

MARIE-FRANCE ALLAIN

Mesures stochastiques et décomposition de Doob

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-39

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983__1_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES STOCHASTIQUES ET DECOMPOSITION DE DOOB

Marie- France ALLAIN
Laboratoire de Probabilités
U.E.R MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu 35042 RENNES FRANCE

1 - INTRODUCTION.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, T un espace topologique, $\mathcal{G}$ une tribu prévisible sur $(T \times \Omega)$ et μ une mesure stochastique définie sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans $L_1(P)$.

Le but de ce travail est de prouver que, sous certaines hypothèses, (hypothèses qui sont satisfaites dans les cas classiques), la mesure stochastique μ admet une décomposition de la forme :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

où μ_2 est la différence de deux mesures stochastiques définies sur $\mathcal{G}$, à valeurs dans $L_1^+(P)$, et, μ_1 est une mesure stochastique définie sur $\mathcal{G}$, à valeurs dans $L_1(P)$ et vérifiant : $\forall D \in \mathcal{G} \quad E(\mu_1(D)) = 0$.

2 - HYPOTHESES ET NOTATIONS.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et T un espace topologique. (Dans les situations classiques T est un ensemble d'indices, en général $\mathbb{N}^d$ ou $\mathbb{R}_+^d$). $\mathcal{A}$ désigne une famille de parties de T , on suppose que $\mathcal{A}$ est une semi-algèbre et que pour tout A élément de $\mathcal{A}$ il existe une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts et une suite croissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A_n \subset \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_n A_n = A$.

On se donne $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{H}$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{A} \quad A \subseteq B \implies \mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}_A$$

Soit $\mathcal{R} = \{A \times F, A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{G}_A\}$; $\mathcal{R}$ est une semi-algèbre de parties de $T \times \Omega$; les éléments de $\mathcal{R}$ sont appelés rectangles prévisibles. On note $\mathcal{R}'$ l'algèbre sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ la tribu sur $T \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}$; $\mathcal{P}$ est appelée tribu prévisible.

Un processus prévisible est une application $\mathcal{P}$ -mesurable de $T \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des processus prévisibles simples, et par $\mathcal{H}_b(\mathcal{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles bornés. Pour des exemples d'une telle situation voir [1] et [2].

Pour tout réel p positif ou nul, on pose $L_p(P) = L_p^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{P}, P)$ (espace vectoriel de variables aléatoires à valeurs réelles de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable).

$L_p(P)$ est muni de sa topologie usuelle.

Enfin pour f élément de $L_p(P)$ on définit $\|f\|_p$ par :

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p dP \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p \\ \int |f|^p dP & \text{si } 0 < p \leq 1 \\ E^P(|f| \wedge 1) & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

3 - RAPPELS SUR LES MESURES STOCHASTIQUES.

La notion de mesure stochastique a été étudiée en particulier, par METIVIER et PELLAUMAIL [11]. Rappelons-en la définition.

3.1 - DEFINITION.

On appelle $L_p(P)$ -mesure stochastique, une application μ , simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ et vérifiant :

$$3.1.1. \quad \forall A \times F \in \mathcal{R} \quad \mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega)$$

$$3.1.2. \quad \mu(\mathcal{R}') \text{ est une partie bornée de } L_p(P).$$

$$3.1.3. \quad \mu \text{ s'étend en une application } \sigma\text{-additive définie sur } \mathcal{G}, \\ \text{à valeurs dans } L_p(P).$$

L'extension est également notée μ . Notons que dans le cas où $p > 0$,

$$3.1.3. \text{ implique } 3.1.2.$$

Le théorème (3.2) qui suit donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application μ simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ soit une $L_p(P)$ -mesure stochastique.

3.2 - THEOREME.

Soit μ une application simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$.

Alors μ est une $L_p(P)$ -mesure stochastique si et seulement si μ vérifie

$$3.1.1., 3.1.2. \text{ et } :$$

$$3.2.1 \quad \forall (R_n)_{n \in \mathbb{N}}, R_n \in \mathcal{R}, R_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_n \|\mu(R_n)\|_p = 0.$$

Pour la démonstration voir [11].

Une $L_p(P)$ -mesure stochastique jouit de la propriété suivante ([11]):

3.3 - PROPRIETE.

Soit μ une $L_p(P)$ -mesure stochastique, soit F un élément de $\mathcal{G}$ et G un ensemble prévisible tel que : $1_G = 1_G \cdot 1_{T \times F}$

Alors :

$$3.3.1. \quad \mu(G) = 1_F \mu(G)$$

On peut définir une notion d'intégration par rapport à une mesure stochastique (intégrale stochastique). L'existence et les propriétés de l'intégrale stochastique des processus prévisibles bornés sont données par le théorème 3.4 qui suit (pour la démonstration voir [11]). Cette notion d'intégrale stochastique s'étend à une classe plus vaste de processus prévisibles, en utilisant la méthode de Bichteler [3].

3.4 - THEOREME.

Soit μ une $L_p(P)$ -mesure stochastique.

Il existe alors une application unique, notée également μ , définie sur $\mathcal{H}_b(\mathcal{F})$, à valeurs dans $L_p(P)$ et vérifiant :

$$3.4.1. \quad \forall h \in \mathcal{E} : h = \sum_i \alpha_i \cdot 1_{A_i \times F_i} \Rightarrow \mu(h) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i \times F_i)$$

3.4.2. Si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{H}_b(\mathcal{F})$, uniformément bornée et qui converge simplement vers h , alors la suite $(\mu(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(h)$ dans $L_p(P)$.

3.4.3. Si h appartient à $\mathcal{H}_b(\mathcal{F})$ l'application qui à G élément de $\mathcal{F}$ associe $\mu(1_G h)$ est également une $L_p(P)$ -mesure stochastique.

La notion de fonctionnelle linéaire stochastique a été introduite par METIVIER et PELLAUMAIL ([11]). Voici la définition.

3.5 - DEFINITION.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de processus prévisibles bornés. On suppose que $\mathcal{H}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach et que les éléments de $\mathcal{H}$ engendrent $\mathcal{F}$.

Soit v une application linéaire et continue de $\mathcal{H}$ dans $L_p(P)$.

v est une $L_p(P)$ -fonctionnelle linéaire stochastique, si elle vérifie :

$$3.5.1 \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall F \in \mathcal{A} \quad \text{tels que} \quad 1_F h \in \mathcal{H}$$

$$v(1_F h) = 1_F v(h).$$

Le théorème suivant qui est du type théorème de Riesz établit le lien entre mesure stochastique et fonctionnelle linéaire stochastique. (La démonstration se trouve dans [11]).

3.6. THEOREME.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de processus prévisibles bornés dont les éléments engendrent $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathcal{H}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Alors :

3.6.1 Si μ est une $L_p(P)$ -mesure stochastique, l'application v définie sur $\mathcal{H}$ par : $v(h) = \mu(h)$ est une $L_p(P)$ -fonctionnelle linéaire stochastique.

3.6.2 Si v est une $L_p(P)$ -fonctionnelle linéaire stochastique, il existe une unique $L_p(P)$ -mesure stochastique μ vérifiant :

$$v(h) = \mu(h) \quad \forall h \in \mathcal{H}$$

3.6.3 Quand $p > 1$, toute partie bornée de l'espace des $L_p(P)$ -fonctionnelles linéaires stochastiques est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple, $L_p(P)$ étant muni de sa topologie faible.

Le théorème suivant ([3]) permet de se ramener du cas d'une $L_0(P)$ -mesure stochastique à celui d'une $L_2(P)$ -mesure stochastique ; sa démonstration utilise un théorème de factorisation de Maurey et Rosenthal.

3.7. THEOREME

Soit μ une $L_0(P)$ -mesure stochastique. Il existe alors une probabilité Q équivalente à P , à dérivée $\frac{dQ}{dP}$ bornée et telle que μ soit une $L_2(Q)$ -mesure stochastique.

Pour d'autres propriétés des $L_p(P)$ -mesures stochastiques, voir ([2]).

4 - RELATION ENTRE PROCESSUS ET MESURES STOCHASTIQUES.

Examinons d'abord le cas où T est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et

$$\mathcal{T} = \{]s, t], s \leq t, s \in T, t \in T\}.$$

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

A ce processus nous pouvons associer une application μ^X définie sur $\mathcal{E}$, simplement additive, à valeurs dans $L_0(P)$ en posant, pour h élément :

$$\text{de } \mathcal{E} \text{ de la forme : } \sum_i \alpha_i 1_{]s_i, t_i]} \otimes F_i, \mu^X(h) = \sum_i \alpha_i 1_{F_i}(X_{t_i} - X_{s_i})$$

μ^X vérifie évidemment 3.1.1.

Réciproquement, à toute $L_p(P)$ -mesure stochastique μ (ou à toute fonction μ définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ et simplement additive), nous pouvons associer un processus X en posant :

$$X_t = \mu([0, t] \cap T \times \Omega),$$

on a alors :

$$\mu = \mu^X.$$

Cette correspondance s'étend au cas où $T = \prod_{i=1}^d]a^i, b^i] \subseteq \mathbb{R}^d$ et
 $\mathcal{X} = \{A = \prod_{i=1}^d]s^i, t^i], a^i \leq s^i \leq t^i \leq b^i, i=1 \dots d\}.$

Afin de préciser cette correspondance, nous introduisons les notations suivantes (notations utilisées dans [2]):

- pour $a = (a^i)_{i=1 \dots d}$ et $b = (b^i)_{i=1 \dots d}$, on pose : $\prod]a, b] = \prod_{i=1}^d]a^i, b^i]$
- pour $I \subseteq \{1 \dots d\}$ on pose : $\varepsilon^I = (-1)^{d - \text{card } I}$
- pour $I \subseteq \{1 \dots d\}$ et $A = \prod]s, t]$, on pose :

$$\alpha^i(I, A) = \begin{cases} s^i & \text{si } i \notin I \\ t^i & \text{si } i \in I \end{cases} \quad \text{et} \quad \alpha(I, A) = (\alpha^i(I, A))_{i=1 \dots d}.$$

Enfin pour $X = (X_t)_{t \in \overline{T}}$ et $A = \prod]s, t]$ on définit $\Delta_A X$ par :

$$\Delta_A X = \sum_I \varepsilon^I (X(\alpha(I, A)) - X(\alpha(\emptyset, A))).$$

$\Delta_A X$ représente la "variation" de X sur l'ensemble A ; pour $d = 1$ et $A =]s, t]$ on a $\Delta_A X = (X_t - X_s).$

Au processus X on peut alors associer une application μ^X définie sur $\mathcal{E}$, simplement additive, à valeurs dans $L_0(P)$ en posant, pour h élément de $\mathcal{E}$ de la forme : $\sum_i \alpha_i 1_{A_i \times F_i}$, $\mu^X(h) = \sum_i \alpha_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X$

μ^X vérifie évidemment 3.1.1.

Réciproquement, à toute $L_p(P)$ -mesure stochastique μ (ou même à toute application μ définie sur $\mathcal{X}'$, à valeurs dans $L_p(P)$, et, simplement additive), on peut associer un processus X en posant :

$$X_t = \mu(\prod]a, t] \times \Omega) \quad (t \in \prod]a, b]).$$

Dans ce qui précède on peut, bien sûr, se restreindre aux "sous intervalles" de T dont les extrémités appartiennent à un sous ensemble dénombrable de T . Le processus X associé à une mesure stochastique par la méthode précédente apparaît donc comme un "processus de répartition". (D'après 3.2.1 ce processus est continu à droite dans $L_p(P)$).

Supposons maintenant que $T = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ordonné ou non et que $\mathcal{A} = \{\{t_n\}, n \in \mathbb{N}\}$.

La correspondance qui paraît naturelle est la suivante :

- à $X = (X_t)_{t \in T}$ on associe μ^X telle que :

$$\mu^X(\{t_n\} \times F) = 1_F X_{t_n}$$

- à μ mesure stochastique, on associe le processus X tel que :

$$X_{t_n} = \mu^X(\{t_n\} \times \Omega).$$

Le processus X est alors un processus de densité de masse.

La question qui se pose est alors la suivante : étant donnés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

l'ensemble T , la tribu $\mathcal{G}$ et la mesure stochastique μ , peut-on caractériser les processus X (de répartition ou de densité), associés ?

Le théorème 3.2 permet évidemment de donner une réponse à cette question ;

mais plus précisément ? Quand $d = 1$ et $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, le théorème de DELLACHERIE-MOKOBODZKI ([4] p. 400) donne une réponse à cette question.

4.2 THEOREME DE DELLACHERIE-MOKOBODZKI.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ vérifiant les conditions habituelles.

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus adapté continu à droite, on pose $X_\infty = 0$.

Soit $(t_i)_{i=1 \dots n} : 0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_n = +\infty$

Soit $h = \sum_{i=0}^{n-1} H_i 1_{[t_i, t_{i+1}]}$ (élément de $\mathcal{G}$)

Soit $J(h) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$

Alors X est une semi-martingale jusqu'à l'infini si et seulement si J est une application linéaire et continue de $\mathcal{E}$ dans $L_p(P)$.
 $\mathcal{E}$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme.

La démonstration peut être adaptée au cas des semimartingales ordinaires.
 Quand $d \geq 2$ le problème est plus complexe. Les exemples les plus simples de processus définissant des mesures stochastiques sont : le drap brownien et les processus à variation bornée continus à droite. (Pour plus de détails et d'exemples voir [2],[6],[9],[10] et l'additif).

Mentionnons enfin que, sous les hypothèses habituelles $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, et, pour $A =]s, t]$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$, un processus X adapté, qui définit une $L_p(P)$ -mesure stochastique est un $L_p(P)$ -intégrateur au sens de Bichteler et Hürzeller ([3],[8]) ; ceci résulte immédiatement des propriétés des $L_p(P)$ -mesures stochastiques rappelées au paragraphe 3.

5 - QUASI-MARTINGALES ET FONCTION DE DOLEANS.

5.1. DEFINITION ET NOTATION

On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des familles finies d'éléments disjoints de $\mathcal{T}$, un élément de $\mathcal{C}$ est noté τ .

Soit μ une fonction d'ensemble simplement additive, définie sur $\mathcal{D}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ ($p \geq 1$).

Soit $\tau = \{A_i \mid i=1 \dots n, A_i \in \mathcal{T}, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j\}$

et soit
$$V^\tau(\mu) = \sum_{i=1}^n |E(\mu(A_i \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i})|$$

μ est une quasi-martingale si : $V(\mu) = \sup_{\tau \in \mathcal{C}} E(V^\tau(\mu)) < +\infty$

Il est facile de vérifier que cette définition donne bien la notion habituelle de quasi-martingale.

5.2. PROPOSITION.

Soit μ une $L_p(P)$ -mesure stochastique ($p \geq 1$) alors μ est une quasi-martingale.

Démonstration.

Soit $\tau = \{(A_i)_{i=1 \dots n}, A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j\}$

et soient $\alpha_i^+ = 1_{\{E(\mu(A_i \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i}) > 0\}}$

$$\alpha_i^- = -1_{\{E(\mu(A_i \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i}) < 0\}}$$

On a, en posant $h^\tau = \sum_i (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) 1_{A_i}$,

$$\begin{aligned} E(\mu(h^\tau)) &= \sum_i E(|E(\mu(A_i \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i})|) \Rightarrow E(V^\tau(\mu)) = E(\mu(h^\tau)) \leq 2 \sup_{D \in \mathcal{Q}'} \|\mu(D)\|_p \\ &\Rightarrow \sup_{\tau \in \mathcal{E}} E(V^\tau(\mu)) < +\infty. \end{aligned}$$

5.3. DEFINITION.

Soit m une mesure à valeurs réelles, sur $(T \times \Omega, \mathcal{S})$. m est une mesure admissible si elle vérifie :

5.3.1 m est finie

5.3.2 m ne charge pas les ensembles évanescents.

5.4. DEFINITION.

Soit μ une fonction d'ensemble simplement additive définie sur $\mathcal{R}'$ à valeurs dans $L_p(P)$ ($p \geq 1$). La fonction m^μ définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs réelles, telle que : $m^\mu(D) = E(\mu(D))$ ($D \in \mathcal{R}'$) est appelée fonction de Doléans de μ .

5.5. PROPOSITION

Soit μ une $L_p(P)$ -mesure stochastique ($p \geq 1$) alors la fonction de Doléans de μ s'étend en une mesure admissible.

Démonstration.

μ étant définie sur $\mathcal{S}$ soit $m^\mu(D) = E(\mu(D))$ pour D élément de $\mathcal{D}$. m^μ est évidemment σ -additive et finie et d'après 3.3 ne charge pas les ensembles évanescents.

6 - MESURES STOCHASTIQUES A VARIATION BORNEE.

6.1 - NOTATIONS ET DEFINITIONS

Nous noterons $\mathcal{V}_+(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$ -mesures stochastiques telles que : $\mu(A \times \Omega) \in L_p^+(P) \forall A \in \mathcal{A}$ et nous noterons $\mathcal{V}(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$ -mesures stochastiques qui sont des différences d'éléments de $\mathcal{V}_+(L_p(P))$. Nous dirons qu'un élément de $\mathcal{V}(L_p(P))$ est une mesure stochastique à variation bornée.

L'énoncé du théorème 3.2, qui donne un critère pour qu'une fonction d'ensemble simplement additive, définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p(P)$ soit une $L_p(P)$ -mesure stochastique, se simplifie dans le cas où la fonction prend ses valeurs dans $L_p^+(P)$. On peut en particulier énoncer les corollaires suivants :

6.2 - COROLLAIRE.

Soit μ une application simplement additive définie sur $\mathcal{R}'$, à valeurs dans $L_p^+(P)$ alors μ est une $L_p(P)$ -mesure stochastique si et seulement si μ vérifie 3.1.1. et

$$6.2.1. \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \{ \mu(D), D \in \mathcal{R}', D = \sum_{i=1}^n (A_i \times \Omega) \mid A_i \in \mathcal{A} \} \text{ est une partie bornée de } \\ L_p(P). \\ \text{ii) } \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{A} \quad A_n \searrow \emptyset \implies \lim_n \|\mu(A_n \times \Omega)\|_p = 0. \end{array} \right.$$

De plus si $T \in \mathcal{A}$ i) est automatiquement satisfaite.

Démonstration.

Si μ est une $L_p(P)$ -mesure stochastique la propriété 6.2.1. est évidemment satisfaite.

Passons à la réciproque.

Nous montrons d'abord que 3.1.1. et 6.2.1.i) impliquent 3.1.2. c'est-à-dire que $\mu(\mathcal{R}')$ est une partie bornée de $L_p(P)$; soit D élément de $\mathcal{R}'$, D peut se

mettre sous la forme : $D = \sum_{i=1}^n (A_i \times F_i)$, $A_i \in \mathcal{A}$, $F_i \in \mathcal{G}_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et on a par suite de la positivité de μ

$$0 \leq \mu(D) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \times F_i) = \sum_{i=1}^n 1_{F_i} \mu(A_i \times \Omega) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i \times \Omega)$$

ces inégalités impliquent la bornitude de $\mu(\mathcal{R}')$.

Puis nous vérifions que 3.1.1., 6.2.1.ii) et la positivité de μ impliquent 3.2.1.

Pour cela, soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ qui tend en décroissant vers le vide. Soit $R_n = A_n \times F_n$, on a alors $A_n \searrow \emptyset$ ou $F_n \searrow \emptyset$

Si $A_n \searrow \emptyset$ 3.2.1. résulte des inégalités :

$$0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n} \mu(A_n \times \Omega) \leq \mu(A_n \times \Omega).$$

Si $F_n \searrow \emptyset$ 3.2.1. résulte des inégalités

$$0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n} \mu(A_n \times \Omega) \leq 1_{F_n} \mu(A_1 \times \Omega)$$

Si T appartient à $\mathcal{A}$ on a $0 \leq \mu(D) \leq \mu(T \times \Omega)$ pour tout élément D de $\mathcal{R}'$ ce

qui implique évidemment 6.2.1.1).

Dans le cas où $T =]a, b] \subseteq \mathbb{R}_+^d$ et $\mathcal{T} = \{]s, t] , a \leq s \leq t \leq b \}$ la condition 6.2.1.ii) est une condition de continuité à droite pour le processus de répartition X associé à μ .

(Noter que dans ce cas le processus X est croissant au sens où $\Delta_A X \geq 0$ Pps. Pour plus de détails sur les processus croissants continus à droite, voir l'additif.

6.3. COROLLAIRE.

Soient $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathcal{T} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$

Soit μ une application simplement additive définie sur $\mathcal{D}'$, à valeurs dans $L_P^+(P)$.

Alors μ est une $L_P(P)$ -mesure stochastique si et seulement si μ vérifie 3.1.1. et :

6.3.1. $\sum_n \mu(\{a_n\} \times \Omega)$ appartient à $L_P(P)$.

Démonstration.

Si μ est une $L_P(P)$ -mesure stochastique, elle vérifie évidemment 3.1.1. et 6.3.1..

Réciproquement, soit D élément de $\mathcal{D}'$ alors on a

$$0 \leq \mu(D) \leq \sum_n \mu(\{a_n\} \times \Omega)$$

ce qui implique que $\mu(\mathcal{D}')$ est une partie bornée de $L_P(P)$.

Pour prouver 3.2.1., il suffit de remarquer que $R_n \downarrow \emptyset$, $R_n \in \mathcal{R}$.

$$\longrightarrow R_n = \{a\} \times F_n, \quad F_n \in \mathcal{G}_{\{a\}} \quad F_n \downarrow \emptyset$$

et $0 \leq \mu(R_n) = 1_{F_n} \mu(\{a\} \times \Omega)$.

Remarque : 6.2.1. et 6.3.1. ne font pas intervenir les tribus $(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$; on peut donc supposer que $\mathcal{G}_A = \mathcal{H}$.

Nous abordons maintenant le problème de la relation entre mesures admissibles et mesures stochastiques à variation bornée.

On a vu (Proposition 5.5) que pour toute $L_p(P)$ -mesure stochastique ($p \geq 1$) la fonction de Doléans de μ s'étend en une mesure admissible.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses, toute mesure admissible est la mesure de Doléans d'une $L_1(P)$ -mesure stochastique à variation bornée. Ces résultats nous permettront ensuite d'aborder le problème de la décomposition de Doob des $L_1(P)$ -mesures stochastiques.

Le théorème 6.4 qui suit est très général, nous verrons ensuite (corollaires 6.5 et 6.6) que ces hypothèses sont satisfaites dans les cas habituellement rencontrés.

6.4. THEOREME.

Soit m une mesure admissible sur $(T \times \Omega, \mathcal{G})$.

On suppose de plus l'existence d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ de sous-tribus complètes de $\mathcal{H}$ vérifiant :

$$6.4.1 \quad t \in A \implies \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_t$$

6.4.2 $\forall F \in \mathcal{H}$ on peut définir un processus prévisible $Y = (Y_t)_{t \in T}$ en posant $Y_t = E(1_F / \mathcal{F}_t)$ et deux modifications du processus $Y = (E(1_F / \mathcal{F}_t))_{t \in T}$ sont indistinguables.

Alors il existe un élément μ de $\mathcal{V}(L_1(P))$ vérifiant:

$$6.4.3 \quad \forall F \in \mathcal{H}, \forall A \in \mathcal{A}$$

$$E(1_F \mu(A \times \Omega)) = \int E(1_F / \mathcal{F}_s) 1_A(s) dm.$$

6.4.4 si ν est un élément de $\mathcal{V}(L_1(P))$ vérifiant 6.4.3 alors $\mu(A \times \Omega) = \nu(A \times \Omega)$ P.p.s pour chaque élément A de $\mathcal{T}$.

De plus, 6.4.3 implique que $\mu(A \times \Omega)$ est mesurable pour la tribu $\bigvee_{s \in \bar{A}} \mathcal{H}_s$ et que la mesure de Doléans de μ est m .

Démonstration.

La mesure admissible m admet la décomposition $m = m^+ - m^-$ où m^+ et m^- sont des mesures admissibles positives. Il suffit donc de prouver le théorème pour une mesure admissible positive.

Soit donc m mesure admissible positive et soit A un élément de $\mathcal{T}$; pour F élément de $\mathcal{H}$, on définit $\nu_A(F)$ par

$$\nu_A(F) = \int E(1_F / \mathcal{H}_s) 1_A(s) dm$$

(6.4.2 implique que $\nu_A(F)$ a bien un sens).

A étant fixé, ν_A est une mesure positive bornée sur $(\Omega, \mathcal{H})$, de plus ν_A est absolument continue par rapport à P .

Soit alors $\bar{\mu}_A = \frac{d\nu_A}{dP}$

$\bar{\mu}_A$ est un élément de $L_1^+(P)$ et $\forall F \in \mathcal{H}$, on a :

$$E(1_F \bar{\mu}_A) = \nu_A(F) = \int E(1_F / \mathcal{H}_s) 1_A(s) dm$$

Pour D élément de $\mathcal{Q}'$, $D = \sum_i A_i \times F_i$ on pose $\mu(D) = \sum_i 1_{F_i} \bar{\mu}_{A_i}$

ceci a bien un sens et définit une fonction, simplement additive de $\mathcal{Q}'$ dans

$L_1^+(P)$ car, pour $A = \sum_i A_i$, $A_i \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{T}$ et $F \in \mathcal{H}$ on a :

$$\begin{aligned} E(1_F \bar{\mu}_A) &= \int E(1_F / \mathcal{F}_s) 1_A(s) dm \\ &= \sum_i \int E(1_F / \mathcal{F}_s) 1_{A_i}(s) dm \\ &= \sum_i E(1_F \bar{\mu}_{A_i}) \end{aligned}$$

mais $\mu(A \times \Omega) = \bar{\mu}_A$ par définition

$$\text{d'où } E(1_F \mu(A \times \Omega)) = E(1_F \sum_i \mu(A_i \times \Omega)) \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

$$\text{en conséquence } \mu(A \times \Omega) = \sum_i \mu(A_i \times \Omega).$$

μ ainsi définie vérifie évidemment 3.1.1, de plus pour $A \times F$ élément de $\mathcal{D}$ on a d'après 6.4.1 :

$$E(\mu(A \times F)) = E(1_F \bar{\mu}_A) = \int E(1_F / \mathcal{F}_s) 1_A(s) dm = \int 1_F 1_A dm = m(A \times F)$$

ce qui implique que $\forall D \in \mathcal{D}'$:

$$E(\mu(D)) = m(D)$$

m étant une mesure bornée et μ étant positive l'égalité précédente implique que μ est une $L_1(P)$ -mesure stochastique positive de mesure de Doléans m (voir corollaire 6.2).

Le passage au cas de m mesure admissible signée est immédiat ; à m^+ et m^- on associe μ^+ et μ^- éléments de $\mathcal{V}_+(L_1(P))$ vérifiant 6.4.3 ; à m on associe alors $\mu = \mu^+ - \mu^-$, μ appartient à $\mathcal{V}(L_1(P))$ et vérifie évidemment 6.4.3, il est évident que m est la mesure de Doléans de μ .

6.4.4 découle immédiatement de 6.4.3, car si μ et ν vérifie 6.4.3 on a pour chaque A

$$E(1_F \mu(A \times \Omega)) = E(1_F \nu(A \times \Omega)) \quad \forall F \in \mathcal{H}$$

$$\implies \mu(A \times \Omega) = \nu(A \times \Omega) \quad (\text{dans } L_1(P)).$$

Enfin, nous examinons le problème de la mesurabilité.

6.4.3 implique que pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{H}$ -mesurable bornée on a :

$$E(Y \mu(A \times \Omega)) = \int E(Y/\mathcal{H}_s) 1_A(s) dm$$

en particulier pour $Y = E(1_F / \bigvee_{s \in A} \mathcal{H}_s)$, $F \in \mathcal{H}$

mais pour $s \in A$, on a

$$E(Y/\mathcal{H}_s) = E(1_F/\mathcal{H}_s)$$

d'où

$$E(1_F \mu(A \times \Omega)) = E(E(1_F / \bigvee_{s \in A} \mathcal{H}_s) \mu(A \times \Omega))$$

ce qui implique que $\mu(A \times \Omega)$ est $\bigvee_{s \in A} \mathcal{H}_s$ -mesurable.

6.5 COROLLAIRE.

Supposons que $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et que $\mathcal{T} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$; soit m une mesure admissible sur $(T \times \Omega, \mathcal{S})$. Alors il existe un processus prévisible V , unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :

$$6.5.1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall F \in \mathcal{H} \quad \int 1_F V_{a_n} dP = \int E(1_F / \mathcal{G}_{\{a_n\}}) m(\{a_n\}, d\omega)$$

Ce processus définit une $L_1(P)$ -mesure stochastique μ appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$, par la relation :

$$\mu(\{a_n\} \times F) = 1_F V_{a_n}.$$

La mesure de Doléans de μ est m .

Démonstration.

On prend $\mathcal{H}_{a_n} = \mathcal{G}_{\{a_n\}}$, 6.4.1 est évidemment satisfaite.

D'autre part, le processus $Y = \sum_n E(1_F / \mathcal{G}_{\{a_n\}}) 1_{\{a_n\}}$ est prévisible et deux versions de ce processus sont indistinguables.

Les hypothèses du théorème 6.4 sont donc satisfaites. On pose alors

$$V_{a_n} = \bar{\mu}_{\{a_n\}} = \mu(\{a_n\} \times \Omega) \text{ d'où 6.5.1 en réécrivant 6.4.3.}$$

$\mathcal{A}$ étant dénombrable 6.5.1 implique l'unicité à l'indistinguabilité près.

Enfin 6.4.3 implique que $V_{a_n} = \mu(\{a_n\} \times \Omega)$ est mesurable pour la

tribu $\bigvee_{s \in \{a_n\}} \mathcal{A}_s = \mathcal{G}_{\{a_n\}}$ ce qui implique que V est prévisible.

6.6. COROLLAIRE.

Soit $T =]0, 1] \subseteq \mathbb{R}^d$

Soit $\mathcal{A} = \{]s, t] , 0 \leq s < t \leq 1 \}$

On suppose donnée une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{T}}$ de sous tribus complètes de $\mathcal{A}$; on suppose également que pour $A =]s, t]$, $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_s$. Soit m une mesure admissible. Il existe alors un processus continu à droite adapté à $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$, unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :

6.6.1. $\forall F \in \mathcal{A} \quad \forall t \in T$

$$E(1_F V_t) = \int E(1_F | \mathcal{F}_{s-}) 1_{]0, t]}(s) dm.$$

Ce processus est le processus de répartition d'une $L_1(P)$ -mesure stochastique μ appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$. La mesure de Doléans de μ est m .

Démonstration.

Les hypothèses du théorème 6.4 sont satisfaites pour la famille $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$.

En effet si $t \in A =]a, b]$ on a $\mathcal{G}_A = \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \forall s : a < s < t$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{F}_{t-} \quad \text{d'où 6.4.1.}$$

D'autre part, le processus $Y = E(1_F | \mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$ est continu à gauche et adapté

à $(\mathcal{F}_{t-})_{t \in T}$ et d'après [1], cela implique qu'il est prévisible; il est facile de vérifier que la continuité à gauche et la structure de T impliquent l'indistinguabilité de 2 versions de ce processus (même raisonnements et mêmes résultats que dans le cas où $d=1$).

D'après 6.4 il existe donc $\bar{\mu}$ élément de $\mathcal{V}^p(L_1(P))$ vérifiant :

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$E(1_F \bar{\mu}(A \times \Omega)) = \int E(1_F / \mathcal{F}_{s-}) 1_A(s) dm \quad \text{où} \quad \bar{\mu}(A \times \Omega) = \frac{dv_A}{dP}, \quad v_A \text{ étant la}$$

mesure signée et bornée telle que :

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad v_A(F) = \int E(1_F / \mathcal{F}_{s-}) 1_A(s) dm.$$

Comme m est la différence de deux mesures admissibles positives, nous supposons d'abord que m est positive.

Soit $\bar{V}_t = \bar{\mu}([0, t] \times \Omega)$ ($t \in T$), il existe alors $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega_0^c) = 0$

et $\forall \omega \in \Omega_0, \forall t, \forall t' \in \mathbb{Q}^d \cap]0, 1] = T_0$ avec $t \leq t' \Rightarrow$

$$\Delta_{[t, t']} \bar{V}(\omega) \geq 0.$$

Définissons alors $(V_t)_{t \in \bar{T}}$ en posant :

$$V_t(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in T_0}} \bar{V}_s(\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega_0$$

$$V_t(\omega) = 0, \quad \text{sinon.}$$

V ainsi défini est continu à droite, intégrable. Il vérifie $\Delta_A V \geq 0$ Pps

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}, \text{ et, } E(1_F V_t) &= \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in T_0}} E(1_F \bar{V}_s) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in T_0}} \int E(1_F / \mathcal{F}_{u-}) 1_{[0, s]}(u) dm \\ &= \int E(1_F / \mathcal{F}_{u-}) 1_{[0, t]}(u) dm = E(1_F \bar{V}_t). \end{aligned}$$

Toujours d'après 6.4 $\mu(A \times \Omega) = \Delta_A V$ est mesurable pour la tribu $\bigvee_{s \in A} \mathcal{H}_{s-}$, soit alors $A =]0, t]$, on a $\bigvee_{s \in A} \mathcal{H}_{s-} = \mathcal{H}_{t-}$ donc V est adapté à $(\mathcal{H}_{t-})_{t \in T}$.

L'unicité à l'indistinguabilité près provient de la structure de T et de la continuité à droite.

6.7. COMMENTAIRES

6.7.1. La prévisibilité de V n'est pas immédiate. Quand $d = 1$, elle se prouve en utilisant des temps d'arrêts ; quand $d = 2$, en utilisant des lignes d'arrêts et l'hypothèse $F_4([4], [9])$. Si V est continu, les hypothèses de [1], impliquent la prévisibilité.

6.7.2. On peut toujours trouver $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ satisfaisant à 6.4.1. en posant $\mathcal{H}_t = \bigvee_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ t \in A}} \mathcal{G}_A$ (voir [1])

6.7.3. Si on peut se restreindre à $\mathcal{A}$ dénombrable, 6.4.4. devient :

6.4.4.' si v est un élément de $\mathcal{V}(L_1(P))$ vérifiant 6.4.3., alors $\mu(A \times \Omega) = v(A \times \Omega)$ P.ps $\forall A \in \mathcal{A}$. (Les processus $(\mu(A \times \Omega))_{A \in \mathcal{A}}$ et $(v(A \times \Omega))_{A \in \mathcal{A}}$ sont indistinguables).

Le théorème 6.8 qui suit ne nécessite pas la régularité de l'espérance conditionnelle par rapport à une famille $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{H}$, par contre on utilise une hypothèse d'équintégrabilité.

La méthode utilisée est à rapprocher de celle de Orey pour les F -processus [13].

6.8 THEOREME.

Soit m une mesure admissible. On suppose qu'il existe une suite

$T^n = \{(A_{i_1}^n, \dots, A_{i(n)}^n)\}$ de partitions de plus en plus fines de T par des éléments de $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A} = \{A_{i_1}^n, \dots, A_{i(n)}^n, n \in \mathbb{N}\}$

On suppose également que :

$$6.8.1. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon : \quad \forall F \in \mathcal{F} : P(F) \leq \eta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |m| \left(\sum_{i=1}^{i(n)} E^P(l_F / \mathcal{G}_{A_{i_1}^n}) l_{A_{i_1}^n}(s) \right) \leq \varepsilon$$

Alors il existe un élément μ de $\mathcal{V}(L_1(P))$ de mesure de Doléans m , de

plus $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A \times \Omega)$ est $\bigvee_{A_{i_1}^n \subseteq A} \mathcal{G}_{A_{i_1}^n}$ -mesurable.

Démonstration.

Nous supposons d'abord que m est positive. Et pour $F \in \mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{A}$ on pose :

$$v_A^n(F) = \int \sum_{i=1}^{i(n)} E(l_F / \mathcal{G}_{A_{i_1}^n}) l_{A_{i_1}^n}(s) l_A(s) dm.$$

Afin d'alléger les notations, nous introduisons ϕ^n :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi^n} \mathcal{H}_b(\mathcal{G})$$

$$\bar{F} \mapsto \phi^n(F) = \sum_{i=1}^{i(n)} E(l_F / \mathcal{G}_{A_{i_1}^n}) l_{A_{i_1}^n}(s)$$

$$\text{donc } v_A^n(F) = \int \phi^n(F) l_A(s) dm.$$

$v_A^n(F)$ a bien un sens puisque $\phi^n(F)$ est prévisible borné, $\phi^n(F)$ est définie à un processus évanescent près et l_A est prévisible borné.

De plus v_A^n est une mesure positive bornée sur $(\Omega, \mathcal{H})$, absolument continue par rapport à P .

$$\text{Soit alors } g_A^n = \frac{d v_A^n}{d P}$$

On a : $\forall F \in \mathcal{F}_A$ $E(g_A^n 1_F) = \nu_A^n(F) = \int \phi^n(F) 1_A \, dm.$

et 6.8.1. implique que : $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_\varepsilon : P(F) \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow \int \phi^n(F) \, dm \leq \varepsilon$

donc : $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_\varepsilon : P(F) \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow E(g_A^n 1_F) \leq \varepsilon.$

Comme $E(g_A^n) \leq m(A \times \Omega) \leq m(T \times \Omega)$, on peut affirmer que $\{g_A^n\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ A \in \mathcal{A}}}$

est équi-intégrable.

Alors pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il existe une sous-suite qui converge faiblement, mais $\mathcal{A}$ étant dénombrable, on peut, par un procédé diagonal, trouver une sous-suite $\{g_A^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement pour tout A élément de $\mathcal{A}$.

Soit $g_A = \lim_k g_A^{n_k}.$

Pour D élément de $\mathcal{Q}'$, $D = \sum_{i=1}^r A_i \times F_i$, on pose : $\mu(D) = \sum_{i=1}^r 1_{F_i} g_{A_i}.$

On a évidemment pour $A \times F$ élément de $\mathcal{Q}$: $\mu(A \times F) = 1_F g_A = 1_F \mu(A \times \Omega)$

D'autre part, l'application qui à A associe g_A^n vérifie

$$g_A^n = \sum_{i=1}^r g_{A_i}^n \quad \text{si } A = \sum_{i=1}^r A_i \quad A_i \in \mathcal{A} \quad A \in \mathcal{A}$$

en effet on a $\forall F \in \mathcal{F}_A$

$$\begin{aligned} E(g_A^n 1_F) &= \int \phi^n(F) 1_A \, dm = \sum_{i=1}^r \int \phi^n(F) 1_{A_i} \, dm \\ &= \sum_{i=1}^r E(g_{A_i}^n 1_F) = E\left(\sum_{i=1}^r g_{A_i}^n 1_F\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$E(g_A 1_F) = \sum_{i=1}^r E(g_{A_i} 1_F).$$

Alors μ est bien définie sur $\mathcal{Q}'$ et est additive.

μ est positive, pour vérifier que μ est un élément de $\mathcal{V}^p(L_1(P))$, il suffit donc de vérifier 6.2.1.

mais on a pour $D = \bigcup_{i=1}^r (A_i \times \Omega)$; $A_i \in \mathcal{A}$

$$E(\mu(D)) = \sum_{i=1}^r E(g_{A_i})$$

$$\text{et } E(g_{A_i}) = \lim_n E^P(g_{A_i}^n) = m(A_i \times \Omega)$$

$$\text{d'où } E(\mu(D)) \leq m(T \times \Omega)$$

$$\text{et } \forall A \in \mathcal{A} \quad E(\mu(A \times \Omega)) = m(A \times \Omega)$$

m étant une mesure bornée, les inégalités précédentes impliquent 6.2.1.

Soient maintenant A élément de $\mathcal{A}$ et F élément de $\mathcal{F}$, alors on a

$$E(l_F g_A^n) = \int \phi^n(F) l_A \, dm$$

il est facile de voir que cette relation s'étend à Y variable aléatoire $\mathcal{A}$ -mesurable bornée et en particulier à $Y = E(l_F | \bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i^n, A_i^n \subseteq A)$.

On remarque alors que, A étant fixé, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $A_{i-1}^n \subseteq A$ ou $A_i^n \cap A = \emptyset$, alors pour $n \geq n_0$ on a

$$\begin{aligned} E(Y g_A^n) &= \int \sum_i E(Y / \mathcal{G}_{A_i^n}) l_{A_i^n} l_A \, dm \\ &= \int \sum_i E(l_F / \mathcal{G}_{A_i^n}) l_{A_i^n} l_A \, dm \\ &= E(l_F g_A^n) \end{aligned}$$

et par suite de la convergence faible

$$E(Y g_A) = E(l_F g_A)$$

ce qui implique que g_A est mesurable pour $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i^n, A_i^n \subseteq A$.

Enfin si $F \in \mathcal{G}_A$, on a $\forall n \geq n_0 \quad E(l_F g_A^n) = m(A \times F)$

d'où $E(l_F g_A) = m(A \times F)$ et $m^\mu = m$.

Remarquons que l'hypothèse 6.8.1. est un renforcement de l'hypothèse :
 m ne charge pas les ensembles évanescents.

D'autre part, si $m = \nu \otimes P$, 6.8.1. est automatiquement satisfaite, m est de cette forme quand c'est la mesure de Doléans d'une $L_1(P)$ -mesure stochastique μ' telle que $\mu'(A \times \Omega)$ soit indépendante de $\mathcal{F}_A$.

7 - DECOMPOSITION DE DOOB DES $L_p(P)$ -MESURES STOCHASTIQUES ($p \geq 1$)

7.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS

Pour $p \geq 1$, nous notons $\mathcal{M}(L_p(P))$ l'ensemble des $L_p(P)$ -mesures stochastiques de mesure de Doléans nulle.

Si une mesure stochastique μ est définie par un processus X , au sens du paragraphe 4, nous dirons que X appartient à $\mathcal{M}(L_p(P))$ (resp. $\mathcal{V}(L_p(P))$) si μ appartient à $\mathcal{M}(L_p(P))$ (resp. $\mathcal{V}(L_p(P))$).

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous des hypothèses assez générales, une $L_1(P)$ -mesure stochastique μ admet une décomposition de la forme $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$ et μ_2 appartient à $\mathcal{V}(L_1(P))$ (on a donc $m^\mu = m^{\mu_2}$).

Les théorèmes et corollaires 7.2 à 7.6 établissent cette décomposition en utilisant la mesure de Doléans m et les résultats du paragraphe 6 (théorèmes 6.4 et 6.8).

Le théorème 7.7 établit la décomposition en utilisant $\{V^T(\mu)\}_{T \in \mathcal{T}}$.

Dans le cas où il existe une correspondance entre mesures stochastiques et processus stochastiques, nous donnerons la décomposition correspondante des processus.

Notons que, pour $d = 1$, $T =]0, a]$, un élément de $\mathcal{M}(L_1(P))$ correspond, sous les hypothèses habituelles à une martingale ; pour $d = 2$, $T =]0, a]$ un élément de $\mathcal{M}(L_1(P))$ correspond, sous les hypothèses habituelles également, à une martingale faible.

7.2. THEOREME

Soit μ une $L_1(P)$ -mesure stochastique sur $(T \times \Omega, \mathcal{G})$.

On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{T}}$, de sous-tribus complètes de $\mathcal{F}$ vérifiant 6.4.1 et 6.4.2.

Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$, μ_2 appartient à $\mathcal{V}(L_1(P))$. De plus, μ_2 possède les propriétés suivantes :

7.2.1 $\forall F \in \mathcal{F}_A$, $\forall A \in \mathcal{A}$

$$E(1_F \mu_2(A \times \Omega)) = \int E(1_F / \mathcal{F}_s) 1_A(s) dm^\mu$$

ce qui implique :

7.2.2 si v est un élément de $\mathcal{V}(L_1(P))$ vérifiant 7.2.1 alors

$$\mu_2(A \times \Omega) = v(A \times \Omega) \text{ P.ps pour chaque } A \text{ élément de } \mathcal{A}.$$

7.2.3 $\mu_2(A \times \Omega)$ est mesurable pour la tribu $\bigvee_{s \in A} \mathcal{F}_s$ et la mesure de Doléans de μ_2 est m^μ .

Démonstration.

μ étant une $L_1(P)$ -mesure stochastique, sa fonction de Doléans m^μ s'étend en une mesure admissible sur $(T \times \Omega, \mathcal{G})$ (5.5). Il suffit alors d'appliquer le théorème 6.4 à m^μ pour obtenir μ_2 et les propriétés 7.2.1, 7.2.2 et 7.2.3.

Il est évident que $\mu - \mu_2 = \mu_1$ appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$.

Notons également que 7.2.1 peut s'écrire sans utiliser m^μ . Soit $\phi(F)$ le processus tel que :

$$\phi(F)_t = E(1_F / \mathcal{F}_t)$$

alors 7.2.1 est équivalent à

$$7.2.1' \quad \forall F \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$E(1_F \mu_2(A \times \Omega)) = E(\mu(\phi(F)1_A)).$$

7.3 COROLLAIRE.

Soit $T = \{\{a_n\}_n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{A} = \{\{a_n\}_n \in \mathbb{N}\}$. Soit μ une $L_1(P)$ -mesure stochastique sur $(T \times \Omega, \mathcal{B})$.

Alors il existe un processus prévisible v unique à l'indistinguabilité près et vérifiant :

$$7.3.1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad \int 1_F v_{a_n} dP = \int E(1_F / \mathcal{G}_{\{a_n\}}) m^\mu(\{a_n\}, d\omega).$$

Ce processus définit une $L_1(P)$ -mesure stochastique μ_2 appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$, par la relation :

$$\mu_2(\{a_n\} \times \Omega) = v_{a_n}$$

De plus la mesure de Doléans de μ_2 est m^μ , ce qui implique que $\mu_1 = \mu - \mu_2$ appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$.

Démonstration: évidente.

7.4 COROLLAIRE

Soit $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathcal{T} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus de densité de masses définissant une $L_1(P)$ -mesure stochastique.

Alors $X = M + V$

où $V \in \mathcal{V}(L_1(P))$, $M \in \mathcal{H}(L_1(P))$.

De plus il existe une décomposition, unique à l'indistinguabilité près, telle que V soit prévisible, et on a $V_{a_n} = E(X_{a_n} / \mathcal{G}_{\{a_n\}})$

Démonstration

Soit μ la mesure stochastique associée à X .

Le corollaire 7.3 implique l'existence de V prévisible appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$ et de M élément de $\mathcal{H}(L_1(P))$ tels que $X = M + V$.

D'autre part, $\forall F \in \mathcal{G}_{\{a_n\}}$ on a

$$E(1_F X_{a_n}) = E(1_F V_{a_n})$$

V étant prévisible cela implique que

$$V_{a_n} = E(X_{a_n} / \mathcal{G}_{\{a_n\}})$$

Ce qui implique (comme dans le cas $T = \mathbb{N}$) l'unicité à l'indistinguabilité près.

7.5 COROLLAIRE.

Soit $T =]0, 1] \subseteq \mathbb{R}^d$

Soit $\mathcal{T} = \{]s, t], 0 \leq s < t \leq 1\}$.

On suppose donnée une famille croissante $(\mathcal{H}_t)_{t \in \bar{T}}$, de sous-tribus complètes de $\mathcal{H}$; on suppose également que, pour $A =]s, t]$ $\mathcal{G}_A = \mathcal{H}_s$.

Soit μ une $L_1(P)$ -mesure stochastique et X son processus de répartition.

Alors $X = M + V$

où V appartient à $\mathcal{V}(L_1(P))$ et M appartient à $\mathcal{M}(L_1(P))$.

De plus, il existe une décomposition unique à l'indistinguabilité près telle que V soit continu à droite, adapté à $(\mathcal{H}_t)_{t \in \bar{T}}$ et vérifie :

6.6.1 $\forall F \in \mathcal{H}, \forall t \in T$

$$E(1_F V_t) = \int E(1_F | \mathcal{H}_{s-}) 1_{[0, t]}(s) d\mu$$

Démonstration.

D'après 6.6, il existe un processus V appartenant à $\mathcal{V}(L_1(P))$, continu à droite, adapté à $(\mathcal{H}_t)_{t \in T}$, vérifiant 6.6.1 et tel que la mesure de Doléans associée à V soit égale à m^μ .

Il est alors évident que $M = X - V$ est un élément de $\mathcal{M}(L_1(P))$.

L'unicité est immédiate d'après 6.6.

Remarquons que 6.6.1 s'écrit également 6.6.1' $\forall F \in \mathcal{H}, \forall t \in T$

$$E(1_F V_t) = E(\mu(\phi(F) 1_{[0, t]})$$

où $\phi(F)$ est le processus prévisible tel que $\phi(F)_t = E(1_F | \mathcal{H}_{t-})$.

7.6 COROLLAIRE

Soit μ une $L_1(P)$ -mesure stochastique. On suppose qu'il existe une suite $(\tau^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partitions de plus en plus fines de T satisfaisant aux hypothèses du théorème 6.8.

On suppose également que m^μ la mesure de Doléans de μ satisfait à 6.8.1.

Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 appartient à $\mathcal{H}(L_1(P))$ et μ_2 appartient à $\mathcal{V}^p(L_1(P))$.
De plus $\forall A \in \mathcal{G}$, $\mu(A \times \Omega)$ est $\left(\bigvee_{n, i; A_1^n \subseteq A} \bigotimes A_1^n \right)$ -mesurable.

Démonstration immédiate à partir de 6.8.

7.7 THEOREME

Soit μ une $L_1(P)$ -mesure stochastique. On suppose qu'il existe une suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partitions finies de plus en plus fines de T et que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des éléments de ces partitions.

On suppose également que $\{V^{\tau_n}(\mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégrable.

Alors $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 appartient à $\mathcal{H}(L_1(P))$ et μ_2 appartient à $\mathcal{V}^p(L_1(P))$.

De plus $\mu(A \times \Omega)$ est mesurable pour la tribu : $\bigvee_{n, i; A_1^n \subseteq A} \bigotimes A_1^n$

$(\tau_n = \{A_1^n, i = 1 \dots i(n)\})$.

Avant d'aborder la démonstration, nous allons faire quelques remarques.

7.8 REMARQUES.

7.8.1. Si $T =]]0,1]] \subseteq \mathbb{R}^d$, sous les conditions habituelles, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir des dyadiques convient.

7.8.2. Si μ est une $L_1(P)$ -mesure stochastique, on sait que c'est également une quasi-martingale (5.2) et donc $\{V^n(\mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $L_1(P)$. Si μ est une $L_p(P)$ -mesure stochastique avec $p > 1$, alors $V^n(\mu)$ appartient à $L_p(P)$ et $\{V^n(\mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable dès qu'il est borné dans $L_p(P)$.

7.8.3. Si $T =]0, a] \subseteq \mathbb{R}$ et si μ est une $L_1(P)$ -mesure stochastique telle que le processus de répartition X associé à μ soit un F -processus borné, alors $\{V^n(\mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable [13].

7.8.4. Soit μ telle que $E(\mu(A \times \Omega) / \mathcal{G}_A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ et soit m sa mesure de Doléans, alors $\forall F \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} |m|(E(1_F / \mathcal{G}_A) \cdot 1_A) &= m(E(1_F / \mathcal{G}_A) \cdot 1_A) = E(E(1_F / \mathcal{G}_A) \mu(A \times \Omega)) \\ &= E(E(1_F / \mathcal{G}_A) E(\mu(A \times \Omega) / \mathcal{G}_A)) \\ &= E(1_F E(\mu(A \times \Omega) / \mathcal{G}_A)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |m| \left(\sum_{i=1}^{i(n)} E^P(1_F / \mathcal{G}_{A_i^n}) 1_{A_i^n}(s) \right) &= E(1_F \cdot \sum_{i=1}^{i(n)} E(\mu(A_i^n \times \Omega) / \mathcal{G}_{A_i^n})) \\ &= E(1_F V^n(\mu)). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'hypothèse : $\{V^n(\mu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable, est équivalente à l'hypothèse 6.8.1.

7.8.5. Si $T = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et μ $L_1(P)$ -mesure stochastique, alors d'après 5.2, on a : $E(\sum_n |E(\mu(\{a_n\} \times \Omega) / \mathcal{G}_{\{a_n\}})|) < +\infty$.

d'où l'équi-intégrabilité de $\{V^\tau(\mu), \tau \in \mathcal{C}\}$ (voir 5.1).

On montre alors, directement que $\nu^{(+)}$ et $\nu^{(-)}$ définies par :

$$\begin{cases} \nu^{(+)}(\{a_n\} \times \Omega) = (E(\mu(\{a_n\} \times \Omega) | \mathcal{G}_{\{a_n\}}))^+ \\ \nu^{(-)}(\{a_n\} \times \Omega) = (E(\mu(\{a_n\} \times \Omega) | \mathcal{G}_{\{a_n\}}))^- \end{cases}$$

définissent des $L_1(P)$ -mesures stochastiques (6.3), que $\nu^{(+)} - \nu^{(-)} \in \mathcal{V}(L_1(P))$ et que $\mu - (\nu^{(+)} - \nu^{(-)}) \in \mathcal{V}(L_1(P))$.

Démonstration du théorème 7.7.

Soit $\mathcal{R}_n = \{A \times F, A \in \tau_n, F \in \mathcal{G}_A\}$

On note $\mathcal{R}'_n$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{R}_n$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}' = \bigcup_n \mathcal{R}'_n$.

En effet, on a $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}'_n \subseteq \mathcal{R}' \Rightarrow \bigcup_n \mathcal{R}'_n \subseteq \mathcal{R}'$.

Réciproquement, soit D élément de $\mathcal{R}'$, alors D est une réunion finie, disjointe, d'éléments de $\mathcal{R}_n$, on peut même écrire que $D = \bigcup_{i=1}^n A_i \times F_i, A_i \in \tau, F_i \in \mathcal{G}_{A_i}$

et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Il existe alors un indice n_0 tel que $A_i \times F_i$ appartienne à $\mathcal{R}'_{n_0}$ pour tout i appartenant à $\{1 \dots r\}$. En conséquence D appartient à $\mathcal{R}'_{n_0}$ et $\mathcal{R}' \subseteq \bigcup_n \mathcal{R}'_n$.

n étant fixé ; soient $A \times F \in \mathcal{R}_n$ et $\mu^n(A \times F) = 1_F [E(\mu(A \times \Omega) | \mathcal{G}_A)]^+$

Pour D élément de $\mathcal{R}'_n$, $D = \bigcup_i (A_i^n \times F_i)$ on pose : $\mu^n(D) = \sum_i \mu^n(A_i^n \times F_i)$

Soit $h_n = \sum_i 1_{\{(E(\mu(A_i^n \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i^n}) \geq 0\}}} 1_{A_i^n}$

h_n est un processus prévisible, positif, borné par 1, et, pour D élément de $\mathcal{R}'_n$, $D = \bigcup_i (A_i^n \times F_i)$, on a : $h_n 1_D = \sum_i 1_{F_i} 1_{\{(E(\mu(A_i^n \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i^n}) \geq 0\}}} 1_{A_i^n}$

$$\text{et } \mu(h_n 1_D) = \sum_i 1_{F_i} 1_{\{E(\mu|_{A_i^n \times \Omega})|_{\mathcal{G}_{A_i^n}} \geq 0\}} \mu(A_i^n \times \Omega)$$

d'où

$$\begin{aligned} E(\mu(h_n 1_D)) &= \sum_i E(1_{F_i} 1_{\{E(\mu|_{A_i^n \times \Omega})|_{\mathcal{G}_{A_i^n}} \leq 0\}} E(\mu(A_i^n \times \Omega) / (\mathcal{G}_{A_i^n})) \\ &= \sum_i E(1_{F_i} (E(\mu(A_i^n \times \Omega) | \mathcal{G}_{A_i^n}))^+) = E(\mu^n(1_D)) \end{aligned}$$

En conséquence, comme $\mu^n(D) \geq 0$, on a :

$$E(|\mu^n(D)|) = E(\mu^n(D)) = E(\mu(h_n 1_D)) \leq |\mu| (D).$$

Soit maintenant D éléments de $\mathcal{Q}'$ de la forme : $D = \sum_{i=1}^r (A_i \times \Omega)$

avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Il existe un plus petit indice n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, D appartienne à $\mathcal{R}'_n$ et $\mu^n(D) = \sum_i 1_{F_i} \mu^n(A_i \times \Omega)$ avec $F_i = \emptyset$ ou Ω

On convient que $\mu^n(D) = 0$ si $n < n_0$. Alors on a : $0 \leq \mu^n(D) \leq v^n(\mu)$.

Ce qui implique que $\{\mu^n(D)\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ D \in \mathcal{R}'}}$ est équiintégrable.

L'ensemble des éléments D de la forme précédente est dénombrable. On peut alors, par un procédé diagonal, trouver une sous-suite, notée également $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que, pour chaque D de la forme précédente, la suite $(\mu^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite que nous notons $v^{(+)}(D)$.

Soit maintenant $D = \sum_{i=1}^r A_i \times F_i$, un élément quelconque de $\mathcal{R}'$, et, soit

$$v^{(+)}(D) = \sum_{i=1}^r 1_{F_i} v^{(+)}(A_i \times \Omega), \text{ on a évidemment } v^{(+)}(D) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu^n(D) \text{ (avec la}$$

convention que $\mu^n(D) = 0$ si $D \notin \mathcal{R}'_n$.

Vérifions que $v^{(+)}$ est une $L_1(P)$ -mesure stochastique positive (c.à.d. un élément de $\mathcal{V}_+^p(L_1(P))$).

Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites.

Commençons par l'additivité de $v^{(+)}$. Soient D et D' éléments de $\mathcal{Q}'$ tels que $D \cap D' = \emptyset$. Il existe alors un indice n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$, D et D' appartiennent à $\mathcal{Q}'_n$ et $\mu^n(D \cup D') = \mu^n(D) + \mu^n(D')$, ce qui implique, en vertu de l'unicité de la limite faible que :

$$v^{(+)}(D \cup D') = v^{(+)}(D) + v^{(+)}(D').$$

Comme l'hypothèse 3.1.1 est trivialement satisfaite, nous passons à 3.1.2.

(bornitude dans $L_1(P)$ de $v^{(+)}(\mathcal{Q}')$) et 3.2.1.

Par suite de la positivité de $v^{(+)}$ et de la convergence faible, on a :

$$\forall D \in \mathcal{Q}' \quad E(|v^{(+)}(D)|) = E(v^{+}(D)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E(\mu^n(D))$$

d'où

$$E(|v^{(+)}(D)|) \leq |m^\mu|(D) \leq |m^\mu|(T \times \Omega) < +\infty.$$

Ces inégalités impliquent évidemment 3.1.2. et 3.2.1.

Soit maintenant, pour $A \times F \in \mathcal{Q}_n$

$$\bar{\mu}^n(A \times F) = 1_F(E(\mu(A \times \Omega)/\mathcal{G}_A))^-$$

Nous définissons $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$k_n = \sum_i 1_{\{E(\mu(A_i^n \times \Omega)/\mathcal{G}_{A_i^n}) \leq 0\}} 1_{A_i^n}$$

Le même raisonnement que précédemment s'applique à la suite $(\bar{\mu}^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est facile de voir qu'on peut trouver une sous-suite extraite de la suite $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une sous-suite extraite de la suite $(\bar{\mu}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant même ensemble d'indices I et telles que :

$$\begin{aligned} \forall D \in \mathcal{Q}', \quad (\mu^n(D))_{n \in I} & \text{ converge faiblement vers } v^{(+)}(D), \\ (\bar{\mu}^n(D))_{n \in I} & \text{ converge faiblement vers } v^{(-)}(D), \\ v^{+} \text{ et } v^{-} & \text{ étant des éléments de } \mathcal{V}_+(L_1(P)). \end{aligned}$$

Comme on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall D \in \mathcal{Q}': \begin{cases} E(\mu(h_n 1_D)) = E(\mu^n(D)) \\ E(\mu(k_n 1_D)) = -E(\bar{\mu}^n(D)) \end{cases} \Rightarrow E(\mu(1_D)) = E(\mu^n(D)) - \bar{\mu}^n(D)$$

on a : $m^\mu(D) = E(\mu(1_D)) = E(v^{(+)}(D) - v^{(-)}(D))$.

On pose alors $\mu_2 = v^{(+)} - v^{(-)}$.

Pour la mesurabilité, on remarque que, si A est un élément de $\mathcal{F}_t$, alors pour n assez grand, on a :

$$\mu^n(A \times \Omega) = \sum_i \mu^n((A \cap A_i^n) \times \Omega) = \sum_{\substack{i \\ A_i^n \subseteq A}} (E(\mu((A \cap A_i^n) \times \Omega) / \mathcal{F}_{A_i^n}^n))^+$$

$\mu^n(A \times \Omega)$ est donc mesurable pour $\bigvee_{\substack{n,i \\ A_i^n \subseteq A}} \mathcal{F}_{A_i^n}^n$ ce qui implique que $v^{(+)}(A \times \Omega)$

est mesurable pour $\bigvee_{\substack{n,i \\ A_i^n \subseteq A}} \mathcal{F}_{A_i^n}^n$

7.9. DEFINITION.

Pour $p \geq 1$ soit $\mathcal{SM}(L_p(P)) = \mathcal{M}(L_p(P)) + \mathcal{V}(L_p(P))$
($\mathcal{SM}$ correspond à : semi-martingale !)

7.10. THEOREME.

Sous les hypothèses des théorèmes 7-2 ou 7-7 ou du corollaire 7-6, on a équivalence entre

7-10-1 μ est une $L_1(P)$ -mesure stochastique
et :

7-10-2 $\mu \in \mathcal{SM}(L_1(P))$.

ADDITIF.

- PROCESSUS CROISSANTS -

Nous supposons, pour fixer les idées, que $T =]]0,1]] \subseteq \mathbb{R}^d$
(les résultats restent valables pour tout intervalle $]]a,b]] \subseteq \overline{\mathbb{R}}^d$,
a et b finis ou non).

Nous supposons que $\mathcal{A} = \{]]s,t]] , s,t \in \overline{T} \}$.

Nous rappelons d'abord la définition usuelle d'un processus croissant.

A.1 - DEFINITION.

Un processus $V = (V_t)_{t \in \overline{T}}$ à valeurs réelles est appelé processus croissant s'il vérifie :

i) V est nul sur les axes ;

ii) $\Delta_A V \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Le processus est dit continu à droite (en abrégé : c.a.d.) s'il vérifie :

iii) $\forall t \in]]0,1]] \quad V_t = \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' > t}} V_{t'}$

A.2 - PROPRIÉTÉ.

Soit V un processus croissant c.a.d., alors pour toute suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$ on a : $\lim_n \Delta_{A_n} V = 0$.

Démonstration.

soit $A_n =]]s_n, t_n]]$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, on a :

$$]]s_1, t_1]] \supseteq \dots \supseteq]]s_n, t_n]] \supseteq]]s_{n+1}, t_{n+1}]]$$

La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée ; ces deux suites sont donc convergentes, soient a et b leurs limites respectives, on a $a \leq b$.

Supposons que $a < b$ et plus précisément que $a^i < b^i \quad \forall i = 1 \dots d$, alors

$]a, b[\neq \emptyset$ et $]a, b[\subseteq \bigcap_n]s_n, t_n[$ ce qui est contradictoire en conséquence $\exists j \in \{1 \dots d\}$ tel que $a^j = b^j$.

Supposons que $s_n^j < a^j = b^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$ alors $b \in]s_n, t_n[$ et $b \in \bigcap_n]s_n, t_n[$, ce qui est contradictoire donc $a^j = b^j$ implique que $s_n^j = a^j = b^j$ à partir d'un certain rang.

On a alors $0 \leq \Delta_{A_n} V \leq V_{t_n} - V_b$.

En effet, si $s \in A_n$, on a, $\forall i \in \{1 \dots d\} \quad s^i \leq t_n^i$ et donc $s \in]0, t_n[$,

et, si $a^j = b^j \quad s_n^j = a^j = b^j$ à partir d'un certain rang donc $s^j > b^j$, ce

qui implique que $s \notin]0, b[$, on en déduit que $A_n \subseteq]0, t_n[-]b, b[$, la positivité de V implique alors l'inégalité.

Par suite de la continuité à droite de V , on a : $\lim_n V_{t_n} = V_b$

d'où $\lim_n \Delta_{A_n} V = 0$.

A.3. PROPRIÉTÉ.

Soit V un processus croissant c.a.d.

Alors :

- i) Si V est fini Pps, V est le processus de répartition d'une $L_0(P)$ -mesure stochastique.
- ii) Si V est intégrable, V est le processus de répartition d'une $L_1(P)$ -mesure stochastique.

Démonstration.

- i) résulte immédiatement du corollaire 6.2 (la convergence simple implique la convergence dans $L_0(P)$).
- ii) résulte également du corollaire 6.2. (la convergence simple dominée par V_1 implique la convergence dans $L_1(P)$).

Notons que la condition 6.2.1. ii) devient, pour V processus de répartition d'une $L_p(P)$ -mesure stochastique :

$$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad A_n \in \mathcal{A} \quad A_n \supset \emptyset \quad \lim_n ||\Delta_{A_n} V||_p = 0.$$

condition qui est plus faible que A1 iii).

Notons également que, deux modifications c.a.d. d'un même processus sont indistinguishables (démonstration identique au cas où $d = 1$).

A.4. PROPOSITION.

Soit μ un élément de $\mathcal{V}_+^p(L_p(P))$ il existe alors un processus V croissant, c.a.d., unique à l'indistinguishabilité près, tel que :

$$V_t = \mu([0, t] \times \Omega) \text{ Pps pour chaque } t.$$

Démonstration.

$$\text{Soit } W_t = \begin{cases} \mu([0, t] \times \Omega) & \text{si } t \in T \\ 0 & \text{si } t \in [[0, 1] -]0, 1]] \end{cases}$$

Soit D l'ensemble des éléments de $\overline{T}$ à composantes dyadiques.

Soit μ élément de $\mathcal{V}_+^p(L_p(P))$, on a $\Delta_A W \geq 0$ Pps pour chaque A élément de $\mathcal{A}$.

Il est alors facile de voir qu'il existe Ω_0 tel que $P(\Omega_0) = 0$ et $\Delta_A W \geq 0$

pour tout A élément de $\mathcal{A}$ de la forme $]s, t]$, $s \in D$, $t \in D$.

Soit alors $V_t = \lim_{\substack{t' \searrow t \\ t' \in D}} W_{t'} \cdot 1_{\Omega_0}$

(On pose $V_1 = W_1 \cdot 1_{\Omega_0}$)

V est bien défini. De plus, si $A =]s, t]$, il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle

que $A_n =]s_n, t_n]$, $s_n, t_n \in D$ et $\alpha(A_n, I) \rightarrow \alpha(A, I) \quad \forall I \subseteq \{1 \dots d\}$,

$\alpha(A_n, I) \in D$ et $(\alpha(A_n, I))_{n \in \mathbb{N}}$ suite décroissante,

alors $\Delta_{A_n} W = \sum_I \varepsilon^I (W_{\alpha(A_n, I)} - W_{\alpha(A_n, \emptyset)})$

et $\lim_n 1_{\Omega_0} \Delta_{A_n} W = 1_{\Omega_0} \cdot \Delta_A V$ d'où $\Delta_A V \geq 0$.

D'autre part, on a : $\lim_n \|\Delta_{A_n} W\|_p = 0$ quand $A_n \searrow \emptyset$ en particulier si

$A_n =]0, t_n]$ avec $t_n \in D$, $t_n \searrow t$, $t \in]0, 1] -]0, 1]$.

Ce qui implique que : $\lim_n \|W_{t_n}\|_p = 0$

quand $t_n \in D$, $t_n \searrow t$, $t \in]0, t] -]0, 1]$, donc $(W_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0

dans $L_p(P)$, comme $(W_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, on a nécessairement

$\lim_n W_{t_n} = 0$ Pps. d'où $V_t = 0$ pour $t \in]0, 1] -]0, 1]$.

Examinons maintenant le problème de la continuité à droite de V

on a, si $t_n \searrow t$ et $\omega \in \Omega_0$

$0 \leq V_{t_n}(\omega) - V_t(\omega) \leq W_{t'_n}(\omega) - V_t(\omega)$ où $t'_n \in D$ et $t_n + h_n > t'_n > t_n$

mais $W_{t'_n}(\omega) \rightarrow V_t(\omega)$ d'où $V_{t_n}(\omega) \rightarrow V_t(\omega)$

$((h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $h_n \searrow 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLAIN M.F. Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable. Séminaire de Rennes (1979).
- [2] ALLAIN M.F. Semi-martingales indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$ et formule de Itô. Cas continu. Z.W. 65 p. 421-444 (1984)
- [3] BICHTLER K. Stochastic integration and L_p -theory of semi-martingales Annals of Proba. Vol 9 n°1 p.49-89 (1981)
- [4] DELLACHERIE C. Probabilités et potentiel - chapitres V à VIII. Théorie des martingales. Hermann (1980).
- [5] FOLLMER H. Quasi-martingales à deux indices. C.R.A.S. Paris t. 288 8 janvier 1979. série A p. 61-64.
- [6] GUYON X et PRUM B. Semi-martingales à indices dans $\mathbb{R}^2$ - Thèse - Université de Paris Sud - centre d'Orsay (juin 1980).
- [7] HÜRZELLER H. Intégrateurs stochastiques à deux indices - C.R.A.S. Paris Tome 292. 25 mai 1981. Série I p. 917-920.
- [8] HÜRZELLER H. Quasi-martingale und stochastische integratoren mit halbgeordneten index mengen. Diss. ETHNR 7088 Zürich (1982).
- [9] MERZBACH E. Processus stochastiques à indices partiellement ordonnés Rapport interne n° 55 Ecole Polytechnique.
- [10] MERZBACH E. et ZAKAI M. Bimeasures and measures induced by planar stochastic integrators. (1983).
- [11] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L_0 Z.W. 40 p. 101-114 (1979).
- [12] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. Stochastic integration. New-York Academic Press (1980).
- [13] OREY S. F-process. Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. II Part I Probability theory p. 301-313 (1965).