RÉGIS GRAS

Étude statistique critique de quelques formes psycho-génétiques de l'acquisition d'un concept mathématique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule 2
« Séminaire d'histoire des mathématiques au XXe siècle », , exp. n° 10, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___2_A10_0>

ETUDE STATISTIQUE CRITIQUE DE QUELQUES FORMES PSYCHO-GENETIQUES DE L'ACQUISITION D'UN CONCEPT MATHEMATIQUE

Régis GRAS

Exposé fait le 24.11.80 dans le cadre du séminaire "Histoire des Mathématiques"

Les observations, les réflexions, les références citées ici seront propres surtout au 1er cycle de l'enseignement secondaire. Elles seront articulées selon 3 dimensions : psychologique, mathématique et didactique.

1. ACQUISITION (= APPROPRIATION) : NATURE, INDICES

Les conduites d'acquisition se font, d'après J. PIAGET, selon un double processus synchrone définissant l'adaptation :

- l'assimilation au cours de laquelle l'individu "ingère" et incorpore l'objet, le fait dont il vise la connaissance ainsi que leurs lois, à ses propres schèmes, i.e. ses structures mentales existantes. Celles-ci tiennent lieu de canevas d'actions susceptibles d'être ultérieurement accomplies et sont constituées de mécanismes divers et de procédures de résolution. Cette phase a donc pour principal objectif une sorte de subjectivisation de l'objet .
- l'accomodation au cours de laquelle les structures mentales du sujet se modifient en fonction des actions du milieu. Par opposition à la phase précédente, disons qu'il y a ici objectivisation du sujet. On peut voir clairement le co-fonctionnement de ces phases tendant à s'équilibrer, dans la situation suivante : modification adaptative de méthodes résolvantes à l'occasion d'une nouvelle situation de problème.

Avant l'action du milieu (qui peut être un évènement, une leçon ou tout autre stimulus), l'état de connaissances du sujet est, supposons-le, en équilibre interconceptuel. Les actions extérieures vont, le plus souvent, provoquer un déséquilibre (remise en cause de ses propres connaissances, intégration de nouvelles), une discontinuité dans le champ cognitif, renvoyant les connaissances, au prix même quelquefois d'une régression locale et apparente, vers un nouvel état d'équilibre. Ce phénomène appropriatif est donc le fruit non passif d'une adaptation et d'une auto-régulation constructivistes. Mais soulignons ce fait : le problème de l'acquisition est de trouver et de construire pour le sujet des médiateurs entre lui et les objets qu'il ne faut pas croire livrés préconstruits et immuables (opinion de B. RUSSELL et du Cercle de Vienne). C'est l'action du sujet qui remplit dialectiquement ce rôle médiateur.

Sans elle, la perception serait, par exemple, pratiquement sans effet d'appropriation stable.

INDICATEURS D'APPROPRIATION

En vrac, en voici quelques-uns :

- habileté à différencier les statuts fonctionnels respectifs de signifié et signifiants, d'où une certaine capacité à opérer sur un langage formel en des actions symboliques prolongeant les actions relatives aux réalités ou se substituant à elles en pleine conscience.

- habileté à construire ses propres exemples et surtout ses propres contre-exemples.

- habileté à identifier, à reconnaître un modèle mathématique et à réinvestir un modèle adéquat à une situation (hypothèses de disponibilité et d'accessibilité de ce modèle).

- habileté à lier entre eux différents concepts, à les structurer en classes à opérer à la deuxième ou la troisième puissance (opération sur des opérations)

- et, contenant plus ou moins ce qui précède, capacité à prendre une distance spatio-temporelle par rapport aux objets réels et aux actions matérielles possibles.

D'où le désir d'établir une hiérarchie à l'intérieur du système des conduites donc des capacités, dont les degrés d'atteinte et de fiabilité ou de stabilité seraient les symptômes d'une certaine appropriation. C'est l'objet des taxonomies.

2. LES TAXONOMIES

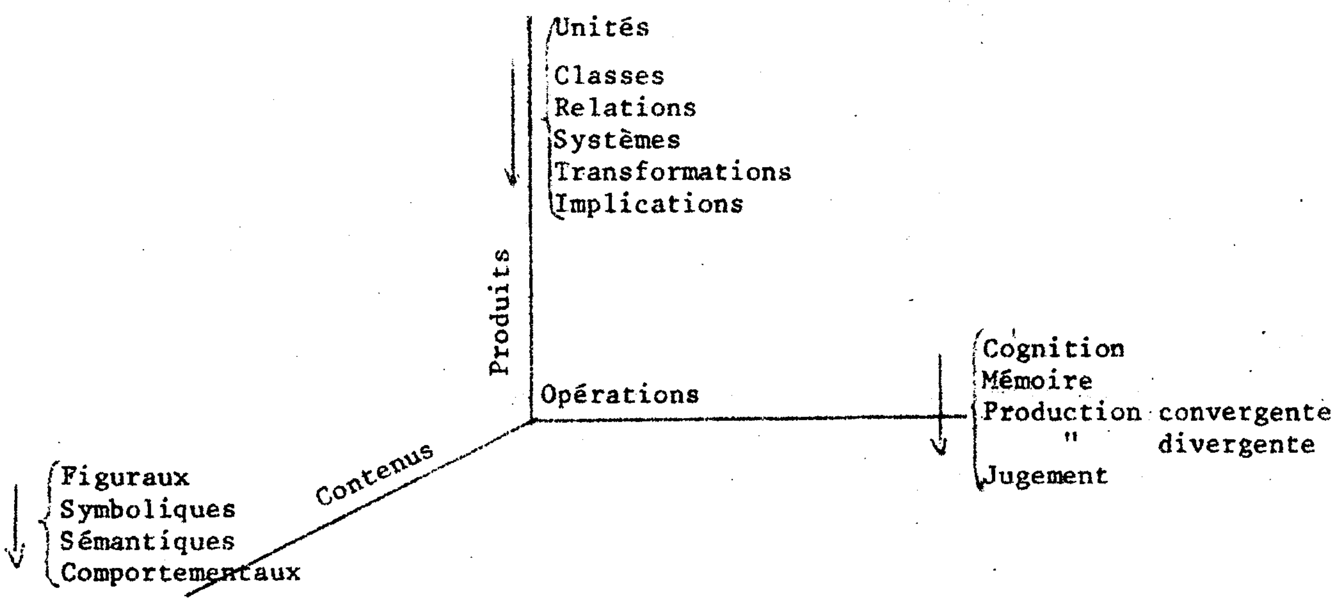
a) Nées avec Bloom (1956), les taxonomies (ou taxinomies) d'objectifs cognitifs visent à proposer une hiérarchie de capacités cognitives ordonnées par la complexité(1) et implicitement valables quels que soient les concepts considérés (à l'origine, la taxonomie de Bloom devait servir dans l'évaluation des connaissances en sciences humaines). Peu à peu, les taxonomies ont investi les domaines affectif et psycho-moteur.

(1) Selon Piaget, la complexité se définit par "l'extension des distances et la complication progressive des trajets caractérisant les échanges entre le sujet et les objets".

En mathématiques, la taxonomie N.L.S.M.A.(National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (1971)) semble la plus utilisée dans les pays anglo-saxons. Schématiquement, elle se présente en 5 classes, les capacités d'un niveau inférieur étant supposées acquises et englobées au niveau supérieur :

connaissance des faits
↓
calcul
↓
compréhension
↓
application
↓
analyse

Un modèle, non totalement hiérarchique, ne manque pas d'intérêt, car il intègre par sa tridimensionalité, des éléments de complexité non ordonnables. Le plus connu (et reconnu) est celui de Guilford (1958). Mais son emploi est à son tour très complexe : 120 capacités interviennent :



b) En 1978, j'ai tenté, à des fins d'évaluation d'une expérience, la constructior d'une taxonomie cognitive(1) en prenant en compte autant que possible :

- des données sur les psychologies de l'apprentissage
- la spécificité des acquisitions et des fonctionnements (opératoires) en mathématiques
- les acquis des taxonomies antérieures

Schématiquement, cette taxonomie se présente en 5 classes, qu'il ne faut pas considérer comme des stades, contenant 3 à 4 rubriques : le modèle mathématique associé a priori à la taxonomie est un préordre total. On en verra plus loin des éléments de contestation.

Classe A : connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématiques : les règles d'action y sont plus subordonnées au signifiant qu'au signifié...

Classe B : analyse de faits et transposition : maîtrise d'un dictionnaire de transposition entre signifiants d'un même objet et capacité, par l'analyse et la reconnaissance, d'anticiper des actions sur un des signifiants.

Classe C : compréhension des relations et des structures : restructuration progressive des connaissances englobant le ou les nouveaux concepts considérés et, par suite, validation possible d'assertions relatives à eux et réinvestissement dans des situations familières...

Classe D : synthèse et créativité : démarche plus systémique qu'analytique, capacité à créer ses propres exemples , à générer des algorithmes, à généraliser et réinvestir dans des situations plus éloignées du champ familier...

Classe E : critique et évaluation : distance maximale par rapport à la réalité, les systèmes de signifiants sont très mobiles ; capacité à formuler des contre-exemples...

c) Restrictions relatives à l'idée de taxonomie :

- tous les concepts mathématiques ne se construisent pas et ne s'insèrent pas dans le champ des connaissances de façon identique.

- tous les enfants ne s'approprient pas les concepts de la même façon, dar

(1) Cf. annexe 1

le même ordre ; ayant une économie propre, ils ne sont pas non plus capables de les restituer et de les faire fonctionner avec la même fiabilité et la même efficacité.

- les procédures de résolution de certains problèmes se complexifient avec l'algorithme de résolution : topologie de l'algorithme (branches ou boucles par exemple), mode opératoire (appel plus ou moins important à la mémoire), nombre de notions intervenant dans la résolution ... En liaison avec ce qui précède, rappelons que les procédures obéissent à un principe d'économie optimale de coût.

- les contenus de l'apprentissage définissent un champ conceptuel qui importe considérablement dans l'appropriation. Les capacités s'acquièrent à travers ces contenus et leur restent longtemps liées. Nous le reverrons plus loin.

d) quelques raisons d'utiliser cependant la taxonomie :

- elle met en évidence des objectifs assez souvent négligés et dans l'apprentissage et dans l'évaluation

- elle rend conscient plus objectivement de la complexité des tâches

- elle permet l'analyse de textes d'exercices et problèmes d'ouvrages, en termes de niveau et d'approfondissemnt (cf. grille d'analyse de l'A.P.M.E.P.)

- elle peut permettre une évaluation différenciée

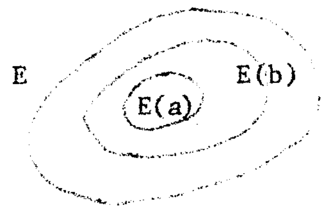
- elle peut rendre compte, pour les enseignants, d'une certaine dynamique de l'acquisition, la connaissance (opératoire) devant être prise non comme un état, mais comme un devenir, i.e. un processus de développement.

3. CONSTRUCTION D'UN OUTIL STATISTIQUE

On vient de voir que l'hypothèse taxonomique suppose, relativement à un concept donné, l'existence d'une variable sous-jacente, ordonnant totalement ou partiellement, des capacités de maîtrise, de transfert etde créativité à l'égard de ce concept. Quelles que soient les restrictions que nous pouvons apporter à cette hypothèse, une expérience locale de validation consiste à construire une suite d'items, sur un concept quelconque, dont la solution nécessiterait"presque" exclusivement la mise en oeuvre des capacités énoncées dans la taxonomie. L'hypothèse taxonomique (préordre total) va s'interpréter par rapport au test de la façon suivante :

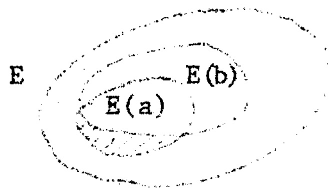
La réussite à l'item E_i relatif à la classe E suppose ou entraîne la réussite à l'item D_j, relatif à la classe D ; cette dernière réussite entraîne celle à l'item C_k relatif à la classe C, etc... Autrement dit, la validation doit s'éprouver à travers l'emboitement attendu des groupes d'élèves ayant réussi successivement à E_i, D_j, C_k,.. pour les i, j, k,...indiçant les items des classes E, D, C,...

Il s'agit donc, pour tester cette hypothèse, de construire un outil d'évaluation de la conjecture du type $E_i \Rightarrow D_j$. Notons encore pour simplifier : E(a) et E(b) les sous-ensembles d'une population d'élèves représentant respectivement ceux d'entre eux ayant réussi aux items a et b. Il s'agit de tester la validité de $E(a) \subset E(b)$.



accord avec l'hypothèse

M'inspirant de la démarche générale de I.C. Lerman dans la définition de ses indices de similarité, j'ai traduit le test par la donnée d'un seuil d'acceptation de $a \Rightarrow b$ à partir de la fréquence de $a \wedge \bar{b}$ (taille de $E(a) \setminus E(b)$) eu égard aux tailles respectives de l'ensemble E des élèves, de E(a) et de E(b).



désaccord (faible) avec l'hypothèse

Plus précisément, notons :

card E = n card E(a) = n(a) card E(b) = n(b) card[$E(a) \setminus E(b)$] = $n(a \wedge \bar{b})$

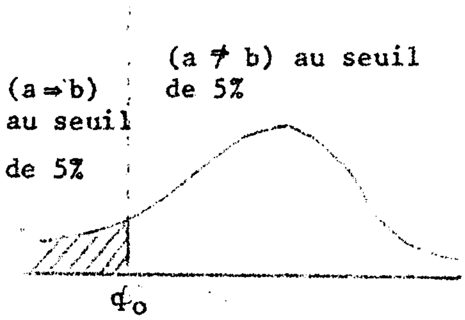
Supposons un tirage au hasard d'une partie X munie de propriétés cardinales analogues à celles de E(a) (par exemple, card X = card E(a)), la loi du cardinal aléatoire S de $X \setminus E(b)$ suit, selon l'analogie retenue une loi hypergéométrique, ou une loi de Poisson. C'est cette dernière forme que nous utilisons maintenant (dans ma thèse c'était la deuxième forme).

Les paramètres de S, v.a. de Poisson, sont :

$$\bar{S} = \frac{n(a)\ n(\bar{b})}{n} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\sqrt{n(a)\ n(\bar{b})}}{n}$$

et la loi de $\frac{S - \bar{S}}{\sigma}$ est approximativement normale pour des valeurs de $\bar{S}$ assez grandes.

Ainsi, l'indice observé : $\boxed{q(a,\bar{b}) = \frac{n(a \wedge \bar{b}) - \bar{S}}{\sigma}}$ est un indicateur du degré de l'implication : $a \Rightarrow b$.



Plus il est petit (grand en valeur absolue), plus la taille observée pour $E(a \wedge \bar{b})$ est faible par rapport à celle que l'on pouvait attendre d'une absence de liaison entre a et b et donc des tailles des parties E(a) et E(b).

Un seuil q_o correspondant au seuil de 5% permet de prendre la décision :

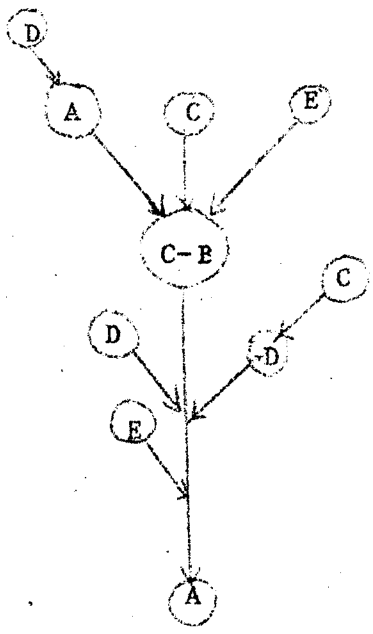
si $n(a)>n(b)$	on refuse $a \Rightarrow b$	
si $n(a) \leq n(b)$ et	$\left\{\begin{array}{l} E(a) \subset E(b) \\ \text{ou} \\ q(a,\bar{b}) \leq q_o \end{array}\right.$	on accepte : $(a \Rightarrow b)$ au seuil de 5%

Notons qu'ainsi : $\psi[q(a,\bar{b})] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{q(a,\bar{b})} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

est d'autant plus proche de 1 que $q(a,\bar{b})$ est petit. Cette valeur est retenue pour définir l'intensité d'implication.

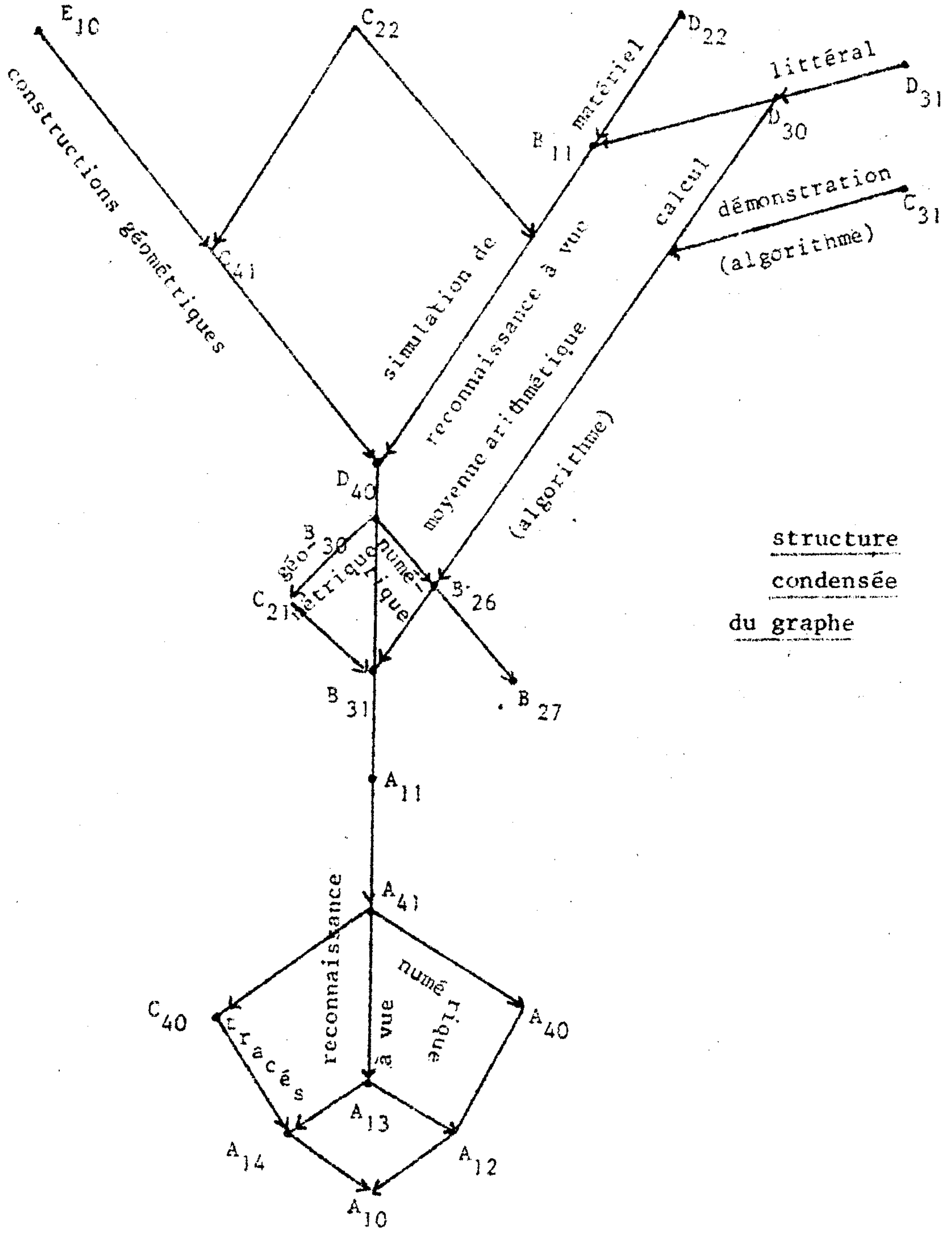
4. CARACTERE OPERATOIRE DE L'INDICE SUR UN TEST TAXONOMIQUE

Avec l'aide d'enseignants du secondaire, j'ai construit, sur le concept de symétrie centrale, un test en 42 items, chacun de ceux-ci étant censé opérationaliser au moins un objectif de la taxonomie. Les résultats fournis par 401 élèves de classe de 4ème, sont traités par l'indice d'implication précédent et conduisent à l'élaboration d'une matrice booléenne d'implication au seuil de 5%, puis à un graphe orienté, sans circuit, dont l'ensemble des arcs et des chemins sera analysé en terme de contenu et de tâche.



La structure condensée, ci-contre, du graphe orienté met en évidence le fait que la taxonomie est globalement convenablement respectée en tant que préordre partiel : elle n'induit pas comme il fallait s'y attendre, d'ordre total sur l'ensemble des items. Le préordre total sur l'ensemble des 5 classes, simplement examiné en termes de performances respectives au items relevant de ces classes (performance moyenne en A ≥ performance moyenne en B ≥ ... performance moyenne en E), est valide dans 42% des cas-élèves.

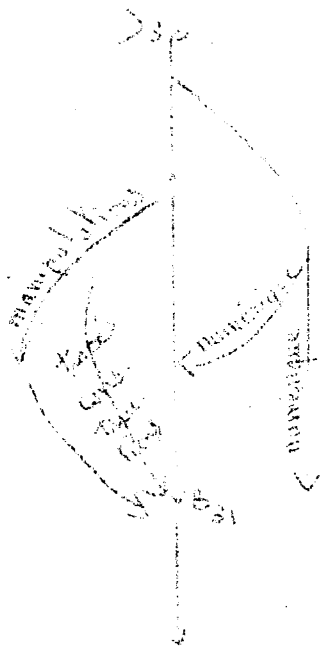
Mais cette satisfaction acceptable ne doit pas cacher la richesse des remarques d'ordre didactique apparues par l'analyse du graphe.



structure condensée du graphe

La structure condensée obtenue à partir du graphe défini par l'indice binomial montre clairement que la nature du contenu importe très fortement dans la capacité à résoudre les items. Une observation, même rapide, des élèves, permet de confirmer ceci presque quotidiennement. Il n'y a que très difficilement transfert des procédures d'une représentation ou d'un champ conceptuel à un autre. L'illusion du concept à l'état pur est à battre en brèche.

De plus, le réinvestissemnt de l'appréhension physique du concept, c'est-à-dire des opérations concrètes effectuées sur lui, vers des situations plus formelles, apparaît lui aussi en deçà des espoirs que l'on y avait placé. En effet, une analyse des résultats de la sous-population des élèves ayant manipulé du matériel sur la notion géométrique de symétrie centrale, montre (cf ci-contre) des conclusions relativement voisines de celles de la population globale : ceci n'invalide en rien les nuances, citées dans ma thèse, entre les 2 types de population.



Enfin, sur les 2 graphes, on remarque le rôle carrefour joué par un item(B_{31}) qui admet une nature "mixte" : contenu géométrique pour une tâche algorithmique. Ce phénomène est rencontré, de façon plus atténuée sans doute, dans d'autres points-doubles du graphe : les items correspondants relèvent de 2 caractères définissant les arcs incidents vers l'intérieur à ces items.

5. CARACTERE OPERATOIRE DE LA TAXONOMIE

Ces résultats incitent à la prudence quant à l'emploi de la taxonomie en tant que préordre total, mais ne renient pas son efficacité. Par exemple, avant de faire l'essai de validation décrit ci-dessus sur le concept de symétrie centrale, je l'ai utilisée pour différencier les acquisitions de 2 populations d'élèves :

- d'une part, environ 600 élèves français qui ont suivi pendant 2 ans un cycle expérimental en 4ème et 3ème de collège

- d'autre part, environ 500 élèves français qui ont suivi un cycle traditionnel.

Ces élèves soumis à un test d'entrée en 4ème y ont montré des différences non significatives sur l'ensemble des capacités développées. Par contre, à la sortie de 3ème, une différence significative au seuil de 5% (et même 1%) ressort en faveur des classes expérimentales. Une analyse taxonomique, à partir d'une classification a posteriori de items du test, montre mieux où se situent les différences : les écarts entre classes expérimentales et témoins vont croissant , en faveur des premières, des capacités répertoriées en classe taxonomique A à celles relevant de la classe E. J'effectue actuellement une étude plus fine du graphe d'implication qui semble d'une grande richesse didactique.

Annexe 1

TAXONOMIE D'OBJECTIFS COGNITIFS

CLASSES	RUBRIQUES	OBJECTIFS	ACTIVITES ATTENDUES
A Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématiques	A_1	Connaissance de la terminologie et du fait spécifique	associer assembler
	A_2	Capacité d'action intériorisée sur l'évocation d'une forme physique du concept	simuler observer
	A_3	Capacité de lire des cartes, des tableaux, des graphiques, des notices	déchiffrer décrire
	A_4	Effectuation d'algorithmes simples	organiser, calculer
B Analyse de faits et transposition	B_1	Substitution d'une démarche représentative à une manipulation Anticipation graphique	abstraire prolonger induire
	B_2	Reconnaissance et usage d'une relation implicite simple où intervient l'objet mathématique connu	analyser comparer
	B_3	Traduction d'un problème d'un mode dans un autre avec interprétation	schématiser,traduire transposer
C Compréhension des relations et des structures	C_1	Compréhension du concept, de ses relations avec les autres objets mathématiques	reconnaître construire
	C_2	Compréhension d'un raisonnement mathématique : justification d'un argument	justifier
	C_3	Choix et ordonnancement d'arguments	déduire
	C_4	Application dans des situations familières	analyser,abstraire appliquer,interpole
D Synthèse et Créativité	D_1	Effectuation et découverte d'algorithmes composites et de nouvelles relations	organiser,calculer optimiser
	D_2	Construction de démonstrations et d'exemples personnels	illustrer,démontrer valider,créer, inventer
	D_3	Découverte de généralisations	généraliser,induire prévoir,extrapoler
	D_4	Reconnaissance du modèle et applications dans des situations non routinières	modéliser,identifier,différencier, classifier,résumer
E ritique et valuation	E_1	Distinction du nécessaire et du suffisant	formuler des hypothèses, déduire
	E_2	Critique de données et de méthodes ou de modèles résolvants	contrôler,optimiser prévoir, critiquer questionner,vérifie
	E_3	Critique d'argumentation et construction de contre-exemple	critiquer,tolérer contredire

Annexe 2

METAMORPHOSES D'UN TEXTE D'EVALUATION

Voici enfin un exercice de style. Nous le proposons pour montrer comment, à partir du contenu central d'une question, pauvre en l'occurence, on peut enrichir et élever les niveaux de complexité de la question et comment on peut solliciter chez l'élève des activités de types divers.

Nous offrons, pour des classes de 3ème, des métamorphoses du noyau : "$3(x-2)\geq 36$", à l'aide d'objectifs qui figurent dans la taxonomie citée dans l'annexe 1 Bien entendu, certains textes ne sont pas à livrer comme tels aux élèves ; sans doute y aurait-il besoin d'une adaptation et d'une préparation par un apprentissage particulier. Mais le pari est tenu qu'une question peut changer d'aspect, faire ainsi appel à des niveaux supérieurs pour un contenu mathématique déterminé. Cette démarche, facilitée par des outils d'évaluation cités plus haut, permet d'ouvrir l'éventail des comportements évalués, c'est-à-dire de prendre en compte, dans l'évaluation, des objectifs négligés quelquefois.

I - Métamorphoses dans la complexité

Objectif A_1 : connaissance de la terminologie et du fait spécifique

1ère possibilité :

Soit l'expression, où $x \in Z^+$: $3(x - 2) \geqslant 36$
Est-ce une équation ? une égalité ? une inéquation ? une inégalité ?

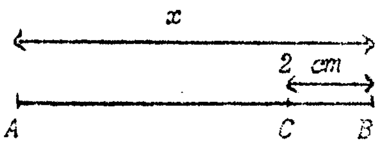
2ème possibilité :

Vérifier que 15 satisfait l'inéquation suivante où $x \in Z^+$:
$3(x - 2) \geqslant 36$.
(variante ouverte : "18 satisfait-il l'inéquation précédente ?")

Objectif A_4 : Effectuation d'algorithmes simples

Résoudre sur Z^+ l'inéquation : $3(x - 2) \geqslant 36$.

Objectif B_3 : Traduction d'un problème d'un mode dans un autre



Traduire le problème posé représenté par la figure ci-contre et le texte qui l'accompagne, par une inéquation : "on veut que le triple de la longueur de AC soit supérieure ou égale à 36 cm".

Objectifs C_2 - C_3 : Compréhension d'un raisonnement : justification d'un argument, choix et ordonnancement d'arguments

Résoudre sur Z^+ l'inéquation suivante :

$$(x - 6)^2 - 64 \geqslant 0$$

Objectif C_4 : Application dans des situations familières

Jean, Jacques et Pierre ont autant d'argent dans leur porte-monnaie. On m'a dit que, même en leur enlevant 2 F à chacun, ils ont en tout plus que ma fortune qui est de 36 F.
Combien chacun a-t-il au moins dans son porte-monnaie ?
Indiquer la procédure de recherche.

Objectif D_2 : Construction de démonstration et d'exemples personnels

Résoudre l'inéquation suivante dans Z^+ :

$x^2 - 12x - 28 \geqslant 0$

après avoir trouvé une valeur de x la satisfaisant.

Objectif D_4 : Reconnaissance du modèle et application dans une situation non routinière

Variante 1 :

Quel est l'âge minimum que peut avoir Pierre sachant que si on le rajeunit de deux ans, le triple de son âge est tout de même supérieur ou égal à celui de son père qui est de 36 ans ?

Variante 2 :

J'accepte de parier 400 F que le 13 ne sortira pas à la roulette lors d'une partie déterminée (36 numéros de 1 à 36).
Quelle somme devrais-je inciter à faire parier mon adversaire qui joue le 13, afin que mes chances de profit me garantissent de ne pas perdre d'argent ?

Dans les deux cas, on indiquera, avec clarté, la méthode utilisée.

Objectif E_2 : Critique de données

On dispose d'un segment AB, obtenu en enlevant 2 cm à la longueur d'un segment initial S. On juxtapose 3 segments isométriques à AB pour constituer un côté d'un triangle dont les autres côtés ont pour longueur 12 et 48 cm. Quelle longueur doit avoir le segment S pour que cette construction soit possible ? (On indiquera toutes les solutions entières acceptables et la méthode utilisée).

Objectifs E_1 - E_3 : Distinction du nécessaire et suffisant et critique d'argumentation avec construction de contre-exemple

Voici la résolution, peut-être erronée, d'une inéquation où l'inconnue est élément de $\mathbb{Z}^+$:

$$
\begin{aligned}
-48x + 3x^2 &\leqslant -84\\
&\Updownarrow\\
-3(16x - x^2) &\leqslant -3 \times 28\\
&\Updownarrow\\
16x - x^2 &\leqslant 28\\
&\Updownarrow\\
x^2 - 16x + 28 &\geqslant 0\\
&\Updownarrow\\
x^2 - 4x + 4 &\geqslant 12x - 24\\
&\Updownarrow\\
(x-2)^2 &\geqslant 12(x-2)\\
&\Updownarrow\\
x - 2 &\geqslant 12\\
&\Updownarrow\\
x &\geqslant 14
\end{aligned}
$$

Indiquer, s'il y a lieu, quelle(s) équivalence(s) du type $p \Leftrightarrow q$ est(sont) fausse(s). A chaque fois, donner une valeur de x satisfaisant l'inéquation p et ne satisfaisant pas l'inéquation q.