PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN GIROIRE

Résolution par équations intégrales de problèmes aux limites extérieurs pour l'équation de Helmholtz

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___S4_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RÉSOLUTION PAR ÉQUATIONS INTÉGRALES

DE PROBLÈMES AUX LIMITES EXTÉRIEURS

POUR L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ

JEAN GIROIRE

(avril 1978)

Centre de Mathématiques Appliquées - Ecole Polytechnique (ERA-CNRS n° 747)
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE - Tél. : 941 82 00

1 - INTRODUCTION.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et Γ sa frontière que nous supposerons régulière. Nous dénoterons

- . Ω' l'ouvert complémentaire de $\overline{\Omega}$,
- . n la normale extérieure à Γ ,
- . r la distance du point courant à l'origine des coordonnées.
- . $|x-y|$ la distance entre les points x et y de $\mathbb{R}^3$,
- . $[v] = v_{|int} - v_{|ext}$, le saut, à travers Γ , de la fonction ou distribution v , supposée admettre en un certain sens des traces intérieure et extérieure sur Γ .

Nous nous intéressons au problème de Dirichlet extérieur, relatif à l'équation de Helmholtz.

JÄGER [JA1] a démontré que ce problème admet une solution unique dans le cadre fonctionnel

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in W^1_H(\Omega') = \left\{ v \in H^1_{loc}(\Omega') \;\middle|\; \dfrac{\partial v}{\partial r} - ikv \in L^2(\Omega') \right\} : \\ \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega' , \\ u_{|\Gamma} = u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \text{où } u \text{ est à valeurs complexes et } k \text{ réel.} \end{cases}$$

Physiquement, Ω représente un corps plongé dans un milieu, et u est l'écart de la pression du milieu à la valeur qu'elle aurait en l'absence du corps. Plus précisément, nous avons la relation

$$(p - p_0)(x,t) = \mathrm{Re}\,(e^{-ikt}\, u(x)).$$

D'autre part, la condition

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku \in L^2(\Omega')$$

traduit la condition de Sommerfeld qui dit que la perturbation due à la présence de l'objet ne peut que s'éloigner vers l'infini sans jamais en revenir.

Nous allons présenter une méthode de résolution de ce problème par une équation intégrale de première espèce.

2 - REPRÉSENTATION DE LA SOLUTION PAR UN POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE.

Nous allons essayer de représenter la solution du problème (P) sous la forme

(2.1) $$u(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(x)\,\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,d\gamma_x \;,\; \forall\, y \in \mathbb{R}^3 \;.$$

Une fonction de la forme (2.1) satisfait [VL1] l'équation de Helmholtz dans Ω et Ω' , est continue à travers Γ , et sa dérivée normale admet un saut à travers Γ de valeur q . Comme, en outre, une telle fonction satisfait la condition de Sommerfeld, pour qu'elle soit solution du problème (P), il faut, et il suffit, que q soit solution de l'équation intégrale sur Γ

(2.2) $$u_0(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(x)\,\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\,d\gamma_x \;,\; \forall\, y \in \Gamma \;.$$

Le noyau de cette équation étant pseudo-homogène de degré -1 [SE1], l'opérateur

$$q \xrightarrow{A} u_0 \;,$$

défini pour q régulier, est un opérateur pseudo-différentiel qui peut être prolongé en un opérateur de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+1}(\Gamma)$, pour tout s réel.

Par ailleurs, A peut s'écrire

(2.3) $$(Aq)(y) = u_0(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(x)\,\frac{d\gamma_x}{|x-y|} + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(x)\,\frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|}\,d\gamma_x \;,\; \forall\, y \in \Gamma,$$

soit

$$Aq = Jq + Kq \;,$$

où J est l'isomorphisme de $H^s(\Gamma)$ sur $H^{s+1}(\Gamma)$ relatif à l'équation de Laplace, introduit par NEDELEC et PLANCHARD [NP1].

Quant à K , nous voyons que son noyau a la forme

$$ik - \frac{k^2}{2}\,|x-y| + O(|x-y|^3),$$

de sorte que, en utilisant à nouveau les résultats de Seeley, nous concluons que K est prolongeable en un opérateur de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+3}(\Gamma)$. Nous avons ainsi le

<u>THEOREME 2.1</u> : *L'application définie pour* q *régulier par (2.2) peut être prolongée pour tout* s *réel, en une application* A *de* $H^s(\Gamma)$ *dans* $H^{s+1}(\Gamma)$. *Cet opérateur* A *peut être décomposé en la somme*

$$A = J + K$$

où J *est un isomorphisme de* $H^s(\Gamma)$ *sur* $H^{s+1}(\Gamma)$ *et* K *opère de* $H^s(\Gamma)$ *dans* $H^{s+3}(\Gamma)$.

<u>COROLLAIRE 2.1</u> : A *est un opérateur de Fredholm d'index nul (de* $H^s(\Gamma)$ *dans* $H^{s+1}(\Gamma)$*).*

Le noyau de cet opérateur est alors caractérisé par le

<u>THEOREME 2.2</u> : *L'application* A *a un noyau de dimension non nulle si, et seulement si,* k *est valeur propre du problème de Dirichlet intérieur homogène.*

Nous voyons alors l'inconvénient de la représentation que nous avons choisie : bien que le problème extérieur considéré soit bien posé, quel que soit k, il apparait, dans l'équation intégrale que nous voulons utiliser pour le résoudre, des valeurs singulières parasites de k. Cependant, la simplicité de mise en oeuvre de cette méthode, par rapport aux autres, fait que son étude mérite d'être poursuivie.

Nous distinguerons deux cas.

3 - CAS OÙ k N'EST PAS VALEUR PROPRE DU PROBLÈME DE DIRICHLET INTÉRIEUR.

Nous avons immédiatement le

<u>*THEOREME 3.1*</u> *: A est un isomorphisme de $H^s(\Gamma)$ sur $H^{s+1}(\Gamma)$, pour tout s réel.*

Nous pouvons donc envisager la discrétisation de l'équation intégrale (2.2).

1 - DISCRETISATION. CADRE ABSTRAIT.

Nous utilisons une extension du cadre développé par NEDELEC [NE2] pour l'approximation d'équations intégrales de deuxième espèce.

Soient V un espace de Hilbert, et V' son dual. Nous voulons approcher l'équation

$$Aq = f ,$$

où A est un isomorphisme de V sur V' qui se décompose en la somme

$$A = J + K$$

avec

. J isomorphisme autoadjoint de V sur V' tel que

$$\langle Jq,q\rangle_{V'\times V} \geqslant \alpha \, \|q\|^2_V \quad ;$$

. $J^{-1} K \in \mathcal{L}(V,W)$, $W \subset V$.

Nous introduisons alors un sous-espace V_h de V , muni du produit interne $(\ ,\ )_h$. Soient A_h un élément de $\mathcal{L}(V_h,V_h)$ et q_h , la solution du problème

$$(\mathcal{Q}_h)\quad \begin{cases} \text{Trouver } q_h \in V_h \text{ tel que} \\ (A_h q_h, v_h)_h = (f_h, v_h)_h \ , \ \forall\, v_h \in V_h \ . \end{cases}$$

Nous avons alors les deux théorèmes

THEOREME 3.2 : Supposons que

$$(H1)\qquad \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(A_h q_h, v_h)_h|}{\|v_h\|_V} \geqslant \alpha \, \|q_h\|_V$$

où α *ne dépend pas de* h *. Alors, le problème* $(\mathcal{Q}_h)$ *admet une solution unique, et nous avons l'estimation d'erreur*

$$\|q-q_h\|_V \leqslant c \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|q-v_h\|_V + \sup_{w_h \in V_h} \left[\frac{|(Av_h, w_h) - (A_h v_h, w_h)_h|}{\|w_h\|_V} + \frac{|(Aq, w_h) - (f_h, w_h)_h|}{\|w_h\|_V} \right] \right\} .$$

THEOREME 3.3 : Supposons que $A = J + K$ *soit un isomorphisme de* V *sur* V' *et que* $J^{-1} K \in \mathcal{L}(V, W)$, $W \subset V$ *. Supposons, en outre, que*

$$(H2)\qquad \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leqslant c(h) \ \|u\|_W \ ,$$

et

$$(H3)\qquad |(Av_h, w_h) - (A_h v_h, w_h)_h| \leqslant c(h) \ \|v_h\|_V \ \|w_h\|_V \ ,$$

où $c(h) \to 0$ *avec* h *; alors, l'hypothèse* $(H1)$ *est vérifiée pour* h *suffisamment petit.*

Nous sommes alors en mesure d'aborder la

2 - DISCRETISATION CONCRETE.

Nous approchons le problème

$$(\mathcal{Q})\quad \begin{cases} \text{Trouver } q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\Gamma \int_\Gamma q(x) q'(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = \int_\Gamma u_0(y) q'(y) \, d\gamma_y \ , \ \forall\, q' \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \end{cases}$$

par un problème

$$(\mathcal{Q}_h)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } q_h \in V_h \text{ tel que}\\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_h}\int_{\Gamma_h} q_h(x)\, q'_h(y)\, \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, d\gamma_{hx}\, d\gamma_{hy} = \int_{\Gamma_h} u_{0h}(y)\, q'_h(y)\, d\gamma_{hy} \ , \ \forall\, q'_h \in V_h \ ,\end{array}\right.$$

où Γ_h et V_h sont des approximations de Γ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour la définition desquelles nous renvoyons à NEDELEC [NE1] . Disons simplement que, pour Γ_h , nous utilisons des polynômes de degré ℓ , et, pour V_h , des polynômes de degré m . Il vient alors le

<u>*THEOREME 3.4*</u> *: Les hypothèses* $(H2)$ *et* $(H3)$ *sont réalisées et nous avons les estimations d'erreur*

$$\|q-\tilde{q}_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c\left\{\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + h^{m+\frac{3}{2}}\|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{\ell+\frac{1}{2}}\|q\|_{L^2(\Gamma)}\right\},$$

$$\|q-\tilde{q}_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\left\{\frac{1}{\sqrt{h}}\|u_0-\tilde{u}_{0h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + h^{m+1}\|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{\ell}\|q\|_{L^2(\Gamma)}\right\},$$

où u_{0h} *est une approximation définie sur* Γ_h *de* u_0 *, et* $\sim$ *dénote le transport de* Γ_h *sur* Γ *par la projection orthogonale* ψ *[NE1]. Ainsi*

$$\tilde{q}_h = q_h \circ \psi^{-1} \quad .$$

Ce qui nous intéresse, en fait, c'est d'approcher la solution du problème (P). C'est l'objet du

<u>*THEOREME 3.5*</u> *: Soit* u *la solution du problème* (P)*. Elle est donnée par*

$$u(y) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma q(x)\,\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, d\gamma_x \ , \ \forall\, y \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

où q *est solution du problème* $(\mathcal{Q})$.

Soit u_h *défini par*

$$u_h(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} q_h(x) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \, d\gamma_{hx} \; , \; \forall \, y \in \mathbb{R}^3$$

où q_h *est solution du problème* $(\mathcal{Q}_h)$.

Soit y *dans* $\mathbb{R}^3$ *tel que*

$$d(y,\Gamma) \geqslant \delta > 0$$

et soit h *suffisamment petit.*

Alors, nous avons l'estimation

$$|u(y)-u_h(y)| \leqslant c \; e(y,\Gamma) \left\{ h^{m+\frac{3}{2}} \| u_0 - \tilde{u}_{0h} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \| u_0 - \tilde{u}_{0h} \|_{H^{-m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + h^{2m+3} \|q\|_{H^{m+1}(\Gamma)} + h^{\ell+1} \|q\|_{L^2(\Gamma)} \right\} ,$$

avec

$$e(y,\Gamma) = \sum_{j=1}^{m+3} \frac{1}{d^j(y,\Gamma)} \; .$$

<u>*COROLLAIRE 3.1*</u> *: L'erreur optimale sur* u *est obtenue, pour* y *suffisamment loin de* Γ *, lorsque*

$$\ell = 2m + 2 \; .$$

4 - CAS OÙ k EST VALEUR PROPRE DU PROBLÈME DE DIRICHLET INTÉRIEUR

1 - LE PROBLEME.

La représentation que nous avons choisie est alors moins satisfaisante. Néanmoins, nous allons voir que la méthode, légèrement modifiée, est encore utilisable. Tout d'abord, nous avons le

<u>*THEOREME 4.1*</u> *: Le problème (Q) admet, quel que soit k, au moins une solution pour tous les seconds membres provenant d'une large classe de problèmes physiques.*

Cela provient de ce que nous avons prolongé u continûment à travers Γ. Ce résultat ne nous empêchera pas de nous heurter à des difficultés numériques. Pour les surmonter, nous avons recours à une

2 - METHODE DE REGULARISATION.

Au lieu de résoudre l'équation

$$Aq = f \ ,$$

nous résolvons

$$i\,\varepsilon\, J q_\varepsilon + A q_\varepsilon = f \ ,$$

où ε est un paramètre réel destiné à tendre vers 0 .

L'équation à régulariser étant du type "identité plus compact", nous sommes dans une situation plus favorable que celle dans laquelle on se retrouve habituellement avec ce type de méthode. C'est pourquoi, nous pouvons obtenir le

THEOREME 4.2 : L'équation

$$i\,\varepsilon\, J\, q_\varepsilon + Aq_\varepsilon = f$$

*admet, **quel** que soit* $\varepsilon \neq 0$ *, une solution unique* q_ε *. En outre, nous avons l'estimation*

$$\|q - q_\varepsilon\|_V \leqslant c\,\varepsilon\,\|q\|_V$$

où q *est la solution du problème*

$$Aq = f$$

orthogonale aux solutions de l'équation homogène

$$Aq = 0$$

Si, par contre, f *n'était pas orthogonal aux solutions de*

$$Aq = 0$$

nous aurions

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|q_\varepsilon\|_V = +\infty \quad .$$

Comme q_ε est aussi inaccessible que q , il nous faut définir une

3 - APPROXIMATION.

Nous avons tout d'abord un théorème abstrait :

THEOREME 4.3 : Soient V_h , A_h *, définis comme précédemment, et soit* $J_h \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ *une approximation de* J *vérifiant*

(H4) $$|(Jv_h, w_h) - (J_h v_h, w_h)_h| \leqslant c(h)\,\|v_h\|_V\,\|w_h\|_V \quad .$$

Supposons, en outre, que les hypothèses (H2) et (H3) soient satisfaites et que $\dfrac{c(h)}{\varepsilon}$ *soit suffisamment petit. Alors, nous avons l'estimation du Théorème 3.2 où* q, q_h, A, A_h, c, *sont remplacés respectivement par* q_ε, $q_{\varepsilon h}$, A_ε, $A_{\varepsilon h}$, $\dfrac{c}{\varepsilon}$.

Nous en déduisons aussitôt les analogues des Théorèmes 3.4 et 3.5, où q, $\tilde{q}_h$, u, u_h, c, sont remplacés par q_ε, $\tilde{q}_{\varepsilon h}$, u_ε, $u_{\varepsilon h}$, $\frac{c}{\varepsilon}$.

Nous voyons alors que

$$|u(y) - u_{\varepsilon h}(y)| \leqslant c\ \varepsilon\ \|q\| + \frac{0(h^\alpha)}{\varepsilon},$$

avec

$$\alpha = \inf\ (\ell+1,\ 2m+3),$$

ce qui nous donne l'ordre de grandeur optimal de ε

$$\varepsilon = 0(h^{\alpha/2}).$$

5 - CONCLUSION.

Le gros intérêt de cette méthode est la simplificité de sa mise en oeuvre. Cette simplicité provient du fait qu'elle ne fait pas intervenir la dérivée normale.

Le défaut de cette méthode, par contre, est d'introduire des valeurs propres parasites qui ne sont pas dans le problème initial. Pour éviter cette difficulté, d'autres méthodes ont été proposées [BW1], [KR1], [SC1], mais leur mise en oeuvre est plus difficile.

Pour une revue des diverses méthodes relatives à l'équation de Helmholtz, nous renvoyons à [CH1].

BIBLIOGRAPHIE.

[BA1] BAKUSHINSKII, A.B., Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz., 5, 4 (1965), 744-749.

[BW1] BRAKHAGE, H., WERNER, P., Arch. Math. (Basel), 16 (1965), 325-329.

[CH1] CHERTOCK, G., Naval Ship Research and Devopment Center. Ship Acoustics Department Report 3538 (1971).

[JA1] JÄGER, W., Math. Zeitschr., 102 (1967), 62-88.

[KR1] KLEINMAN, R.E., ROACH, G.F., SIAM Review, 16, 2 (1974).

[NE1] NEDELEC, J.C., Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 8 (1976), 61-80.

[NE2] NEDELEC, J.C., Cours de l'Ecole d'Eté d'Analyse Numérique, C.E.A.-I.R.I.A., E.D.F., (1977).

[NP1] NEDELEC, J.C., PLANCHARD, J., RAIRO, 7 (1973), R3, 105-129.

[SC1] SCHENCK, H.A., J. Acoust. Soc. Amer., 44 (1968), 41-58.

[SE1] SEELEY, R., Cours du C.I.M.E. de 1968, ed. Cremonese, Roma (1969).

[VL1] VLADIMIROV, V.S., Equations de la physique mathématique, Moscou (1971).