(dx)\ , \qquad \text{si} \quad \nu_s(c_i) > 0$$

$$p_s(i, j) = \delta_{i,i-1}\ , \quad \text{si} \ \ i = 2 \dots r-1 \quad \text{et} \quad \nu_s(c_i) = 0$$

(puisque $w \leqslant 1/2$, $\nu_s(c_1) > 0$ pour s assez petit) :

l'on vérifie sans peine que la probabilité λ_s définie par :

$$\lambda_s\,(i) = \nu_s(c_i)$$

est p_s invariante.

3. Application de la proposition aux chaines moyennes.

Puisque $t(a.x) = \frac{1}{\lambda^2}\, t(x)$, on a

$$a(c_i) = \{\, x : \frac{1}{\lambda^2}\, t_{i-1} < t(x) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\, t_i < t_{i-1} \,\}, \qquad i = 2 \dots r-1\ ,$$

$$a(c_1) = \{\, x : \ t(x) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\, t_1 \,\}$$

de sorte que, utilisant, lorsque $\nu_s(c_i) > 0$, la double inégalité :

$$\inf_{x \in c_i} P_s(x, c_j) \leqslant p_s\,(i, j) \leqslant \sup_{x \in c_i} P_s(x, c_j)$$

l'on peut affirmer que, d'après la convergence de $(m_s)_s$ vers l'identité, $(p_s)_s$ satisfait aux conditions (a) et (b) de la proposition, tandis que le caractère géométrique particulier des rotations permet les estimations.

(1) $1 - p_S(1,1) \leqslant m_S(\{r : |r(\Theta)| > \beta_1\})$,

(2) $1 - p_s(1,1) \geqslant m_S(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_1\})$,

(3) $p_s(1,r) \leqslant m_S(\{r : |r(\Theta)| > \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_r + \beta_1\})$,

(4) $1 - p_S(r,r) \geqslant m_S(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_r + \beta_r\})$,

Choisissons maintenant les nombres t_1 et r qui définissent la partition $\mathcal{S}(t_1, r)$ de telle façon que, Θ_0 étant la donnée de l'énoncé du théorème 1 ,

(5) $2\alpha_1 < \Theta_0$. , $\eta = (\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_r < \pi/2 - \Theta_0$, $2\alpha_r + \beta_r \leqslant \beta_1$

(il suffit pour cela de choisir $\alpha_1 < \inf\{\Theta_0/2, 1/2(\pi/2 - \Theta_0)\}$, puis r assez grand pour que $\alpha_r < 1/2(\pi/2 - \Theta_0)$ et $2\alpha_r + \beta_r \leqslant \beta_1$) ; on déduit alors de (1) et (4) que :

$$\frac{1 - p_S(1,1)}{1 - p_S(r,r)} \leq \frac{m_S(\{r : |r(\Theta)| > \beta_1\})}{m_s(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_r + \beta_S\})} \leq 1$$

puis de (2) et (3) que :

$$\frac{p_S(1,r)}{1 - p_S(1,1)} \leq \frac{m_S(\{r : |r(\Theta)| > \pi/2 - \eta\})}{m_S(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_1\})} = \frac{m_S(L_{\pi/2-\eta})}{m_S(L_{2\alpha_1})}$$

puisque $\pi/2 - \eta > \Theta_0$ et $2\alpha_1 < \Theta_0$

$$\frac{p_s(1,r)}{1-p_s(1,1)} \leqslant \frac{m_s(L_{\Pi/2-\eta} \cap L_{\Theta_0})}{m_s(L_{\Theta_0})} \; \frac{m_s(L_{\Theta_0})}{m_s(L_{2\alpha_1})} \leqslant m_s^{\Theta_0}(L_{\Pi/2-\eta})$$

La proposition permet alors de conclure que :

$\limsup_s \nu_s(c_r) = \limsup_s \lambda_s(r) \leqslant \limsup_s m_s^{\Theta_0}(L_{\Pi/2-\eta}) = c(\eta)$

4. Enfin.

Puisque c_r est ouvert, si $(\nu_{s_k})_k$ converge vers ν, on a :

$$\nu(\{v\}) \leqslant \nu(c_r) \leqslant \underline{\lim}_k \nu_{s_k}(c_r) \leqslant c(\eta),$$

en faisant tendre t_1 vers 0 et r vers l'infini de façon à respecter les conditions (5), il vient :

$$\nu(\{v\}) \leqslant \underline{\lim}_\eta c(\eta),$$

l'hypothèse du théorème implique $\lim_\eta c(\eta) = 0$. ∎

Références

1 M.I. Freidlin - A.D. Wentzell : Random perturbations of dynamical systems. Springer-Verlag.

2 P. Gora : Random composing of mappings, small stochastic perturbations and attractors. Zeit. f. Wahrsch. 69, 137-160, 1985.

3 H. Hennion : Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes. Zeit. f. Wahrsch. 67, 265-278, 1984.

4 Y. Kifer : Perturbations of random matrix products. Zeit. f. Wahrsch. 61, 83-95, 1982.

5 E.V. Slud : Stability of exponential rate of growth of products of random matrices under local random perturbations. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) 180-192.

6 H. Furstenberg - H. Kesten : Products of random matrices. An. Math. Stat. 31, 457-469, 1960.

7 H. Furstenberg : Non commuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 108, 1963, 377-428.