PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN NOURRIGAT

Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 261-303
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_261_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CHAPITRE IX

INEGALITES L^2 ET REPRESENTATIONS DE GROUPES NILPOTENTS

NOURRIGAT Jean

Université de Rennes

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE

INEGALITES L^2 ET REPRESENTATIONS DE GROUPES NILPOTENTS

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étendre à certains opérateurs hypoelliptiques, (images par une représentation d'un groupe nilpotent G d'opérateurs invariants à gauche) la méthode classique de démonstration d'inégalités L^2 par transformation de Fourier utilisée pour les opérateurs à coefficients constants.

Si $P(D_x)$ est un opérateur elliptique, homogène d'ordre m, à coefficients constants, l'inégalité classique :

$$(0.1) \qquad \sum_{|\alpha|=m} ||D_x^{\alpha} f||^2 \leqslant C \, ||P(D_x)f||^2 \qquad \forall \ f \in \mathcal{S}(R^n)$$

résulte de la suivante

$$(0.2) \qquad \sum_{|\alpha|=m} |\xi^{\alpha}|^2 \leqslant C\, |P(\xi)|^2 \qquad \forall\, \xi \in S^{n-1}$$

qui provient elle-même de la continuité des deux membres, du fait que celui de droite est non nul, et de la compacité de S^{n-1}.

Si maintenant l'opérateur étudié est l'image d'un opérateur homogène invariant à gauche P par une représentation Π^{o} d'une forme décrite au §-1, on a défini dans un livre [3] avec B. Helffer un ensemble Γ de représentations irréductibles de G, tel que l'injectivité de $\Pi(P)$ pour tout $\Pi \in \Gamma$ est nécessaire pour l'inégalité analogue à (0.1) (voir Définition 1.5).

Nous démontrons ici la réciproque (Théorème 1.6). L'étape la plus difficile est celle de la continuité pour les inégalités analogues à (0.2)'. L'espace topologique qui remplace la sphère S^{n-1} est le quotient de l'ensemble $\hat{G}\backslash\{0\}$ des représentations unitaires irréductibles non triviales de G par l'action des dilatations, cet espace étant muni de la topologie quotient. On utilise pour l'analogue de (0.2) une propriété voisine de la semi-continuité, exprimée dans le théorème 1.2, et qui avait été démontrée dans un cas particulier dans [3] (chapitre VIII). Les arguments qui permettent de déduire l'analogue de (0.1) de cette propriété sont les mêmes que dans [3]. En particulier, on prouve une nouvelle fois la conjecture de C. Rockland, [10], par une méthode plus simple que dans [2] et [7].

On a montré dans [9] qu'une condition d'injectivité analogue à celle du théorème 1.6 est nécessaire pour des inégalités analogues à (0.1) pour des opérateurs pseudo-différentiels plus généraux. Le théorème 1.2 sera peut-être une première étape vers la preuve de la réciproque.

Les difféomorphismes construits au §-5 sont inspirés de ceux qu'emploie Y. Egorov dans [1] (voir aussi Hörmander [4]).

Je remercie Y. Guivarc'h et J. Camus de m'avoir suggéré ce problème.

1 - ENONCE DU RESULTAT -

On considère une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, admettant une décomposition en somme directe de sous-espace $\mathfrak{g}_j$ $(1 \leq j \leq r)$ tels que :

(1.1) $$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{j+k} \qquad \text{si } j+k \leq r$$
$$= 0 \qquad \text{si } j+k > r$$

On considère une base (X_I) de $\mathfrak{g}$, dont chacun des éléments est dans l'un des sous-espaces $\mathfrak{g}_j$, l'indice j correspondant étant noté $|I|$.

On désigne par $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$ l'ensemble des expressions polynomiales non commutatives, homogènes de degré k, par rapport aux X_I. On notera (A_{jk}) une base de $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$. Pour l'homogénéité, les X_I ont le poids $|I|$.

Dans toute la suite, on considère un entier $m \geq 0$, et on supposera toujours que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(H_o) $\begin{cases} \text{- ou bien } \mathfrak{g} \text{ est "stratifiée", c'est à dire engendrée par le sous-espace } \mathfrak{g}_1. \\ \text{- ou bien } m \text{ est un multiple commun de } 1,2,\ldots,r. \end{cases}$

On considère un élément P de $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, fixé dans toute la suite, et les éléments A_{jm} homogènes de même degré m seront notés simplement A_j.

On notera δ_t l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ telle que $\delta_t(X_I) = t^{|I|}X_I$ $(t > 0,\ |I| \leqslant r)$, et par δ_t^* sa transposée.

A toute forme linéaire $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on associe classiquement une représentation unitaire irréductible Π_ℓ du groupe $G = \exp \mathfrak{g}$, (voir Kirillov [6], ou bien [3]). La représentation Π_ℓ sera réalisée dans $L^2(R^{k(\ell)})$, où $k(\ell)$ est un entier dépendant de ℓ. On notera aussi Π_ℓ la représentation correspondante de l'algèbre $\mathfrak{g}$. Pour toute représentation irréductible $\Pi \in \hat{G}$, l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles que Π soit équivalente à Π_ℓ est appelé orbite de Π et noté $O(\Pi)$. Si $\ell \in O(\Pi)$, on pose $H_\Pi = L^2(R^{k(\ell)})$ et $\mathcal{S}_\Pi = \mathcal{S}(R^{k(\ell)})$.

La topologie de l'ensemble quotient évoqué dans l'introduction n'est pas séparée, ce qui nous amène à associer à toute suite (Π_ν) $(\nu \in N)$ dans $\hat{G}$ un ensemble limite $\mathcal{L}$, selon la définition suivante :

DEFINITION 1.1

Si (Π_ν) $(\nu \in N)$ est une suite dans $\hat{G}$, on notera $\mathcal{L}$ l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite d'entiers (n_q), tendant vers $+\infty$, une suite (t_q) dans R^+, et, pour tout $q \in N$, un élément ℓ_q dans $O(\Pi_{n_q})$, tels que

(1.2) $$\ell = \lim_{q\to\infty} \delta_{t_q}^* \ell_q$$

Le résultat principal de ce travail est le suivant :

THEOREME 1.2

Soit (Π_ν) $(\nu \in N)$ une suite de représentations unitaires irréductibles non triviales de G. On suppose qu'il existe $C_o > 0$ tel que l'on ait :

(1.3) $$\sum_j ||\Pi_\ell(A_j)f||^2 \leq C_o||\Pi_\ell(P)f||^2$$

pour tout ℓ dans l'ensemble $\mathcal{L}$ ci-dessus, et pour tout f dans $\mathcal{S}_{\Pi_\ell} = \mathcal{S}(R^{k(\ell)})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel qu'on ait, pour tous $\nu \geq N(\varepsilon)$ et $f \in \mathcal{S}_{\Pi_\nu}$

(1.4) $$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leq (C_o + \varepsilon)||\Pi_\nu(P)f||^2$$

On désigne par H^m_Π l'espace des fonctions $f \in H_\Pi$ telles que $\Pi(A)f$ soit dans H_Π pour tout $A \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$ $(k \leq m)$, cet espace étant muni de sa norme naturelle. On sait qu'il existe en entier m_o tel que l'injection de $H_\Pi^{m_o}$ dans H_Π soit compacte, pour tout $\Pi \in \hat{G}\backslash\{0\}$. Si $\mathfrak{g}$ est engendrée par le sous-espace $\mathfrak{g}_1$, on a $m_o = 1$. Avec les mêmes arguments que dans [3], on déduit du théorème 1.2 la conséquence suivante :

THEOREME 1.3

On suppose que $m \geq m_o$. Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{g}^*$, stable par les dilatations δ_t^*. On suppose que F est une réunion d'orbites, et que, pour tout $\ell \in F\backslash\{0\}$, l'opérateur $\Pi_\ell(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$. Alors il existe $C_o > 0$ tel que (1.3) soit vérifiée pour tout $\ell \in F$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(R^{k(\ell)})$.

Soit maintenant Π un élément fixé de $\hat{G}\backslash\{0\}$. On note $\Gamma(\Pi)$ l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite (ℓ_ν) dans l'orbite $O(\Pi)$ et une suite (t_ν) dans R^+, tendant vers 0, telles que

$\ell = \lim_{\nu\to\infty} \delta^*_{t_\nu} \ell_\nu$, (cône asymptotique de l'orbite). On déduit aussi du théorème 1.2, avec les mêmes arguments que dans [3], la proposition suivante :

PROPOSITION 1.4

Soit $\Pi \in \hat{G}\setminus\{0\}$. On suppose $m \geq m_o$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) L'opérateur $\Pi(P) = H^m_\Pi \to H_\Pi$ est d'image fermée, et son noyau est de dimension finie.

ii) Pour tout $\ell \in \Gamma(\Pi)\setminus\{0\}$, l'opérateur $\Pi_\ell(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_{\Pi_\ell}$.

Si ces conditions sont satisfaites, le noyau de $\Pi(P)$ est contenu dans $\mathcal{S}_\Pi$.

Soit maintenant Π^o une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{S}(R^n)$ telle que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'opérateur $\Pi^o(X)$ soit de la forme suivante :

$$\Pi^o(X) = A_1(X)\frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1,X)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + A_n(x_1,\dots,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{1.5}$$

où les $A_j(.,X)$ sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables indiquées. On fait l'hypothèse suivante :

$$(H_1) \quad \begin{cases} \text{Il existe } x_o \in R^n \text{ tel que les formes linéaires } X \to A_j(x_o,X) \text{ sont} \\ \text{linéairement indépendantes dans } \mathfrak{g}^*. \end{cases}$$

Cette condition, qui est équivalente à la condition des crochets de Hörmander, est alors vérifiée en tout point. On peut identifier Π^o à la différentielle de la représentation quasirégulière de G dans $L^2(H\backslash G)$, où H est un sous-groupe de G.

DEFINITION 1.5

Pour tout $x_o \in R^n$, on désigne par Γ_{x_o} l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite (x_ν,ξ_ν) dans R^{2n}, et une suite (t_ν) dans R^+, telles que :

$$x_\nu \to x_o \qquad |\xi_\nu| \to \infty \qquad \text{quand} \quad \nu \to \infty$$

(1.6)

$$\ell(X_I) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{i}\, t_\nu^{|I|}\, \Pi^o(X_I)(x_\nu,\xi_\nu) \qquad \text{si } |I| \leqslant r$$

On a désigné par $\Pi^o(X)(x,\xi)$ le symbole complet de l'opérateur differentiel $\Pi^o(X)$. On déduira des théorèmes 1.2 et 1.3 le suivant :

THEOREME 1.6

Pour tout $x_o \in R^n$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes, si $m \geqslant m_o$:

i) Il existe un voisinage V de x_o et une constante C 0 , tel qu'on ait :

(1.7) $$\sum_j ||\Pi^o(A_j)f||^2 \leqslant C\,[||\Pi^o(P)f||^2 + ||f||^2] \quad \forall f \in C_o^\infty(V)$$

ii) Pour tout $\ell \in \Gamma_{x_o}\backslash\{0\}$, l'opérateur $\Pi_\ell(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_{\Pi_\ell}$.

L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est démontrée dans des situations plus générales dans [9]. Rappelons que l'inégalité (1.7) entraîne l'hypoellipticité de l'opérateur $\Pi^o(P)$. Lorsque R^n est muni d'une famille de dilatations telle que les opérateurs $\Pi^o(X_I)$ soient quasi-homogènes de degré $|I|$, et lorsque $x_o = 0$, l'ensemble Γ_{x_o} coïncide avec le spectre de Π^o (voir [3], chapitre II). En particulier, si Π^o est la représentation régulière de G, le spectre est $\hat{G}$ tout entier, et l'on retrouve la conjecture de C. Rockland.

2 - FORME EXPLICITE DU RESULTAT -

Nous allons énoncer un résultat plus général, dont se déduiront les théorèmes 1.2 et 1.6. On désigne par E l'ensemble des représentations Π de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{S}(R^n)$ telles que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'opérateur $\Pi(X)$ soit de la forme suivante :

$$\Pi(X) = A_1(X)\frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1,X)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + A_n(x_1,\ldots,x_{n-1},X)\frac{\partial}{\partial x_n} + i\,B(x,X) \tag{2.1}$$

où les $A_j(.,X)$ et $B(.,X)$ sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables indiquées, et telles que la représentation Π^o associée

$$\Pi^o(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x,X)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.2}$$

vérifie l'hypothèse (H_1) du §-1. L'ensemble E coïncide avec l'ensemble des représentations induites à partir de sous-algèbres de codimension n, (§-1.6 du chapitre II de [3]).

On considère maintenant une suite (Π_ν) $(\nu \in N)$ dans E et une suite (K_ν) de fermés de R^n. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on note $\Pi_\nu(X)\,(x,\xi)$ le symbole complet de l'opérateur $\Pi_\nu(X)$. On fait l'hypothèse suivante :

$$(H_2) \qquad \sum_{|I|\leq r} |\Pi_\nu(X_I)(x,\xi)| \neq 0 \qquad \forall (x,\xi) \in R^{2n} \qquad \forall\, \nu \in N$$

DEFINITION 2.1

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite (n_q) d'entiers, tendant vers $+\infty$, et, pour tout $q \in N$, un point (x_q,ξ_q) dans $K_{n_q} \times R^n$ et un réel $t_q > 0$ tels que :

$$\ell(X_I) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{i}\, t_q^{|I|}\, \Pi_{n_q}(X_I)\,(x_q,\xi_q) \qquad \text{si } |I| \leq r. \tag{2.3}$$

THEOREME 2.2

Soient (Π_ν) une suite de représentations dans E, vérifiant (H_2), (K_ν) une suite de fermés, et $\mathcal{L}$ l'ensemble ci-dessus. On suppose qu'il existe $C_0 > 0$ tel que (1.3) soit vérifiée pour tous $\ell \in \mathcal{L}$ et $f \in \mathcal{S}_{\Pi_\ell}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_{(\varepsilon)} > 0$ tel qu'on ait (1.4) pour tous $\nu \geq N_{(\varepsilon)}$ et $f \in C_0^\infty(K_\nu)$.

Montrons maintenant comment les théorèmes 1.2 et 1.6 se déduisent du théorème 2.2.

PREUVE DU THEOREME 1.2

Il suffit de démontrer ce théorème lorsque les représentations Π_ν soibt toutes réalisées dans $L^2(R^n)$, puis de faire varier n. On sait ([3], chapitre II) que, si $\Pi \in \hat{G}$ est réalisée dans $L^2(R^n)$, alors la différentielle de Π est dans E, et que son orbite $O(\Pi)$ coïncide avec l'ensemble des formes linéaires $\ell_{(x,\xi)}$ suivantes :

$$(2.4) \qquad \ell_{(x,\xi)}(X) = \frac{1}{i}\,\Pi(X)\,(x,\xi) \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g}$$

où (x,ξ) varie dans R^{2n}. Par conséquent, si (Π_ν) est une suite de telles représentations, l'hypothèse (H_2) est vérifiée, et si $K_\nu = R^n$ pour tout $\nu \in N$, l'ensemble $\mathcal{L}$ de la définition 2.1 coïncide avec celui de la définition 1.1. Par conséquent le théorème 1.2 se déduit du théorème 2.2.

Le théorème 1.3 et la proposition 1.4 se déduisent simultanément du théorème 1.2, par récurrence sur r, avec les mêmes arguments que dans [3] (chapitre VIII, §-3 à 5).

PREUVE DU THEOREME 1.6 (implication ii) => i)

On montre facilement (voir [3]) que l'ensemble Γ_{x_o} vérifie les trois hypothèses du théorème 1.3. Par conséquent, sous l'hypothèse ii), il existe $C_o > 0$ tel que (1.3) soit vérifiée pour tout $\ell \in \Gamma_{x_o}$. On montre ensuite qu'il existe un voisinage V de x_o tel qu'on ait :

$$(2.5) \qquad \sum_j ||\Pi_\ell(A_j)f||^2 \leq 2\, C_o||\Pi_\ell(P)f||^2$$

pour tout $\ell \in \Gamma_x$, $x \in V$, et pour tout $f \in \mathcal{S}_{\Pi_\ell}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde : s'il existait une suite (x_ν) tendant vers x_o, et, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, un élément ℓ_ν de Γ_{x_ν} contredisant (2.5), on montre facilement que l'ensemble $\mathcal{L}$ associé à la suite Π_{ℓ_ν} serait contenu dans Γ_{x_o}. Par conséquant, le théorème 1.2 serait en contradiction, pour ν assez grand, avec l'hypothèse du raisonnement par l'absurde.

Enfin, on démontre (1.7) avec les mêmes arguments qui servaient prouver la proposition 1.4 dans [3]. On considère l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$, telle que $\mathfrak{g} \times \{0\}$ soit isomorphe à $\mathfrak{g}$ et que $X_o = (0,1)$ commute avec $\tilde{\mathfrak{g}}$. On pose $\delta_t(X,y) = (\delta_t X, ty)$ pour tout $(X,y) \in \tilde{\mathfrak{g}}$. On déduit une suite de représentations Π_ν de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en posant :

$$\Pi_\nu(X) = \Pi^o(X) \qquad \text{si} \qquad X \in \mathfrak{g} \times \{0\} \simeq \mathfrak{g}$$

$$\Pi_\nu(X_o) = i\,\nu$$

Si K est un compact de V, on voit facilement que l'ensemble $\tilde{\mathcal{L}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}^*$ associé à la suite Π_ν et à $K_\nu = K$ est tel que la restriction ℓ de tout élément $\tilde{\ell} \in \tilde{\mathcal{L}}$ à $\mathfrak{g}$ est dans la réunion des $\Gamma_x (x \in K)$. Le système des $X_o^{m-k}\, A_{jk}$ (où A_{jk} est une base de $\mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$) forme une base de $\mathcal{U}_m(\tilde{\mathfrak{g}})$, qu'on notera $\tilde{A}_j$. On voit que si $\ell \in \tilde{\mathcal{L}}$, alors $\Pi_{\tilde{\ell}}(X_o)$ est un scalaire, noté $i\,\lambda$.

On sait que, sous l'hypothèse (H_o), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\sum_{k=o}^{m-1} \sum_j \lambda^{2(m-k)} ||\Pi_\ell(A_{jk})f||^2 \leqslant \varepsilon \sum_j ||\Pi_\ell(A_{jm})f||^2 + C(\varepsilon)\, \lambda^{2m}||f||^2 \tag{2.6}$$

pour tous $\ell \in \mathfrak{g}^*$, $\lambda \geqslant 0$ et $f \in \mathcal{S}_{\Pi_\ell}$. On déduit de (2.5) et (2.6) que l'on a, avec un autre $C(\varepsilon) > 0$

$$\sum_j ||\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\ell}}(\widetilde{A}_j)f||^2 \leqslant (2C_o+\varepsilon)||\Pi_\ell(P)f||^2 + C(\varepsilon)||\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\ell}}(X_o)^{2m}f||^2$$

pour tous $\widetilde{\ell} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et $f \in \mathcal{S}_{\widetilde{\Pi}_{\widetilde{\ell}}}$. D'après le théorème 2.2 (ou, plus exactement, d'après son extension aux systèmes surdéterminés, qui se démontre de manière identique), il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\sum_j ||\Pi_\nu(\widetilde{A}_j)f||^2 \leqslant (2C_o+2\varepsilon)||\Pi_\nu(P)f||^2 + (C(\varepsilon)+\varepsilon)||\Pi_\nu(X_o)^{2m}f||^2$$

pour tous $\nu \geqslant N(\varepsilon)$ et $f \in C_o^\infty(K)$. Cette inégalité entraîne bien (1.7).

Le reste de ce travail est consacré à la preuve du théorème 2.2, qui sera démontré par récurrence sur l'entier n. Il est évident si $n = 0$, c'est à dire pour les suites de représentations scalaires. Nous supposerons donc le théorème démontré pour les suites Π_ν réalisées dans $R^k (k \leqslant n-1)$.

Conventions d'écriture.

Dans toute la suite, si Π_λ est une représentation dans E, dépendant d'un paramètre quelconque λ, alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les coefficients de $\Pi_\lambda(X)$ dans l'écriture analogue à (2.1) seront notés $A_j(.,X,\lambda)$ et $B(.,X,\lambda)$, et la représentation associée comme en (2.2) sera notée Π_λ^o.

On dira qu'une famille de polynômes P_λ, dépendant d'un paramètre

λ, est bornée si le degré et les coefficients de P_λ sont bornés indépendamment de λ.

Nous allons maintenant rappeler deux propositions qui seront utilisées plusieurs fois.

THEOREME 2.3

Soient Π une représentation dans E, x_o un point de R^n et $C > 0$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a, pour tout $f \in \mathcal{S}(R^n)$

$$\sum_j ||\Pi(A_j)f||^2 \leqslant C\, ||\Pi(P)f||^2$$

ii) Pour tout $\xi \in R^n$, si $\ell_{(x_o,\xi)}$ est la forme linéaire définie en (2.4), on a

$$\sum_j ||\Pi_{\ell_{(x_o,\xi)}}(A_j)f||^2 \leqslant C\, ||\Pi_{\ell_{(x_o,\xi)}}(P)f||^2 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}_{\Pi_{\ell_{(x_o,\xi)}}}$$

Ce théorème résulte des §-1.6 et 2.2 du chapitre II de [3]. Si la condition i) est vérifiée en un point x_o, elle est vérifiée en tout autre point y_o car on voit que toute forme $\ell_{(y_o,\eta)}$ est dans l'orbite d'une forme $\ell_{(x_o,\xi)}$, grâce à l'hypothèse (H_1).

On considère maintenant une famille de représentations $\Pi_{(\lambda,\rho)}$ dans E, qui dépend de $\lambda > 0$ et d'un autre paramètre ρ qui décrit un ensemble I. Soit K un compact de R^n, indépendant de λ et ρ. On fait les hypothèses suivantes :

1) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les polynômes $A_j(.,X,\lambda,\rho)$ et $\lambda^{-1}B(.,X,\lambda,\rho)$ sont bornés indépendemment de λ et ρ.

2) Il existe un voisinage $\widetilde{K}$ de K et une constante $C > 0$ tels que :

$$\sum_{|I|\leqslant r} |\Pi_{(\lambda,\rho)}(X_I)(x,\xi)| \geqslant C(|\xi|+\lambda) \tag{2.7}$$

pour tous $x \in \widetilde{K}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ et $\rho \in I$.

THEOREME 2.4

Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $C > 0$ et $\lambda_o > 0$ tels que:

$$\sum_{k\leqslant m}\sum_j ||\lambda^{\frac{m-k}{r}}\,\Pi_{(\lambda,\rho)}(A_{jk})f||^2 \leqslant C\sum_j ||\Pi_{(\lambda,\rho)}(A_{jm})f||^2 \tag{2.8}$$

si $\lambda \geqslant \lambda_o$ et $f \in C_o^\infty(K)$.

DEMONSTRATION

1) Cas où m est multiple commun à $1,2,\ldots,r$. On considère les opérateurs suivants dans $R_x^n \times R_y$

$$P_I(x,D_x,D_y) = \sum_{j=1}^n A_j(x,X_I,\lambda,\rho)\,\frac{\partial}{\partial xy} + \frac{1}{\lambda}\,B(x,X_I,\lambda,\rho)\,\frac{\partial}{\partial y}$$

Les coefficients de ces champs de vecteurs sont bornés dans $C^\infty(R^{n+1})$ indépendemment de λ et ρ. D'après (2.7) on a :

$$\sum_{|I|\leqslant r} |P_I(x,\xi,\eta)| \geqslant C(|\xi|+|\eta|)$$

pour tous $x \in \widetilde{K}$, $(\xi,\eta) \in R^{n+1}$, $\lambda > 0$ et $\rho \in I$. Soit L le compact $K_x \times [-1,1]_y$.

D'après l'ellipticité du système, il existe $C > 0$, indépendant de λ et ρ, tel que :

$$||\frac{\partial g}{\partial y}||^2 \leqslant C\sum_{|I|\leqslant r} ||P_I(x,D_x,D_y)g||^2 + C\,||g||^2 \qquad \forall\, g \in C_o^\infty(L)$$

On en déduit que, pour tous $\eta \in R$ et $f \in C_o^\infty(K)$, on a :

$$||\eta f||^2 \leqslant C \sum_{|I|\leqslant r} ||P_I(x,D_x,\eta)f||^2 + C\,||f||^2$$

En particulier, pour $\eta = \lambda$.

$$(2.9) \qquad ||\lambda f||^2 \leqslant C \sum_{|I|\leqslant r} ||\Pi_{(\lambda,\rho)}(X_I)f||^2 + C\,||f||^2$$

En réitérant $\frac{m}{r}$ fois, on obtient :

$$(2.10) \qquad ||\lambda^{\frac{m}{r}} f||^2 \leqslant C\,||f||^2_{H^m_{\Pi_{(\lambda,\rho)}}}$$

D'après (2.6), si $k \leqslant m$

$$(2.11) \qquad ||\lambda^{\frac{m-k}{r}}\,\Pi_{(\lambda,\rho)}(A_{jk})f||^2 \leqslant C \sum_j \Pi_{(\lambda,\rho)}(A_{jm})f||^2 + C\,||\lambda^{\frac{m}{r}} f||^2$$

Toutes les constantes C sont indépendantes de f, λ et ρ. L'inégalité (2.8) se déduit de (2.10) et (2.11), si λ est assez grand.

2) Cas où $\mathcal{G}$ est stratifiée. On désigne par $X_1,\dots,X_p$ une base du sous-espace $\mathcal{G}_1$. On associe aux opérateurs $\Pi_{(\lambda,\rho)}(X_j)$ des champs de vecteurs $P_j(x,D_x,D_y)$ dans R^{n+1} comme ci-dessus. Ces champs vérifient la condition des crochets de Hörmander dans $\widetilde{K} \times R$. On leur applique l'inégalité de Rothschild-Stein [11], dont on déduit la conséquence suivante :

$$||\lambda^{\frac{1}{r}} f|| \leqslant C \sum_j ||\Pi_{(\lambda,\rho)}(X_j)f|| + ||f|| \qquad \forall\, f \in C_o^\infty(K)$$

Cette inégalité peut aussi se déduire de (2.9) par le théorème d'interpolation de [8]. En réitérant, on obtient (2.8) pour tout entier m.

3 - UN CAS PARTICULIER -

Le but de ce § est de démontrer une variante du théorème 2.2 lorsque les hypothèses suivantes sont aussi vérifiées :

(H_3) Pour tout $X \in \mathcal{G}$, les polynômes $A_j(.,X,\nu)$ et $B(.,X,\nu)$ sont bornés indépendemment de ν.

(H_4) Les fermés K_ν sont contenus dans un compact fixe K, et il existe un voisinage $\widetilde{K}$ de K et une constante $C > 0$ tels que :

$$\sum_{|I|\leq r} |\Pi_\nu^o(X_I)(x,\xi)| \geq C|\xi| \qquad \forall\, x \in \widetilde{K} \quad \forall\, \xi \in R^n \quad \forall\, \nu \in N \tag{3.1}$$

Plus précisément nous allons démontrer la

PROPOSITION 3.1

Si les hypothèses du théorème 2.2 et les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel qu'on ait :

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leq (C_o+\varepsilon)||\Pi_\nu(P)f||^2 + \varepsilon||f||^2 \tag{3.2}$$

si $\nu \geq N(\varepsilon)$ et $f \in C_o^\infty(K_\nu)$.

Pour la démonstration, on utilisera les notations suivantes. Pour tout entier $k \leq n$, et pour tout $X \in \mathcal{G}$, on posera :

$$\Pi_\nu^k(X) = \sum_{j=1}^{k} A_j(x,X,\nu)\,\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Ainsi, l'opérateur $\Pi_\nu^n(X)$ est celui qui est noté $\Pi_\nu^o(X)$ au §-2. On pose aussi, pour tout $\xi_k \in R$

$$\hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}(X) = \sum_{j=1}^{k-1} A_j(x,X,\nu)\,\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\xi_k\,A_k(x,X,\nu)$$

On notera P_k la projection de R^n sur R^k

$$P_k(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_k)$$

L'hypothèse H_3 entraîne que les symboles complets des opérateurs $\Pi_\nu(A_j)$ sont des polynômes en (x,ξ) de degré $\leqslant N_o$, où N_o est un entier indépendant de ν.

LEMME 3.2

Sous les hypothèses de la proposition 3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1(\varepsilon)$ et $R(\varepsilon) > 0$ tels qu'on ait :

$$(3.3) \qquad \sum_j \| \hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}(A_j) g \|^2 \leqslant (C_o+\varepsilon) \| \hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}(P) g \|^2$$

si $\nu \geqslant N(\varepsilon)$, $|\xi_k| \geqslant R(\varepsilon)$, $g \in C_o^\infty(P_{k-1}(K_\nu))$ et $k \leqslant n$.

DEMONSTRATION

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, $k \leqslant n$, une suite d'entiers n_q, tendant vers $+\infty$, une suite $\xi_{k,q}$ dans R, tendant vers $+\infty$, et, pour tout $q \in N$, une fonction $f_q \in C_o^\infty$, à support dans $\tilde{K}_q = P_{k-1}(K_{n_q})$, telles qu'on ait, en posant $\tilde{\Pi}_q = \hat{\Pi}^k_{(n_q,\xi_{k,q})}$

$$(3.4) \qquad \sum_j \| \tilde{\Pi}_q(A_j) f_q \|^2 > (C_o+\varepsilon) \| \tilde{\Pi}_q(P) f_q \|^2$$

Montrons que l'ensemble limite $\mathcal{L}_1$ associé aux suites $\tilde{\Pi}_q$ et $\tilde{K}_q$ est contenu dans l'ensemble limite $\mathcal{L}$ associé aux suites Π_ν et K_ν. En effet, soit $\ell \in \mathcal{L}_1$. Il existe une sous-suite, qu'on notera encore n_q pour simplifier, des points $x'_q \in \tilde{K}_q$ et $\xi'_q \in R^{k-1}$, et des réels $t_q > 0$, tels que :

$$(3.5) \qquad \ell(X_I) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{i} t_q^{|I|} \tilde{\Pi}_q(X_I)(x'_q,\xi'_q) , \qquad |I| \leqslant r.$$

Soit $x_q \subset K_{n_q}$ tel que $P_{k-1}(x_q) = x'_q$. Posons $\xi_q = (\xi'_{1,q},\ldots,\xi'_{k-1,q},\xi_{k,q},0,\ldots,0)$. D'après (3.1), on a :

$$(3.6) \qquad \sum_{|I|\leqslant r} |\tilde{\Pi}_q(X_I)(x'_q,\xi'_q)| = \sum_{|I|\leqslant r} |\Pi^0_{n_q}(x_q,\xi_q)| \geqslant C\,|\xi_q| \geqslant C\,|\xi_{k_q}|$$

Puisque $|\xi_{k_q}|$ tend vers $+\infty$, il résulte de (3.5) et (3.6) que la suite (t_q) tend vers 0. Puisque les points x_q sont dans un compact fixe K, l'hypothèse (H_3) et l'égalité (3.5) montrent que :

$$\ell(X_I) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{i}\, t_q^{|I|}\, \Pi_{n_q}(X_I)(x_q,\xi_q)$$

et la forme ℓ est bien dans $\mathcal{L}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut appliquer le théorème 2.2 aux représentations $\tilde{\Pi}_q$ (réalisées dans R^{k-1}) et aux fermés $P_{k-1}(K_{n_q})$. La conclusion de ce théorème est en contradiction avec (3.4) si q est assez grand.

LEMME 3.3

Sous les hypothèses de la proposition 3.1, pour tout $\delta > 0$, il existe $N_2(\delta) > 0$ tel qu'on ait :

$$(3.7) \qquad \sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant C_0\, ||\Pi_\nu(P)f||^2 + \delta \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N_0} ||x^\alpha D_x^\beta f||^2$$

si $\nu \geqslant N_2(\delta)$ et $f \in \mathcal{S}(R^n)$.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que toute sous-suite de la suite (Π_ν) possède de cette propriété. Quitte à remplacer cette suite par une suite extraite, on peut supposer que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les polynômes $A_k(.,X,\nu)$ et $B(.,X,\nu)$ ont des limites $A_j^\infty(.,X)$ et $B^\infty(.,X)$ quand $\nu \to +\infty$. Pour tout $\nu \in N$, soit x_ν un point de K_ν. On peut aussi supposer que la suite x_ν tend vers un point x_0 de K. Posons, pour tout $X \in \mathfrak{g}$:

$$\Pi_\infty(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j^\infty(x,X)\frac{\partial}{\partial x_j} + i\, B^\infty(x,X)$$

Soit $\Pi_\infty^o(X)$ l'opérateur associé comme en (2.2). D'après (H_4), on a:

$$\sum_{|I|\leqslant r} |\Pi_\infty^o(X_I)(x,\xi)| \geqslant C\,|\xi| \qquad \forall (x,\xi) \in K \times R^n$$

La représentation Π_∞ est donc dans E car H_1 est vérifiée. Pour tout $\xi \in R^n$, la forme linéaire $\ell_{(x_o,\xi)}$ définie comme en (2.4) est dans l'ensemble $\mathcal{L}$ car on a :

$$\ell_{(x_o,\xi)}(X_I) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{i}\,\Pi_\nu(X_I)(x_\nu,\xi)$$

Sous l'hypothèse du théorème 2.2, on a, d'après le théorème 2.3

$$(3.8) \qquad \sum_j \|\Pi_\infty(A_j)f\|^2 \leqslant C_o\, \|\Pi_\infty(P)f\|^2 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(R^n)$$

En choisissant une norme dans l'espace de dimension finie où se trouvent les polynômes $A_j(.,X,\nu)$ et $B(.,X,\nu)$, posons :

$$\varepsilon_\nu = \sup_{|I|\leqslant r} \left(\|B(.,X_I,\nu) - B^\infty(.,X_I)\| + \sup_{j\leqslant n} \|A_j(.,X_I,\nu) - A_j^\infty(.,X_I)\|\right.$$

Il existe $C > 0$, indépendant de ν, tel que :

$$(3.9) \qquad \|\Pi_\nu(A_j)f - \Pi_\infty(A_j)f\| \leqslant C\,\varepsilon_\nu \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N_o} \|x^\alpha D_x^\beta f\|^2 \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}(R^n)$$

Puisque ε_ν tend vers 0, l'inégalité (3.7) résulte de (3.8) et (3.9) si ν est assez grand.

On considère deux fonctions Ψ et χ dans $C^\infty(R)$ telles que :

$$\chi(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leqslant 1 \qquad \chi(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geqslant 2$$

$$\chi(\xi)^2 + \Psi(\xi)^2 = 1 \qquad \forall\ \xi \in R$$

On pose

$$\gamma_k = 1 + r + \ldots + r^{n-k}\ ,\ k = 1,\ldots,n.$$

Soit μ un paramètre ≥ 1, que l'on choisira plus tard. On définit des opérateurs pseudo-différentiels $T_k(\mu)$ de la manière suivante :

$$T_o(\mu) = \chi(\mu^{-\gamma_1} D_{x_1}) \ldots \chi(\mu^{-\gamma_n} D_{x_n})$$

$$T_k(\mu) = \Psi(\mu^{-\gamma_k} D_{x_k})\ \chi(\mu^{-\gamma_{k+1}} D_{x_{k+1}}) \ldots \chi(\mu^{-\gamma_n} D_{x_n})$$

$$T_n(\mu) = \Psi(\mu^{-\gamma_n} D_{x_n})$$

On a, pour tous $f \in \mathcal{S}(R^n)$ et $\mu \geq 1$

$$(3.10) \qquad ||f||^2 = \sum_{k=o}^{n} ||T_k(\mu)f||^2.$$

Nous allons maintenant majorer les expressions suivantes :

$$\Phi_k(f) = \sum_j ||[T_k(\mu),\ \Pi_\nu(A_j)]f|| \qquad (0 \leq k \leq n)$$

$$\Psi_k(f) = \sum_j ||T_k(\mu)[\Pi_\nu(A_j) - \Pi_\nu^k(A_j)]f|| \qquad (1 \leq k \leq n)$$

$$H(f) = \sum_{|\alpha+\beta|\leq N_o} ||x^\alpha D_x^\beta T_o(\mu)f||$$

LEMME 3.4

Il existe $C > 0$ et $\mu_o > 1$ tels que :

(3.11) 1) $\Phi_k(f) \leq C\ \mu^{-1}\ ||f||_{H^m_{\Pi_\nu}}$ $\qquad (0 \leq k \leq n)$

(3.12) 2) $\Psi_k(f) \leq C\ \mu^{-\frac{1}{r}}\ ||f||_{H^m_{\Pi_\nu}}$ $\qquad (1 \leq k \leq n)$

(3.13) 3) $H(f) \leqslant C\,\mu^{M}\,||f||$ avec $M = N_{o}\,\gamma_{1}$

pour tous $f \in C_{o}^{\infty}(K)$, $\mu > \mu_{o}$ et $\nu \in N$.

DEMONSTRATION

Pour tout $p \in R$, on désignera par S_{k}^{p} l'ensemble des fonctions $a_{\mu}(\xi_{k},\ldots,\xi_{n})$, C^{∞} sur R^{n-k+1}, dépendant du paramètre $\mu \geqslant 1$, telles que, pour tout $\alpha \in N^{n}$, il existe $C_{\alpha} > 0$, indépendant de μ, tel que

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} a_{\mu}(\xi)| \leqslant C_{\alpha}\,\mu^{p-\gamma_{k}\alpha_{k} - \ldots - \gamma_{n}\alpha_{n}} \quad \forall\,\xi \in R^{n-k+1} \quad \forall\,\mu \geqslant 1$$

PREUVE DU POINT 1

On voit que l'on peut écrire :

$$[T_{k}(\mu),\ \Pi_{\nu}(A_{j})] = \sum_{q=o}^{m-1} \sum_{\ell} a_{\mu}^{(\ell)}(D_{x})P_{\ell}(x)\Pi_{\nu}(A_{q\ell})$$

où la somme porte sur un nombre fini d'indices ℓ, où les $P_{\ell}(x)$ sont des polynômes bornés indépendemment de μ et ν, et les $a_{\mu}^{(\ell)}$ sont dans S_{k}^{-1}. Cette remarque se vérifie facilement par récurrence. Comme les fonctions $P_{\ell}(x)$ sont bornés sur K, il existe $C > 0$, indépendant de μ et ν, tel que (3.11) soit vérifié.

PREUVE DU POINT 2

On vérifie facilement, par récurrence, qu'on peut écrire :

$$(3.14) \qquad [\Pi_{\nu}(A_{j}) - \Pi_{\nu}^{k}(A_{j})]f = \sum_{q=o}^{m-1} \sum_{\ell} \sum_{|\alpha|\leqslant m-q} P_{\ell}(x)D_{x''}^{\alpha}[\Pi_{\nu}^{k}(A_{q\ell})f]$$

où on a posé $x'' = (x_{k+1},\ldots,x_{n})$, et les $P_{\ell}(x)$ sont d'autres polynômes bornés indépendemment de μ et ν. On peut aussi écrire, avec d'autres polynômes bornés indépendemment de μ et ν.

$$(3.15)\qquad [\Pi_\nu(A_j) - \Pi_\nu^k(A_j)]f = \sum_{q=o}^{m-1} \sum_{\ell} \sum_{|\alpha|\leqslant m-q} D^\alpha_{x''} \, [P_\ell(x)\Pi_\nu(A_{\ell_q})f]$$

Soit φ une fonction dans $C_o^\infty(R^n)$, égale à 1 sur une voisinage de K, indépendante de μ et ν. On peut écrire :

$$\Psi_k(f) \leqslant \sum_j (E_j + E_j' + E_j'')$$

avec

$$E_j = || \; \varphi \; [T_k(\mu), \; \Pi_\nu(A_j)] \; f \; ||$$

$$E_j' = || \; \varphi \; [\Pi_\nu(A_j) - \Pi_\nu^k(A_j)] \; f \; ||$$

$$E_j'' = || \; (1-\varphi) \; T_k(\mu) \; [\Pi_\nu^k(A_j) - \Pi_\nu(A_j)] \; f \; ||.$$

D'après le point 1, on a :

$$(3.16)\qquad E_j \leqslant C \; \Phi_k(f) \leqslant C \; \mu^{-1} \; ||f||_{H^m_{\Pi_\nu}}$$

Pour majorer E_j' , on utilise (3.14)

$$E_j' \leqslant \sum_{q=o}^{m-1} \sum_\ell \sum_{|\alpha|\leqslant m-q} || \; \varphi \; P_\ell(x) D^\alpha_{x''}\Pi_\nu^k(A_{\ell_q}) T_k(\mu) f||$$

On remarque que les fonctions φP_ℓ sont bornées, et que les opérateurs $D^\alpha_{x''}\Pi_\nu^k(A_{\ell_q})$ et $T_k(\mu)$ commutent. On voit aussi qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$(3.17)\qquad ||D^\alpha_{x''} T_k(\mu) g|| \leqslant C_\alpha \; \mu^{\gamma_{k+1}|\alpha|} \; ||T_k(\mu) g|| \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

pour tous $g \in \mathcal{S}(R^n)$ et $\mu > 1$. On en déduit que :

$$(3.18)\qquad E_j' \leqslant C \sum_{q\leqslant m-1} \mu^{\gamma_{k+1}(m-q)} \; ||\Pi_\nu^k(A_{\ell_q}) \; T_k(\mu) f||$$

pour tout $f \in C_o^\infty(K)$. On applique le théorème 2.4 à la famille de représentations $\hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}$, qui dépend des paramètres ξ_k et ν (notés λ et ρ dans le théorème 2.4). Il existe donc $\lambda_o > 0$ tel que, si $|\xi_k| \geqslant \lambda_o$, on ait, pour tout $g \in C_o^\infty(P_{k-1}(K))$

$$\sum_{q=o}^{m} \sum_{\ell} |\xi_k|^{2(\frac{m-q}{r})} ||\hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}(A_{\ell_q})\, g||^2 \leqslant C \sum_j ||\hat{\Pi}^k_{(\nu,\xi_k)}(A_j)\, g||^2$$

On applique cette inégalité en prenant pour g la transformée de Fourier partielle de $T_k(\mu)f$ par rapport à $x_k,\dots,x_n$. On en déduit que, si $\mu \geqslant \lambda_o$, on a :

$$\sum_{q=o}^{m} \sum_{\ell} \mu^{\gamma_k(\frac{m-q}{r})} ||\Pi^k_\nu(A_{\ell_q})T_k(\mu)f|| \leqslant C \sum_j ||\Pi^k_\nu(A_j)T_k(\mu)f|| \tag{3.19}$$

D'après (3.18), (3.19) et la définition de γ_k, on a :

$$\begin{aligned} E'_j &\leqslant C\,\mu^{-\frac{1}{r}} \sum_j ||\Pi^k_\nu(A_j)T_k(\mu)f|| \\ &\leqslant C'\,\mu^{-\frac{1}{r}} (\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f|| + \Psi_k(f)) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pour majorer E''_j, on utilise (3.15) :

$$E''_j \leqslant \sum_{q=o}^{m-1} \sum_{\ell} \sum_{|\alpha|\leqslant m-q} ||(1-\varphi)T_k(\mu)D^\alpha_{x''}P_\ell(x)\Pi_\nu(A_{q_\ell})f|| \tag{3.21}$$

Si $a_\mu(\xi)$ est dans S^M_K, on voit que, pour tout entier N, il existe $C_N > 0$ tel que, pour tout $g \in C_o^\infty(K)$ et pour tout $\mu > 1$, on ait :

$$||(1-\varphi)a_\mu(D_x)\,g|| \leqslant C_N\,\mu^{-N}||g|| \tag{3.22}$$

En remplaçant $a_\mu(D_x)$ par $T_k(\mu)D^\alpha_{x''}$, g par $P_\ell(x)\Pi_\nu(A_{q\ell})f$, et N par 1, en utilisant le fait que $P_\ell(x)$ est borné sur K, on majore l'expression de (3.21) :

(3.23) $\quad E_j'' \leqslant C\,\mu^{-1}||f||_{H^m_{\Pi_\nu}} \qquad \forall\,\mu \geqslant 1\ ,\ \forall\,\nu \in N\ ,\ \forall\, f \in C_o^\infty(K)$

Le point 2 se déduit de (3.16), (3.20) et (3.23), si μ est assez grand.

PREUVE DU POINT 3

On utilise la fonction φ ci-dessus :

$$||x^\alpha D_x^\beta T_o(\mu)f|| \leqslant C\ ||D_x^\beta T_o(\mu)f|| + ||(1-\varphi)x^\alpha D_x^\beta T_o(\mu)f||$$

On majore le premier terme en utilisant (3.17). On réécrit le second terme comme somme de termes tels que $||(1-\varphi)a_\mu(D_x)x^{\alpha'}f||$ où le symbole de $a_\mu(D_x)$ est une dérivée de celui de $D_x^\alpha T_o(\mu)$. En utilisant (3.22), on majore le second terme par $C||f||$. Le lemme 3.4 est donc démontré.

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1

Soient $f \in C_o^\infty(K)$ et $\varepsilon \in\ ]0,1]$. Pour tout $k \leqslant n$, on peut appliquer le lemme 3.2 à la fonction

$$(x_1,\dots,x_{k-1}) \to \widehat{T_k(\mu)f}(x_1,\dots,x_{k-1},\xi_k,\dots,\xi_n) = g$$

où $\wedge$ désigne la transformée de Fourier par rapport à $x_k,\dots,x_n$. Si $\mu \geqslant R(\varepsilon)$, l'inégalité (3.3) est vraie pour tout $\xi_k \in R$, car si $|\xi_k| \leqslant R(\varepsilon)$, les deux membres sont nuls. On en déduit que, si $\nu \geqslant N_1(\varepsilon)$ et $\mu \geqslant R(\varepsilon)$, on a

(3.24) $\quad \sum\limits_j ||\Pi_\nu^k(A_j)T_k(\mu)f||^2 \leqslant (C_o+\varepsilon)||\Pi_\nu^k(P)T_k(\mu)f||^2$

On applique le lemme 3.3 à la fonction $T_o(\mu)f$, avec $\delta = \varepsilon\mu^{-2M}$, $M = N_o\gamma_1$. Si $\nu \geqslant N_2(\varepsilon\mu^{-M})$ on a :

$$(3.25) \qquad \sum_j ||\Pi_\nu(A_j)T_o(\mu)f||^2 \leqslant C_o \; ||\Pi_\nu(P)T_o(\mu)f||^2 + \varepsilon\mu^{-2M} H(f)^2$$

D'après (3.10), (3.24) et (3.25), si $\nu \geqslant N(\varepsilon,\mu) = \sup(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon\mu^{-M}))$, et si $\mu \geqslant R(\varepsilon)$, on a donc

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant (C_o+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2 ||\Pi_\nu(0)f||^2 + 2\,\varepsilon\mu^{-2M} H(f)^2$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\left[\Phi_o(f)^2 + \sum_{k=1}^{n} \Psi_k(f)^2\right]$$

où $C > 0$ est indépendant de μ, ν et $\varepsilon \in]0,1]$. Si, de plus, $\mu \geqslant \mu_o$, on en déduit, grâce au lemme 3.4

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant (C_o+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2 ||\Pi_\nu(P)f||^2 + C\,\varepsilon\; ||f||^2$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\,\mu^{-\frac{1}{r}}\; ||f||^2_{H^m_{\Pi_\nu}}$$

On applique (2.6) avec ε remplacé par 1, λ par 1, et Π_ℓ par Π_ν. Si $\mu \geqslant \varepsilon^{-2r}$, on obtient :

$$\sum_j ||\Pi_\nu\,(A_j)f||^2 \leqslant (C_o+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2 ||\Pi_\nu(P)f||^2 + C\,\varepsilon\; ||f||^2$$
$$+ C\,\varepsilon \sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2.$$

On choisit donc $\mu = \sup(R(\varepsilon),\mu_o,\varepsilon^{-2r})$. Si $\nu \geqslant N(\varepsilon,\mu)$ et si ε est choisi assez petit, on en déduit bien (3.2).

4 - CAS GENERAL -

On considère une suite de représentations Π_ν dans E, vérifiant l'hypothèse H_2 du §-2.

Commençons par décrire le type de transformations que nous allons leur faire subire. On notera H l'ensemble des difféomorphismes globaux θ de R^n, de la forme suivante

$$(4.1) \qquad x \to \theta(x) = y \text{ , avec } \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 + P_1 \\ y_j = a_j x_j + P_j(x_1,\dots,x_{j-1}) \quad (2 \leqslant j \leqslant n) \end{cases}$$

où les a_j sont des réels non nuls, et les P_j sont des polynômes ne dépendant que des variables indiquées, (P_1 étant une constante). Les a_j et P_j dépendent de θ. On dira qu'une famille $\theta^{(i)}$ $(i \in I)$ dans H est bornée si les coefficients $a_j^{(i)}$ et les polynômes $P_j^{(i)}$ sont bornés indépendemment de $i \in I$. On note T_θ l'opérateur dans $\mathcal{S}(R^n)$ associé à $\theta \in H$ écrit en (4.1) par :

$$(4.2) \qquad T_\theta f(x) = (a_1 \dots a_n)^{-1/2} f(\theta^{-1}(x))$$

Au §-5, nous allons construire, en tout point $x \in R^n$, pour tout $\lambda \geqslant 1$ et pour tout $\nu \in N$, un difféomorphisme $\theta_{(x,\lambda,\nu)} \in H$ tel que $\theta_{(x,\lambda,\nu)}(o) = x$, et une fonction réelle $\Phi_{(x,\lambda,\nu)}$. L'opérateur associé à $\theta_{(x,\lambda,\nu)}$ par (4.2) sera noté $T_{(x,\lambda,\nu)}$. On utilisera aussi l'opérateur $U_{(x,\lambda,\nu)}$ défini par :

$$(4.3) \qquad U_{(x,\lambda,\nu)} f(y) = e^{i\Phi_{(x,\lambda,\nu)}(y)} f(y)$$

Précisons maintenant les propriétés que nous attendons de ces opérateurs $T_{(x,\lambda,\nu)}$ et $U_{(x,\lambda,\nu)}$, ce qui nous amène à introduire quelques notations. On pose, pour tous $x \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$ et $\nu \in N$:

$$(4.4) \qquad M(x,\lambda,\nu) = \inf_{\xi \in R^n} \sup_{|I| \leqslant r} \left| \frac{1}{\lambda} \Pi_\nu(X_I)(x,\xi) \right|^{1/|I|}$$

D'après les hypothèses H_1 et H_2, cette fonction est strictement positive.

Soit $\sigma_{(x,\lambda,\nu)}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ telle qu'on ait, pour tout $Q \in \mathcal{U}_k(\mathfrak{g})$ $(k \geqslant 0)$:

(4.5) $$\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(Q) = M(x,\lambda,\nu)^{-k}\, U^{-1}_{(x,\lambda,\nu)}\, T^{-1}_{(x,\lambda,\nu)}\, \Pi_\nu(Q)\, T_{(x,\lambda,\nu)}\, U_{(x,\lambda,\nu)}$$

Cette représentation est dans E. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on écrit

(4.6) $$\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j(y,X,x,\lambda,\nu)\, \frac{\partial}{\partial y_j} + i\, B(y,X,x,\lambda,\nu)$$

et on note $\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X)(y,\eta)$ le symbole de cet opérateur. On voit qu'il existe une application symplectique $\chi_{(x,\lambda,\nu)}$ dans R^{2n} telle que :

(4.7) $$\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(y,\eta) = M(x,\lambda,\nu)^{-|I|}\, \Pi_\nu(X_I)\, (\chi_{(x,\lambda,\nu)}(y,\eta))$$

Enfin, on notera $V_{(a,\lambda,\nu)}(x)$ l'image de la boule de centre O et de rayon a par le difféomorphisme $\theta_{(x,\lambda,\nu)}$: il s'agit donc d'un voisinage de x.

PROPOSITION 4.1

Pour tous $x \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$ et $\nu \in N$, il existe un difféomorphisme $\theta_{(x,\lambda,\nu)}$ dans H, tel que $\theta_{(x,\lambda,\nu)}(o) = x$, et une fonction réelle $y \to \Phi_{(x,\lambda,\nu)}(y)$ tels qu'on ait, avec les notations ci-dessus :

a) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les polynômes $A_j(.,X,\lambda,\nu)$ et $\lambda^{-1}B(.,X,\lambda,\nu)$ sont bornés indépendamment de x,λ et ν.

b) Il existe $a > 0$ et $C > 0$, indépendants de (x,λ,ν) tels qu'on ait :

(4.8) $$\sum_{|I|\leqslant r} |\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(y,\eta)| \geqslant C(|\eta|+\lambda)$$

pour tous $x \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$, $\nu \in N$, $\eta \in R^n$, et $y \in R^n$, avec $|y| \leqslant 2a$.

c) Le difféomorphisme $\theta^{-1}_{(\tilde{x},\lambda,\nu)}\ \theta_{(x,\lambda,\nu)}$ et son inverse restent bornés dans H lorsque $(x,\tilde{x},\lambda,\nu)$ décrit l'ensemble suivant :

(4.9) $\qquad A = \{(x,\tilde{x},\lambda,\nu) \in R^n \times R^n \times R^+ \times \mathbb{N}\ ,\ \tilde{x} \in V_{(a,\lambda,\nu)}(x)\}.$

Cette proposition sera démontrée au §-5. Nous allons montrer maintenant comment le théorème 2.2 s'en déduit. On démontre d'abord, à partir des points a) et b) ci-dessus, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.2

Il existe $C > 1$ tel que

(4.10) $\qquad \tilde{x} \in V_{(a,\lambda,\nu)}(x) \Rightarrow \frac{1}{C} \leqslant \frac{M(\tilde{x},\lambda,\nu)}{M(x,\lambda,\nu)} \leqslant C$

DEMONSTRATION

D'après (4.8), on a, si $|y| \leqslant a$

$$C^{\frac{1}{r}} \leqslant \inf_{\eta\in R^n} \sup_{|I|\leqslant r} \left|\frac{1}{\lambda}\ \sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(y,\eta)\right|^{1/|I|}$$

$$\leqslant \sup_{|I|\leqslant r} \left|\frac{1}{\lambda}\ B(y,X_I,x,\lambda,\nu)\right|^{1/|I|} \leqslant C''$$

où C" est indépendant de (x,λ,ν). D'après la définition de $M(x,\lambda,\nu)$ et la nature des opérateurs $T_{(x,\lambda,\nu)}$ et $U_{(x,\lambda,\nu)}$, on en déduit bien (4.10).

On utilisera le théorème suivant :

THEOREME 4.3

Pour tout $x \in R^n$, soit $\theta_{(x,\rho)}$ un difféomorphisme dans H, dépendant d'un paramètre ρ dans un ensemble I. On suppose que $\theta_{(x,\rho)}(o) = x$ et qu'il existe a > 0 tel que $\theta^{-1}_{(\tilde{x},\rho)}\ \theta_{(x,\rho)}$ et son inverse restent bornés dans H lorsque $(x,\tilde{x},\rho)$ parcourt l'analogue de l'ensemble (4.9). Alors, pour tout $\rho \in I$, il existe une suite (x_μ) $(\mu \in N)$ dans R^n et une suite (φ_μ) de fonctions réelles dans $C_o^\infty(R^n)$, dépendant de ρ, telles que :

1) Les voisinages $V_{(\frac{a}{2},\rho)}(x_\mu)$ recouvrent R^n (en réduisant a éventuellement). De plus, il existe un entier N > 0, indépendant de ρ, tel que :

(4.11) $\quad \forall\, x \in R^n,\ \# \{ \mu \in N\ ,\ x \in V_{(a,\rho)}(x_\mu)\} \leqslant N$

2) Le support de φ_μ est inclus dans $V_{(a,\rho)}(x_\mu)$.

3) On a, pour tous $x \in R^n$ et $\mu \in I$

(4.12) $\quad \sum\limits_\mu \varphi_\mu(x)^2 = 1$

4) Pour tout multi-indice $\alpha \in N^n$, il existe $C_\alpha > 0$, indépendant de μ et ρ, tel que :

(4.13) $\quad |\partial_y^\alpha(\varphi_\mu \circ \theta_{(x_\mu,\rho)})(y)| \leqslant C_\alpha \quad \text{si } |y| \leqslant a\ ,\ \rho \in I\ ,\ \mu \in N$

La démonstration est très proche de celle de la proposition 2.5 de Hörmander [5], et nous ne la détaillerons pas. Nous appliquons ce théorème avec le paramètre $\rho = (\lambda,\nu) \in R^+ \times N$.

Rappelons que Π_ν^c est la représentation définie comme en (2.2). On désignera par K la boule de centre O et de rayon a.

COROLLAIRE 4.4

Pour tous $P \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ et $s \geqslant 0$, il existe C > 0, indépendant de λ et ν, tel que l'on ait, pour tous x, λ et ν :

$$(4.14) \qquad \sum_{\mu} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2s}|\Pi_\nu^o(P)\varphi_\mu(x)|^2 \leqslant C \sum_{\mu} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m+s)}\varphi_\mu(x)^2.$$

DEMONSTRATION

Pour tout $X \in \mathcal{G}$, soit $\sigma^o_{(x,\lambda,\nu)}(X)$ l'opérateur obtenu en supprimant le terme $B(y,X,x,\lambda,\nu)$ dans (4.6). On a, d'après (4.5) et (4.3)

$$\sigma^o_{(x_\mu,\lambda,\nu)}(P) = M(x_\mu,\lambda,\nu)^{-m}\ T^{-1}_{(x_\mu,\lambda,\nu)}\ \Pi_\nu^o(P)\ T_{(x_\mu,\lambda,\nu)}$$

On en déduit, en posant $\widetilde{\varphi}_\mu = \varphi_\mu \circ \theta_{(x_\mu,\lambda,\nu)}$ et $y_\mu = \theta^{-1}_{(x_\mu,\lambda,\nu)}(x)$:

$$(4.15) \qquad |\Pi_\nu^o(P)\ \varphi_\mu(x)| = M(x_\mu,\lambda,\nu)^m\ |(\sigma^o_{(x_\mu,\lambda,\nu)}(P)\widetilde{\varphi}_\mu)(y_\mu)|$$

Soit $F(x)$ le membre de gauche de (4.14), que l'on peut réécrire, d'après (4.12)

$$(4.16) \qquad F(x) = \sum_{\mu,\mu'} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2s}|\Pi_\nu^o(P)\varphi_\mu(x)|^2\varphi_{\mu'}(x)^2$$

D'après (4.10), on a

$$(4.17) \qquad \varphi_\mu(x) \neq 0\ ,\ \varphi_{\mu'}(x) \neq 0 \Rightarrow M(x_\mu,\lambda,\nu) \leqslant C^2\ M(x_{\mu'},\lambda,\nu)$$

Soit $E(x)$ l'ensemble des indices μ tels que $\varphi_\mu(x) \neq 0$. D'après (4.15), (4.16) et (4.17), on a

$$(4.18) \qquad F(x) \leqslant C^2 \sum_{\mu'} M(x_{\mu'},\lambda,\nu)^{2(m+s)}\varphi_{\mu'}(x)^2 \sum_{\mu\in E(x)} \sup_{y\in K}|\sigma^o_{(x_\mu,\lambda,\nu)}(P)\widetilde{\varphi}_\mu(y)|^2$$

D'après le point a) de la proposition 4.1, et d'après (4.11) et (4.13)

$$(4.19) \qquad \sum_{\mu\in E(x)} \sup_{y\in K} \left|\sigma^{o}_{(x_\mu,\lambda,\nu)}(P)\widetilde{\varphi}_\mu(y)\right|^2 \leqslant N\ C \sup_{\substack{y\in K\\ \mu\in N\\ |\alpha+\beta|\leqslant N_o}} \left|y^\alpha D_y^\beta \widetilde{\varphi}_\mu(y)\right|^2 \leqslant C'$$

où C, N_o et C' sont indépendants de x, λ et ν. Le corollaire est démontré d'après (4.18) et (4.19).

<u>LEMME 4.5</u>

Il existe $\lambda_o > 0$ et $C > 0$ tels qu'on ait, si $q \leqslant m$

$$(4.20) \qquad \sum_\mu \lambda^{2(\frac{m-q}{r})} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m-q)} \|\varphi_\mu \Pi_\nu(A_{jq})f\|^2 \leqslant C \sum_j \|\Pi_\nu(A_{jm})f\|^2$$

pour tous $\lambda \geqslant \lambda_o$, $\nu \in N$ et $f \in C_o^\infty(R^n)$.

<u>DEMONSTRATION</u>

D'après les points a) et b) de la proposition 4.1, et d'après le théorème 2.4, il existe $C > 0$ et $\lambda_1 > 0$ tels que :

$$(4.21) \qquad \sum_{q\leqslant m} \sum_j \lambda^{2(\frac{m-q}{r})} \|\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(A_{jq})\, g\|^2 \leqslant C \sum_j \|\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(A_{jm})\, g\|^2$$

pour tous $x \in R^n$, $\lambda \geqslant \lambda_1$, $\nu \in N$ et $g \in C_o^\infty(K)$. Pour tous $f \in C_o^\infty(R^n)$ et $\mu \in N$, on peut appliquer (4.21) au point $x = x_\mu$ et à la fonction :

$$(4.22) \qquad g = M(x_\mu,\lambda,\nu)^{[illegible]}\, \sigma^{-1}_{(x_\mu,\lambda,\nu)}\, T^{-1}_{(x_\mu,\lambda,\nu)}\, (\varphi_\mu f)$$

On en déduit, en utilisant (4.5) :

$$(4.23) \qquad \sum_{\substack{q\leqslant m\\ j}} \lambda^{2(\frac{m-q}{r})} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m-q)} \|\Pi_\nu(A_{jq})(\varphi_\mu f)\|^2 \leqslant C \sum_j \|\Pi_\nu(A_{jm})(\varphi_\mu f)\|^2$$

On voit qu'on peut écrire :

(4.24) $$[\Pi_\nu(A_{jq}),\varphi_\mu] = \sum_{q'<q} \sum_{k,\ell} c_{k\ell}(\Pi^o_\nu(A_{k,q-q'})\varphi_\mu)\Pi_\nu(A_{\ell q'})$$

où les $c_{k\ell}$ sont des constantes indépendantes de μ et ν. On le vérifie facilement par récurrence, comme dans [2]. On déduit de (4.23) et (4.24) que :

(4.25) $$\sum_{\substack{q<m\\ j}} \lambda^{2(\frac{m-q}{r})} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m-q)}||\varphi_\mu\Pi_\nu(A_{jq})f||^2 \leqslant C \sum_j ||\varphi_\mu\Pi_\nu(A_{jm})f||^2$$
$$+ \sum_{\substack{p+q\leqslant m\\ p\geqslant 1}} \sum_{j,k} \lambda^{2(\frac{m-p-q)}{r}} M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m-p-q)}||(\Pi^o_\nu(A_{jp})\varphi_\mu)(\Pi_\nu(A_{kq})f)||^2$$

Ajoutons toutes les inégalités (4.25) en tenant compte de (4.12) et (4.14), (où m est remplacé par p et s par m-p-q). On obtient, en désignant par $N(f)^2$ le membre de gauche de (4.20) :

$$N(f)^2 \leqslant C \sum_j ||\Pi_\nu(A_{jm})f||^2 + C\,\lambda^{-2/r}\,N(f)^2$$

Si λ est assez grand, l'inégalité (4.20) est bien démontrée.

LEMME 4.6

Pour tous $\varepsilon \in]0,1]$ et $\lambda \geqslant 1$, il existe $N(\varepsilon,\lambda) > 0$ tel que :

(4.26) $$\sum_j ||\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(A_j)g\,||^2 \leqslant (C_o+\varepsilon)||\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(P)g\,||^2 + \varepsilon||g\,||^2$$

pour tous $\nu \geqslant N(\varepsilon,\lambda)$, $x \in R^n$ et $g \in C^\infty_o(K \cap \theta_x^{-1}(K_\nu))$.

DEMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda \geqslant 1$, une suite d'entiers (n_q) tendant vers $+\infty$, et, pour tout $q \in N$, un point $x_q \in R^n$ et une fonction $g_q \in C^\infty_o(K'_q)$, avec $K'_q = K \cap \theta^{-1}_{x_q}(K_{n_q})$, contredisant (4.26). La suite de représentations $\Pi'_q = \sigma_{(x_q,\lambda,n_q)}$ et la suite de compacts

K'_q vérifient les hypothèses (H_3) et (H_4) de la proposition 3.1, d'après les points a) et b) de la proposition 4.1. L'ensemble limite $\mathcal{L}_1$ associé aux suites Π'_q et K'_q est contenu dans l'ensemble $\mathcal{L}$ associé à Π_ν et K_ν. On le voit en utilisant (4.7). La proposition 3.1 est donc en contradiction, si q est assez grand, avec l'hypothèse du raisonnement par l'absurde.

FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2.2

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Pour tous $\lambda \geqslant 1$, $\nu \geqslant N(\varepsilon,\lambda)$, $f \in C_0^\infty(K_\nu)$ et $\mu \in N$, on peut appliquer l'inégalité (4.26) au point $x = x_\mu$ et à la fonction g définie en (4.22). On en déduit, en utilisant (4.5)

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)(\varphi_\mu f)||^2 \leqslant (C_0+\varepsilon)||\Pi_\nu(P)(\varphi_\mu f)||^2 + \varepsilon\, M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2m}||\varphi_\mu f||^2$$

et, par conséquent :

$$\sum_j ||\varphi_\mu \Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant (C_0+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2||\varphi_\mu \Pi_\nu(P)f||^2$$

$$+ 2\,\varepsilon\, M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2m}||\varphi_\mu f||^2 + \frac{C}{\varepsilon}\sum_j ||[\Pi_\nu(A_j),\varphi_\mu]f||^2$$

On utilise (4.24), avec q remplacé par m, pour majorer le dernier terme. On ajoute toutes les inégalités obtenues, en tenant compte de (4.12) et (4.14), où s = 0. Onobtient :

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant (C_0+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2||\Pi_\nu(P)f||^2 + C(\varepsilon)\, E(f)^2$$

où $C(\varepsilon)$ dépend de ε mais non de λ et ν et

$$E(f) = \sum_{\substack{q<m \\ j}} \sum_\mu M(x_\mu,\lambda,\nu)^{2(m-q)}||\varphi_\mu \Pi_\nu(A_{jq})f||^2$$

D'après le lemme 4.5, il existe $\lambda_0(\varepsilon)$, indépendant de ν, tel que si $\lambda = \lambda_0(\varepsilon)$,

$$C(\varepsilon)\ E(f)^2 \leqslant \varepsilon \sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2$$

Si $\nu \geqslant N(\varepsilon,\lambda_o(\varepsilon))$ et $f \in C_o^\infty(K_\nu)$, on a bien

$$\sum_j ||\Pi_\nu(A_j)f||^2 \leqslant \frac{(C_o+\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} ||\Pi_\nu(P)f||^2$$

5 - LES TRANSFORMATIONS D'EGOROV -

Le but de ce § est de démontrer la proposition 4.1.

On désignera par E_o l'ensemble des représentations Π analogues à (1.5) et vérifiant l'hypothèse H_1. On posera, pour tout $X \in \mathfrak{g}$

$$\Pi(X) = \sum_{j=1}^n A_j(x,X,\Pi) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

De même, pour tous $\Pi \in E_o$ et $\Psi \in H$, on pose

(5.1) $$T_\Psi^{-1}\Pi(X)T_\Psi = \sum_{j=1}^n A_j(y,X,\Pi,\Psi) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

On pose aussi

(5.2) $$\Sigma_k = \{y \in R^n,\ y_1 = \ldots = y_{k-1} = 0\} \quad \text{et } \Sigma_1 = R^n$$

PROPOSITION 5.1

Pour toute représentation $\Pi \in E_o$ et pour tout $x \in R^n$, il existe un difféomorphisme $\theta_{(x,\Pi)} \in H$ tel que $\theta_{(x,\Pi)}(0) = x$, et qui possède les propriétés suivantes :

1) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les polynômes $A_j(.,X,\Pi,\theta_{(x,\Pi)})$ sont bornés indépendemment de x et Π.

2) Pour tous $x \in R^n$ et $\Pi \in E_o$, il existe des éléments $X_1, \ldots, X_1$ de la sphère unité S de $\mathfrak{g}$, tels qu'on ait, si $y \in \Sigma_j$

$$(5.3) \qquad A_\ell(y, X_j, \Pi, \theta_{(x,\Pi)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{si } \ell > j \end{cases}$$

1ère Etape

Pour tous $x \in R^n$ et $\Pi \in E_o$, pour tout $k \leq n$, il existe un difféomorphisme $\theta^k_{(x,\Pi)} \in H$ tel que $\theta^k_{(x,\Pi)}(o) = x$ et tel que

A_k) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les $A_j(o, X, \Pi, \theta^k_{(x,\Pi)})$ sont bornés indépendemment de x et Π, si $j \leq k$.

B_k) Il existe des éléments $X_1, \ldots, X_k$ de S tels que (5.3) soit vérifié si $j \leq k$.

On démontre cette première étape par récurrence. Pour $k = 0$, on pose $\theta^o_{(x,\Pi)}(y) = x+y$. Supposons construit le difféomorphisme $\theta^{k-1}_{(x,\Pi)}$ possèdant les propriétés A_{k-1} et B_{k-1}. Posons :

$$(5.4) \qquad a_k(x,\Pi) = \sup_{X \in S} |A_k(0, X, \Pi, \theta^{k-1}_{(x,\Pi)})|$$

Cette quantité est strictement positive d'après l'hypothèse H. Soit X_k l'un des éléments de S où le sup est atteint dans (5.4). Soit Y le champ de vecteurs suivant dans R^{n-k+1}

$$Y = \sum_{j=k}^{n} A_j(0, \ldots, 0, y_k, \ldots, y_n, X_k, \Pi, \theta^{k-1}_{(x,\Pi)}) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Il existe un difféomorphisme $\varphi \in H$ n'agissant que sur les variables $y_k, \ldots, y_n$ tel que le champ de vecteur $T_\varphi^{-1}\, Y\, T_\varphi$ soit égal à $\frac{\partial}{\partial y_k}$ et tel que $\varphi(o) = 0$.

on pose alors $\theta^{k}_{(x,\Pi)} = \theta^{k-1}_{(x,\Pi)} \circ \varphi$. Les propriétés A_k et B_k sont faciles à vérifier.

2ème Etape

On pose $\theta_{(x,\Pi)} = \theta^{n}_{(x,\Pi)}$. Il nous reste à démontrer le point 1 de la proposition. Désignons par M_k l'ensemble des multi-indices $\alpha \in N^n$ tels que $\alpha_j = 0$ pour tout $j > k$. Nous écrirons $A_j(.,X,\Pi,x)$ pour $A_j(.,X,\Pi,\theta_{(x,\Pi)})$. Nous allons démontrer par récurrence sur k la propriété suivante :

C_k) Pour tout $\alpha \in M_k$ et pour tout $j > k$, il existe des constantes C_{IJ}, dépendant de j,k,x et Π, mais bornées, telles qu'on ait, si $y \in \Sigma_k$

$$\partial_y^{\alpha} A_j(y,X_I,\Pi,x) = \sum_{|I|+|\alpha|\leq|J|\leq r} C_{IJ}\, A_j(y,X_J,\Pi,x) \tag{5.5}$$

La propriété C_1 résulte de (5.3), avec $j = 1$. Supposons C_{k-1} démontrée. D'après (5.3), on a, pour tout $y \in \Sigma_k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_k} A_j(.,X_I,\Pi,x) &= A_j(y,[X_k,X_I],\Pi,x) + \\ &+ \sum_{\ell<k} [A_j(0,X_I,\Pi,x)\, \frac{\partial}{\partial y_\ell} A_\ell(y,X_k,\Pi,x) - A_j(0,X_k,\Pi,x)\, \frac{\partial}{\partial y_\ell} A_j(y,X_I,\Pi,x)]\end{aligned} \tag{5.6}$$

En utilisant le point A_n et l'hypothèse de récurrence C_{k-1}, on voit que (5.5) est démontré lorsque $\partial_y^{\alpha} = \partial_{y_k}$. Si maintenant $\tilde{\alpha} \in M_{k+1}$, on peut écrire $\partial_y^{\tilde{\alpha}} = \partial_y^{\alpha}\, \partial^p_{y_k}$, où $\alpha \in M_{k-1}$. On peut dériver l'égalité (5.5) par rapport à y_k, puisqu'elle est vérifiée dans Σ_k. On en déduit l'égalité analogue pour $\partial_y^{\tilde{\alpha}}$ par récurrence sur p, en utilisant à chaque étape (5.6).

Le point C_n est donc démontré, et le point 1 de la proposition résulte de A_n et C_n.

PROPOSITION 5.2

Soit B un sous-ensemble de $E_o \times E_o$. On fait les hypothèses suivantes :

1) Pour tout $X \in \mathcal{G}$, les polynômes $A_j(.,X,\Pi)$ et $A_j(.,X,\widetilde{\Pi})$ sont bornés indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$.

2) Pour tout $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$, il existe des éléments $X_1,\ldots,X_n$ et $\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_n$ dans un compact fixe de $\mathcal{G}$ tels que, sur Σ_j, les polynômes $A_\ell(.,X_j,\Pi)$ et $A_\ell(.,\widetilde{X}_j,\widetilde{\Pi})$ vérifient les égalités analogues à (5.3).

3) Pour tout $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$, il existe $\Psi \in H$ tel que :

(5.7) $$\widetilde{\Pi}(X) = T_\Psi^{-1}\ \Pi(X)\ T_\Psi \qquad \forall\ X \in \mathcal{G}$$

4) $\Psi(o)$ est borné indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$.

Alors Ψ et Ψ^{-1} sont bornés dans H indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$.

DEMONSTRATION

Si Ψ vérifie (5.7), posons $z(y) = \Psi(y)$ et $y(z) = \Psi^{-1}(z)$. Puisque Ψ est dans H, on peut écrire :

(5.8) $$z_k(y) = a_k(\Pi,\widetilde{\Pi})\ y_k + P_k(y_1,\ldots,y_{k-1})$$

où P_k est un polynôme réel. On pose aussi :

(5.9) $$\eta_j(z,\zeta) = a_j(\Pi,\widetilde{\Pi})\zeta_j + \sum_{k>j} \frac{\partial P_k}{\partial y_j}(y(z))\zeta_k.$$

Pour tout $k \leq n$, on pose

$$\widetilde{\Sigma}_k = \{z \in R^n\ ,\ z_j = z_j(o)\ \forall\ j < k\}\ ,\quad \widetilde{\Sigma}_1 = R^n$$

Ainsi, on a $y \in \Sigma_k$ si et seulement si $z(y) \in \widetilde{\Sigma}_k$.

LEMME

On remplace l'hypothèse 4 par la suivante : les coordonnées $z_j(o)$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ sont bornées indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$. Alors la fonction $(z,\zeta) \to \eta_k(z,\zeta)$, restreinte à $\widetilde{\Sigma}_k \times R^n$, est un polynôme borné indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi})$.

PREUVE DU LEMME

On le démontre par récurrence sur k. Supposons l'affirmation démontrée pour $\eta_1(z,\zeta),\ldots,\eta_{k-1}(z,\zeta)$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(z,\widetilde{X}_k,\Pi)\zeta_j = \sum_{j=1}^{n} A_j(y(z),\widetilde{X}_k,\Pi)\eta_j(z,\zeta)$$

D'après les égalités analogues à (5.3), on en déduit que, si $z \in \widetilde{\Sigma}_k$, on a :

$$\eta_k(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} A_j(z,\widetilde{X}_k,\Pi)\zeta_j - \sum_{j<k} A_j(0,\widetilde{X}_k,\widetilde{\Pi})\eta_j(z,\zeta) \tag{5.10}$$

L'affirmation du lemme se déduit de (5.10), de l'hypothèse de récurrence et de l'hypothèse 1.

Montrons maintenant que, sous les hypothèses 1 à 4, le difféomorphisme Ψ, c'est à dire les polynômes $z_k(y)$, restent bornés. Supposons l'affirmation vraie pour $z_1(y),\ldots,z_{k-1}(y)$. Le lemme, et les égalités (5.9) montrent que les réels $a_k(\Pi,\widetilde{\Pi})$ restent bornés, ainsi que les polynômes $z \to \frac{\partial P_k}{\partial y_j}(y(z))$, restreints à $\widetilde{\Sigma}_j$. D'après l'hypothèse de récurrence, les polynômes $\frac{\partial P_k}{\partial y_j}(j < k)$, restreints à Σ_j, sont bornés indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi})$. Puisque $|P_k(o)| \leqslant |\Psi(o)|$ est aussi borné, $P_k(y)$ est un polynôme borné indépendemment de $(\Pi,\widetilde{\Pi})$. D'après (5.8), il en est de même de $z_k(y)$.

Montrons maintenant que les polynômes $y_k(z)$ restent bornés. Supposons cela vrai pour $y_1(z),\ldots,y_{k-1}(z)$. On peut appliquer le lemme en permutant les rôles de Π et $\widetilde{\Pi}$. Une écriture analogue à (5.9) montre que $a_k(\Pi,\widetilde{\Pi})^{-1}$ est borné. L'égalité (5.8), le fait que le polynôme P_k est borné et l'hypothèse de récurrence montrent que $y_k(z)$ est bien un polynôme borné indépendamment de $(\Pi,\widetilde{\Pi}) \in B$. La proposition est démontrée.

Soit maintenant Π_ν une représentation dans E, qui dépend du paramètre $\nu \in N$ et qui vérifie l'hypothèse H_2 du §-2. Soient Π_ν^o la représentation définie comme en (2.2) et $M(x,\lambda,\nu)$ la fonction définie en (4.4). Soit $\widetilde{\Pi}^o_{(x,\lambda,\nu)}$ la représentation définie par :

$$\widetilde{\Pi}^o_{(x,\lambda,\nu)}(X_I) = M(x,\lambda,\nu)^{-|I|}\,\Pi_\nu^o(X_I) \qquad |I| \leqslant r$$

Pour tous $x_o \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$ et $\nu \in N$, le difféomorphisme $\theta \in H$ associé, selon la proposition 5.1, à la représentation $\widetilde{\Pi}^o_{(x_o,\lambda,\nu)}$ et au point x_o sera noté $\theta_{(x_o,\lambda,\nu)}$ et l'opérateur qui lui est associé par (4.2) sera noté $T_{(x,\lambda,\nu)}$. Soit $\widetilde{\sigma}_{(x,\lambda,\nu)}$ la représentation telle que, si $|I| \leqslant r$:

$$\widetilde{\sigma}_{(x,\lambda,\nu)}(X_I) = M(x,\lambda,\nu)^{-|I|}\,T^{-1}_{(x,\lambda,\nu)}\,\Pi_\nu(X_I)\,T_{(x,\lambda,\nu)}$$

et que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(5.11) \qquad \widetilde{\sigma}_{(x,\lambda,\nu)}(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j(y,X,x,\lambda,\nu)\,\frac{\partial}{\partial y_j} + i\,\widetilde{B}(y,X,x,\lambda,\nu)$$

On note toujours $\sigma^o_{(x,\lambda,\nu)}(X)$ l'opérateur obtenu en supprimant le dernier terme dans (5.11). Résumons les propriétés des coefficients dans (5.11).

PROPOSITION 5.3

i) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, les polynômes $A_j(.,X,x,\lambda,\nu)$ sont bornés indépendemment de (x,λ,ν).

ii) Pour tout (x,λ,ν) il existe des éléments $X_1,\dots,X_n$ de S tels que les égalités analogues à (5.3) soient vérifiée.

iii) Il existe $C > 0$ tel que :

$$(5.12) \qquad \sum_{|I|\leqslant r} |\sigma^{o}_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(0,\eta)| \geqslant C|\eta|$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geqslant 1$, $\nu \in \mathbb{N}$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$.

iv) On a :

$$(5.13) \qquad \inf_{\eta\in\mathbb{R}^n} \sup_{|I|\leqslant r} |\frac{1}{\lambda}\, \sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(0,\eta)|^{1/|I|} = 1$$

v) Pour tout $C > 0$, le difféomorphisme $\theta^{-1}_{(x,\lambda,\nu)}\, \theta_{(\widetilde{x},\lambda,\nu)}$ et son inverse restent bornés dans H lorsque $(x,\widetilde{x},\lambda,\nu)$ décrit l'ensemble

$$(5.14) \qquad A' = \{(x,\widetilde{x},\lambda,\nu),\ \widetilde{x} \in V_{(1,\lambda,\nu)}(x)\ ,\ \frac{1}{C} \leqslant \frac{M(\widetilde{x},\lambda,\nu)}{M(x,\lambda,\nu)} \leqslant C\ \}.$$

DEMONSTRATION

Les points i) et ii) résultent de la proposition 5.1. Le point iii) se déduit facilement de ii). Le point iv) provient de l'invariance de la fonction M par difféomorphisme. Pour le point v), on applique la proposition 5.2 en prenant pour B l'ensemble des couples $(\Pi,\widetilde{\Pi})$ définis de la manière suivante :

$$\Pi = \sigma^{o}_{(x,\lambda,\nu)} \qquad \widetilde{\Pi}(X) = \sigma^{o}_{(\widetilde{x},\lambda,\nu)}(\delta_t X)\ ,\ t = \frac{M(\widetilde{x},\lambda,\nu)}{M(x,\lambda,\nu)}$$

associés aux $(x,\widetilde{x},\lambda,\nu) \in A'$. Le difféomorphisme Ψ vérifiant (5.7) est $\theta^{-1}_{(x,\lambda,\nu)}\, \theta_{(\widetilde{x},\lambda,\nu)}$.

Choix de la phase $\Phi_{(x,\lambda,\nu)}$.

D'après iii), l'inf dans (5.13) est atteint en un point η_o, qui dépend de x,λ,ν. D'après le point ii), on peut trouver une fonction réelle $\Psi_{(x,\lambda,\nu)}(y)$ telle que, pour tout $k \leqslant n$, on ait, si $y \in \Sigma_k$

(5.15) $\qquad \sigma^o_{(x,\lambda,\nu)}(X_k)(y,\frac{\partial}{\partial y})\Psi_{(x,\lambda,\nu)}(y) = \widetilde{B}(0,X_k,x,\lambda,\nu) - \widetilde{B}(y,X_k,x,\lambda,\nu)$

ce qui entraîne $d\,\Psi_{(x,\lambda,\nu)}(o) = 0$. On pose maintenant :

$$\Phi_{(x,\lambda,\nu)}(y) = y\cdot\eta_o + \Psi_{(x,\lambda,\nu)}(y)$$

Soient $U_{(x,\lambda,\nu)}$ l'opérateur défini en (4.3) et $\sigma_{(x,\lambda,\nu)}$ la représentation définie en (4.5), que l'on peut écrire sous la forme (4.6) où les coefficients $A_j(.,X,x,\lambda,\nu)$ sont les mêmes que dans (5.11). Après conjugaison par $U_{(x,\lambda,\nu)}$, les termes d'ordre 0, notés $B(.,X,x,\lambda,\nu)$, vérifient :

vi) $B(y,X_k,x,\lambda,\nu) = B(0,X_k,x,\lambda,\nu) \quad$ si $\quad y \in \Sigma_k$, $k \leqslant n$.

vii) $\inf\limits_{\eta\in R^n} \sup\limits_{|I|\leqslant r} |\frac{1}{\lambda}\,\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(0,\eta)|^{1/|I|} =$

$$= \sup_{|I|\leqslant r} |\frac{1}{\lambda}\,B(0,X_I,x,\lambda,\nu)|^{1/|I|} = 1$$

Le point vi) résulte de (5.15) et vii) vient de (5.13) et de la nature de l'application symplectique associée à $U_{(x,\lambda,\nu)}$.

PREUVE DU POINT a) DE LA PROPOSITION 4.1

On note toujours M_k l'ensemble des multi-indices α tels que $\alpha_j = 0$ pour tout $j > k$. On démontre, par récurrence sur k, la propriété suivante :

C'_k) Pour tout $\alpha \in M_k$, il existe des constantes C_{IJ} bornées indépendemment de (x,λ,ν), telles qu'on ait, si $y \in \Sigma_k$:

$$\partial_y^\alpha B(y,X_I,x,\lambda,\nu) = \sum_{|I|+|\alpha|\leqslant|J|\leqslant r} C_{IJ}\, B_{(y,X_J,x,\lambda,\nu)}$$

La propriété C'_k se déduit de i), ii) et vi) exactement comme C_k a été déduit de (5.3) et A_k. D'après C'_n et vii), les polynômes $\lambda^{-1}B(.,X,x,\lambda,\nu)$ sont bornés indépendemment de (x,λ,ν).

Point b).

D'après les points iii) et vii), il existe $C > 0$ tel que :

$$\sum_{|I|\leqslant r} |\sigma_{(x,\lambda,\nu)}(X_I)(0,\eta)| \geqslant C(|\eta|+\lambda)$$

pour tous $x \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$, $\nu \in N$ et $\eta \in R^n$. D'après le point a), il existe $a \in]0,1]$ tel que (4.8) soit vérifiée si $|y| \leqslant 2a$, $\eta \in R^n$, $x \in R^n$, $\lambda \geqslant 1$ et $\nu \in N$.

Point c).

On peut maintenant invoquer le corollaire 4.2, puisqu'il résulte seulement des points a) et b). Le point c) se déduit de ce corollaire et du point v).

REFERENCES

[1] : Y.V. EGOROV : "Subelliptic operators". Russian Math. Survey, 30 (2) (1975), 59-118 et 30 (3) (1975), 55-105.

[2] : B. HELFFER - J. NOURRIGAT : "Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué". Comm. in P.D.E., 3(8), (1978), 693-743 et 4(9) (1979), 899-958.

[3] : B. HELFFER - J. NOURRIGAT : "Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs". Progress in Math., vol 58, Birkhauser, Bâle, 1985.

[4] : L. HORMANDER : "Subelliptic operators". in Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations. Ann. of Math. Studies 91, Princeton, 1978.

[5] : L. HORMANDER : "The Weyl calculus for pseudo-differential operators". C.P.A.M., 32 (1979), 359-443.

[6] : A. KIRILLOV : "Unitary representations of nilpotent groups". Russian Math., Survey, 17 (1952), 53-104.

[7] : A. MELIN : "Parametrix constructions for some classes of right invariant differential operators on nilpotent groups". A paraître dans Global Analysis and Geometry.

[8] : N. MOUKADEM : "Interpolation pour des espaces de Sobolev associés à des représentations de groupes nilpotents". Thèse de 3ème Cycle, Rennes, 1981.

[9] : J. NOURRIGAT : " Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels". Préprint (1984).

[10] : C. ROCKLAND : "Hypoellipticity on the Heisenberg group, représentation theoretic criteria". Trans. A.M.S., 240(517) (1978), 1-52.

[11] : L.P. ROTHSCHILD - E.M. STEIN : "Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups". Acta Math. 137(1977) 248-315.