J. NOURRIGAT

Paramétrixes pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 5, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A5_0>

PARAMETRIXES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

J. Nourrigat

U.E.R. Mathématiques et Informatique
35000 RENNES

Introduction.

Dans cet article on construit des paramétrixes pour une classe d'opérateurs différentiels dont l'hypoellipticité a été démontrée par Bolley-Camus-Helffer [4]. Les opérateurs étudiés dans [4] sont elliptiques hors d'un hyperplan de R^n. Plus généralement nos résultats s'appliquent à des opérateurs vérifiant hors d'un hyperplan la condition usuelle de Hörmander [11] assurant l'existence d'une paramétrixe dans une classe $\mathcal{L}^{-\mu}_{\rho,\varepsilon}$. Les méthodes utilisées s'appliqueraient sans difficulté à des opérateurs pseudo-différentiels.

En notant (x,t) la variable de $R^n (x \in R^{n-1}, t \in R)$, nous écrirons les opérateurs étudiés sous la forme :

$$(0.1) \qquad P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t)\, t^{\ell(\alpha,j)}\, D_x^\alpha D_t^j$$

où $a_{\alpha j}$ est une fonction C^∞ et $\ell(\alpha,j)$ un entier ≥ 0.

Rappelons les résultats connus dans le cas où P est elliptique pour $t \neq 0$ et où la surface $t = 0$ est non caractéristique. L'étude de l'hypoellipticité des opérateurs (0.1) a été abordée dans le cas quasi-homogène où $\ell(\alpha,j) = \lceil -m + q|\alpha| + j \rceil$ (q est rationnel ≥ 1, $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier $\geq \sup(x,0)$) par Grušin [9] Trêves-Gilioli [8], Sjöstrand [14], Yamamoto [15], Boutet de Monvel-Trêves [7], puis dans le cas plus général où $\ell(\alpha,j) = \lceil \sigma + q|\alpha| + q'j \rceil$ ($\sigma \in \mathbb{Z}$, q et q' > 0) par Vishik-Grusin [10], Bolley-Camus-Helffer [2], [3], Rolland [13]. Certains de ces auteurs ont construit des paramètrixes pour les opérateurs quasi-homogènes en utilisant des symboles pseudodifférentiels à valeurs vectorielles. Notre démonstration s'inspire au contraire de Beals [1], Boutet de Monvel [5], Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6], qui ont construit, dans des classes d'opérateurs définies à l'aide de fonctions poids, des paramétrixes pour certains des opérateurs (0.1).

Bolley-Camus-Helffer [4], et Menikoff [12] pour les opérateurs d'ordre 2, ont donné une condition suffisante (et nécessaire si les $a_{\alpha j}$ sont constants) pour l'hypoellipticité avec régularité maximale des opérateurs (0.1) vérifiant l'hypothèse de convexité suivante : pour tout multi-indice (α,j) tel que $|\alpha| + j \leq m$, il existe λ_o, λ_1, $\lambda_2 \in [0,1]$ et deux multi-indices $(\alpha_1,0)$ et $(\alpha_2,0)$ tels que :

$$(0.2) \quad |t|^{\ell(\alpha,j)}|\xi|^{|\alpha|}|\tau|^j \leq c(|\tau|^m)^{\lambda_o}(|t|^{\ell(\alpha_1,0)}|\xi|^{|\alpha_1|})^{\lambda_1}(|t|^{\ell(\alpha_2,0)}|\xi|^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}$$

et $\lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Nous allons résumer ces conditions avec des notations différentes de [4]. On définit un $\Theta \in]0,1[$ par :

$$\Theta = \sup_{|\alpha|+j\leq m} \frac{|\alpha|}{\ell(\alpha,j)+m-j} ,$$

puis on définit un opérateur différentiel ordinaire $p_o(x,t,\xi,D_t)$ dépendant de $(x,\xi) \in R^{n-1} \times S^{n-2}$ par

(0.4) $$p_o(x,t,\xi,\tau) = \lim_{r\to\infty} r^{-m\Theta} p(x,tr^{-\Theta},\xi r, \tau r^{\Theta})$$

On suppose que pour tout $x \in R^{n-1}$ et pour tout $\xi \in S^{n-2}$ on a :

(0.5) $$\ker p_o(x,t,\xi,D_t) \cap \mathcal{S}(R) = 0$$

D'autre part, on donne dans [4] un ensemble de conditions dites d'ellipticité générale, qui sont équivalentes pour les opérateurs vérifiant (0.2) à la condition suivante : il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que :

(0.6) $$|t||\xi|^{\Theta}+|\tau||\xi|^{-\Theta}>A \Rightarrow |p(x,t,\xi,\tau)| \geq c \sum_{|\alpha|+j\leq m} |t|^{\ell(\alpha,j)}|\xi|^{|\alpha|}|\tau|^{j}$$

Les conditions données dans [4] sont plus explicites et leur équivalence avec (0.6) est montrée sur des exemples au § 5.

Le but de ce travail est de montrer que, sous l'hypothèse (0.5) et sous des hypothèses un peu plus générales que (0.2) et (0.6), l'opérateur P admet une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-m\Theta}_{\Theta,\Theta}(\Omega)$, et donc est hypoelliptique avec perte de $m(1-\Theta)$ dérivées.

Les hypothèses (0.2) et (0.6) sont remplacées par l'hypothèse suivante : il existe $A > 0$ tel que, pour tout multiindice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ et pour tout compact K, il existe $C > 0$ tel que l'on ait, en posant $r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2}$:

(0.7) $$|\partial^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}\partial^{\gamma}_{\xi}\partial^{\delta}_{\tau} p(x,t,\xi,\tau)| \leq c|p(x,t,\xi,\tau)|(|t|+r^{-\Theta})^{-\beta}r^{-|\gamma|}(|\tau|+r^{\Theta})^{-\delta}$$

(0.8) pour tout $(x,t) \in K$ et pour tout $r > 0$ tels que $|t|r^{\Theta} + |t|r^{-\Theta} > A$, on a $|p(x,t,\xi,\tau)| \geq c\, r^{m\Theta}$

En faisant des hypothèses très voisines, on retrouve aussi l'hypoellipticité, démontrée dans [4], d'une classe d'opérateurs pour lesquels la surface t = 0 est caractéristique. Un exemple est donné au § 5.

Pour construire ces paramétrixes, on étudie une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur R^n dont les symboles vérifient des majorations analogues à (0.7). Ces classes, incluses dans $\mathcal{L}^{-m}_{\Theta,\Theta}$ sont donc définies à l'aide de fonctions poids au sens de Beals [1], mais les fonctions choisies :

(0.9) $$\phi = |\tau| + r^{\Theta} \qquad \varphi = |t| + r^{-\Theta} \qquad (^*)$$

ne vérifient pas l'une des hypothèses de [1], ce qui nous conduit au § 2 à démontrer un résultat sur la composition de ces opérateurs. D'autre part, pour utiliser l'inversibilité de l'opérateur $p_o(x,t,\xi,D_t)$, nous employons des techniques voisines de celles de Boutet de Monvel [5] et Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6].

Le § 1 énonce les résultats de manière plus précise. Le § 2 étudie la classe d'opérateurs pseudo-différentiels utilisée. Au § 3 on construit la paramétrixe. L'existence d'un inverse à gauche dépendant de manière C^{∞} de (x,ξ) pour $p_o(x,t,\xi,D_t)$ est démontrée au § 4. Le § 5 donne des exemples.

(*) R. Beals nous a communiqué qu'une modification apportée récemment aux définitions des fonctions poids permet maintenant d'appliquer son théorème de composition aux classes d'opérateurs pseudo-différentiels que nous utilisons.

I - Enoncé des résultats.

Soient Ω_1 un ouvert de R^{n-1}, $T > 0$, et $\Omega = \Omega_1 \times [-T,T]$. On notera (x,t) la variable de Ω ($x \in \Omega_1$ et $t \in [-T,T]$), et (ξ,τ) la variable duale.

On considère un opérateur différentiel P sur Ω, que nous écrirons :

(1.1) $$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t)\, t^{\ell(\alpha,j)}\, D_x^\alpha\, D_t^j$$

où m et les $\ell(\alpha,j)$ sont des entiers ≥ 0, et $a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega)$.

Soient d'autre part $\mu \in R$ et $\Theta \in]0,1[$. Le but de ce travail est de donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une paramétrixe à gauche pour P dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{\Theta,\Theta}(\Omega)$, ce qui entraînera l'hypoellipticité de P avec perte de $m-\mu$ dérivées.

On définit un opérateur différentiel ordinaire $p_o(x,t,\xi,D_t)$ dépendant du paramètre $(x,\xi) \in \Omega_1 \times S^{n-2}$ en posant :

(1.2) $$p_o(x,t,\xi,\tau) = \lim_{r\to\infty} r^{-\mu}\, p(x,tr^{-\Theta}, \xi r, \tau r^{\Theta}).$$

Pour assurer l'existence de cette limite et pour qu'elle ne soit pas identiquement nulle, nous sommes amenés à choisir :

(1.3) $$\mu = \sup_{(\alpha,j)} \{|\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$$

Désignons par I l'ensemble des multi-indices (α,j) où le sup est atteint dans (1.3)

(1.4) $$I = \{(\alpha,j) \mid |\alpha| + j \leq m,\ |\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j) = \mu\}.$$

On a :

(1.5) $$p_o(x,t,\xi,\tau) = \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)t^{\ell(\alpha,j)}\ \xi^\alpha\ \tau^j$$

On fait l'hypothèse suivante :

(H1) Pour tout $(x,\xi) \in \Omega_1 \times S^{n-2}$ l'opérateur $p_o(x,t,\xi,D_t)$ est injectif dans $\mathcal{S}(R)$.

Enonçons maintenant les hypothèses sur le symbole de P.

Posons :

(1.6) $$r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2} ;$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H2) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, on ait (avec $C > 0$)

(1.7) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta p(x,t,\xi,\tau)| \leq c|p(x,t,\xi,\tau)|(|t|+r^{-\Theta})^{-\beta} r^{-|\gamma|}(|\tau|+r^\Theta)^{-\delta}$$

si $(x,t) \in K$ et $|t|\ r^\Theta + |\tau|\ r^{-\Theta} \geq A$.

(H3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que

(1.8) $$|p(x,t,\xi,\tau)| \geq C\ r^\mu$$

si $(x,t) \in K$ et $|t|\ r^\Theta + |\tau|\ r^{-\Theta} \geq A$

Nous pouvons énoncer le résultat principal :

<u>Théorème 1</u>. Soit P un opérateur différentiel de la forme (1.1). On suppose qu'il existe $\mu \in R$ et $\Theta \in]0,1[$, liés par (1.3), tels que les hypothèses H1, H2 et H3 soient vérifiées. Alors P admet une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{\Theta,\Theta}(\Omega)$.

Sous ces hypothèses, P est donc hypoelliptique avec perte de m-μ dérivées. Mais les hypothèses précédentes n'assurent pas la régularité maximale. Pour obtenir celle-ci, nous ferons l'hypothèse suivante :

(H'3) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que

(1.9) $$|p(x,t,\xi,\tau)| \geq C \sum_{|\alpha|+j\leq m} (|t|+r^{-\Theta})^{\ell(\alpha,j)} \, r^{|\alpha|} \, (|\tau|+r^{\Theta})^{j}$$

si $(x,t) \in K$ et $|t| \, r^{\Theta} + |\tau| \, r^{-\Theta} \geq A$.

L'hypothèse H'3 est plus forte que H3 puisque le second membre de (1.9) est supérieur à r^{μ}. On verra (proposition 2.1) que l'hypothèse (H'3) implique aussi H2. Les hypothèses H1 et H'3 suffisent donc à assurer l'existence d'une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-\mu}_{0,0}(\Omega)$. On a en plus le résultat de régularité maximale suivant :

Théorème 2. Soient P un opérateur différentiel de la forme (1.1), μ un nombre réel et $\Theta \in]0,1[$, liés par (1.3), tels que les hypothèses H1 et H'3 soient vérifiées. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a l'implication :

(1.10) $$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } Pu \in H^s_{loc}(\Omega) \Longrightarrow t^{\ell(\alpha,j)} D^{\alpha}_x \, D^{j}_t u \in H^s_{loc}(\Omega)$$

si $|\alpha| + j \leq m$.

II - Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels.

On reprend les notations du § I. On pose $r = (|\xi|^2 + \tau^2)^{1/2}$. Soit $\Theta \in [0,1]$.

Définition 2.1. On désigne par $\mathfrak{S}_{\Theta}$ l'ensemble des fonctions $M(x,t,\xi,\tau)$ continues sur $T^* \Omega$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que

(2.1) $$0 \leq M(x,t,\xi,\tau) \leq C(1+r)^m$$

ii) Pour tout compact $K \subset \Omega \times \Omega$, pour tout $C_1 > 0$, il existe

$C > 0$ et $\ell \geq 0$ tels que, si $(x,t,x',t') \in K$ et si :

(2.2) $$C_1^{-1} \leq \frac{|\xi'|^2 + \tau'^2}{|\xi|^2 + \tau^2} \leq C_1$$

on ait :

(2.3) $$C^{-1}\, g^{-\ell} \leq \frac{M(x',t',\xi',\tau')}{M(x,t,\xi,\tau)} \leq C\, g^{\ell}$$

où l'on pose

(2.4) $$g = 1 + |t-t'|\, r^{\Theta} + |\tau-\tau'|\, r^{-\Theta}$$

Notons que $\mathcal{S}_\Theta$ est stable par addition, multiplication, élévation à une puissance réelle. Il contient la fonction r et les fonctions suivantes :

(2.5) $$\phi = (1 + |\tau|^2 + r^{2\Theta})^{1/2},\quad \varphi = (t^2 + r^{-2\Theta})^{1/2},\quad \Psi = \phi\varphi$$

et par conséquent tous les polynômes en r, ϕ, φ , tels que :

(2.6) $$M = \sum_{|\alpha|+j \leq m} r^{|\alpha|}\, \phi^{j}\, \varphi^{\ell(\alpha,j)}$$

En particulier toutes les fonctions $r^{\mu}\ \Psi^{k}$ (μ et k réels) sont dans $\mathcal{S}_\Theta$.

Définition 2.2. Pour tous $\Theta \in \left]0,1\right[$ et $M \in \mathcal{S}_\Theta$, on désigne par $S_\Theta^M(\Omega)$ l'espace de Fréchet des fonctions $a(x,t,\xi,\tau)$ C^∞ sur $T^*\,\Omega$ telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, on ait :

(2.7) $$|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta\, a(x,t,\xi,\tau)| \leq c\, M(x,t,\xi,\tau)\, (1+r)^{-|\gamma|}\, \phi^{-\delta}\, \varphi^{-\beta}$$

pour tout $(x,t,\xi,\tau) \in K \times R^n$ (avec $c > 0$). Dans le cas où $M = r^{\mu}\ \Psi^{k}$ (μ et k réels) la classe $S_\Theta^M(\Omega)$ sera notée $S_\Theta^{\mu,k}(\Omega)$. On écrira S_Θ^M et $S_\Theta^{\mu,k}$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Exemple. Soit un polynôme différentiel :

(2.8) $$p(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t,)\ t^{\ell(\alpha,j)}\ \xi^\alpha\ \tau^j.$$

Soient $\Theta \in]0,1[$ et

(2.9) $$\mu = \sup_{(\alpha,j)} (|\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)) \qquad k = \sup_{(\alpha,j)} (j+\ell(\alpha,j))$$

Soient M la fonction définie par (2.6) et $p_o(x,t,\xi,\tau)$ le polynôme défini par :

$$p_o(x,t,\xi,\tau) = \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)\ t^{\ell(\alpha,j)}\ \xi^\alpha\ \tau^j$$

où $I = \{(\alpha,j) \mid |\alpha| + j \leq m$ et $\mu = |\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$. On a :

Proposition 2.1. Avec les notations ci-dessus, on a pour tout (α,j) $t^{\ell(\alpha,j)}\ \xi^\alpha\ \tau^j \in S_\Theta^M$, donc $p \in S_\Theta^M \subset S_\Theta^{\mu,k}$. De plus il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p-p_o \in S_\Theta^{\mu-\varepsilon,k+1}$.

Démonstration. On voit que $t \in S_\Theta^\varphi$, que $\tau \in S_\Theta^\phi$, que $\xi_j \in S_\Theta^r$, et que $a \in S_\Theta^M$ et $b \in S_\Theta^{M'}$ (M et $M' \in \mathcal{O}_\Theta$) entraînent $ab \in S_\Theta^{MM'}$. De plus S_Θ^M est un espace vectoriel et l'inégalité $M' \leq M$ (M et $M' \in \mathcal{O}_\Theta$) entraîne $S_\Theta^{M'} \subset S_\Theta^M$.

La première affirmation résulte donc de l'inégalité :

$$r^{|\alpha|}\ \phi^j\ \ \ \ell(\alpha,j) \leq M \leq c\ r^\mu\ \psi^k,$$

qui résulte elle-même de

$$\varphi \leq r^{-\Theta}\psi\ ;\ \phi \leq r^\Theta\psi\ \ ;\ |\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j) \leq \mu.$$

Pour la deuxième affirmation, on peut écrire :

$$p - p_o = \sum_{|\alpha|+j\leq m} b_{\alpha j}(x,t)\ t^{m(\alpha,j)}\ \xi^\alpha\ \tau^j$$

où l'on pose :

si $(\alpha,j) \notin I$, $b_{\alpha j}(x,t) = a_{\alpha j}(x,t)$ et $m(\alpha,j) = \ell(\alpha,j)$

$$\text{si } (\alpha,j) \in I,\ b_{\alpha j}(x,t) = \frac{a_{\alpha j}(x,t) - a_{\alpha j}(x,0)}{t} \quad \text{et } m(\alpha,j) = \ell(\alpha,j)+1$$

On vérifie alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_{(\alpha,j)} (|\alpha| + \Theta j - \Theta m(\alpha,j)) = \mu - \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{(\alpha,j)} (j + m(\alpha,j)) \leq k+1$$

et le calcul précédent montre que $p - p_o \in S_\Theta^{\mu-\varepsilon,k+1}$.

Puisque M vérifie (2.1), on a l'inclusion :

$$S_\Theta^M(\Omega) \subset S_{\Theta,\Theta}^m(\Omega)$$

où $S_{\lambda,\delta}^m(\Omega)$ désigne la classe usuelle de symboles introduite par L. Hörmander [11] . On sait qu'à tout symbole $a \in S_{\Theta,\Theta}^m(\Omega)$, on peut associer un opérateur $a(x,t,D_x,D_t) = C_o^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ défini pour tout $f \in C_o^\infty(\Omega)$ par :

$$(2.10) \qquad a(x,t,D_x,D_t)f(x,t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x.\xi + t\tau)} a(x,t,\xi,\tau) \hat{f}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau .$$

Désignons par $OPS^M(\Omega)$ l'ensemble des opérateurs $a(x,t,D_x,D_t) + R$, où $a(x,t,\xi,\tau) \in S_\Theta^M(\Omega)$ et R est à noyau C^∞. Il résulte de [11] et [1] que, si $A \in OPS_\Theta^M(\Omega)$ et si M vérifie (2.1), A se prolonge en un opérateur :

$$(2.11) \qquad A = H_{loc}^s(\Omega) \longrightarrow H_{loc}^{s-m}(\Omega)$$

On a le résultat suivant sur la composition des opérateurs :

<u>Proposition 2.2</u>. Soient $a \in S_\Theta^M$ et $b \in S_\Theta^{M'}$ tels que $b(x,t,\xi,\tau) = 0$ si $(x,t) \notin K$, où K est un compact de Ω. Alors il existe $c \in S_\Theta^{MM'}(\Omega)$ tel que $a(x,t,D_x,D_t) \circ b(x,t,D_x,D_t) = c(x,t,D_x,D_t)$. De plus, pour tout entier N, on a :

$$(2.12) \qquad (a,b) = c(x,t,\xi,\tau) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi,\tau}^\alpha a)(\partial_{x,t}^\alpha b) \in S_\Theta^{MM'\Psi^{-N}}(\Omega)$$

Démonstration. On a classiquement, si $a \in S^m_{\Theta,\Theta}$ et $b \in S^{m'}_{\Theta,\Theta}$ vérifient a condition sur le support : $a(x,D) \circ b(x,D) = c(x,D)$, où $c(x,t,\xi,\tau)$ est donné par :

$$c(x,t,\xi,\tau) =$$
$$=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-x').(\xi-\xi')-i(t-t')(\tau-\tau')} a(x,t,\xi',\tau')b(x',t',\xi,\tau)dx'd\xi'dt'd\tau'$$

(l'intégrale étant prise au sens des intégrales oscillantes). Nous poserons :

$$h = -(x-x').(\xi-\xi') - (t-t')(\tau-\tau')$$

et, pour toute fonction $f(x,x',t,t',\xi,\xi',\tau,\tau')$ telle que l'intégrale oscillante ait un sens, posons :

$$I(f)(x,t,\xi,\tau) = (2\pi)^{-n} \int e^{ih} f \; dx' \; dt' \; d\xi' \; d\tau' \tag{2.13}$$

Pour tout N ou peut écrire en utilisant la formule de Taylor

$$r_N(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\nu|=N} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 I(f_{\nu,\lambda}) \, d\lambda$$

où l'on pose : pour tout multi-indice ν et pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$f_{\nu,\lambda} = D^{\nu}_{\xi,\tau} a(x,t,\xi_\lambda,\tau_\lambda) \, \partial_{x',t'} b(x',t',\xi,\tau) \tag{2.14}$$

et

$$\xi_\lambda = \xi + \lambda(\xi' - \xi) \qquad \tau_\lambda = \tau + \lambda(\tau' - \tau)$$

Examinons les majorations vérifiées par les $f_{\nu,\lambda}$ dans R^{4n} et en particulier dans toute région définie par une inégalité de la forme (2.2).

Lemme 2.1. Pour tout compact $K \subset \Omega \times \Omega$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha',\beta',\gamma',\delta')$, pour tout multi-indice ν tel que $|\nu| = N$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_t \partial^\gamma_\xi \partial^\delta_\tau \partial^{\alpha'}_{x'} \partial^{\beta'}_{t'} \partial^{\gamma'}_{\xi'} \partial^{\delta'}_{\tau'} f_{\nu\lambda}| \leq C(1+r+r')^{m+m'+\Theta(|\beta|+|\beta'|)} \tag{2.15}$$

pour tout $(x,t,x',t') \in K$, et pour tous r et $r' > 0$. On a posé $r' = (|\xi'|^2 + \tau'^2)^{1/2}$. De plus, dans toute région définie par une inégalité telle que (2.2), avec $C_1 > 0$, il existe $C > 0$ et $\ell \geq 0$ tels que :

$$(2.16)\quad |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta \partial_{x'}^{\alpha'} \partial_{t'}^{\beta'} \partial_{\xi'}^{\gamma'} \partial_{\tau'}^{\delta'} f_{\nu\lambda}| \leq c[MM'\psi^{-N} r^{-|\gamma|} \phi^{-\delta} \varphi^{-\beta}] . g^\ell . r^{-|\gamma'|+\Theta(\beta'-\delta')}$$

<u>Démonstration du lemme 2.1.</u> L'estimation (2.15) est toujours vérifiée pour tous symboles $a \in S^m_{o,\Theta}$ et $b \in S^{m'}_{o,\Theta}$, si $\Theta < 1$. Pour vérifier (2.16) posons $\nu = (\nu',\nu'')$ (ν'' correspond à la variable t). Majorons d'abord le second facteur de (2.14) :

$$(2.17)\quad |\partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta \partial_{x'}^{\alpha'} \partial_{t'}^{\beta'} \partial_{x'}^{\nu'} \partial_{t'}^{\nu''} b(x',t',\xi,\tau)| \leq c[M'\phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-\nu''}](x',t',\xi,\tau) r^{\Theta\beta'}$$

Puisque les fonctions M', ϕ, r et φ sont dans $\mathfrak{S}_\Theta$, il en est de même du second membre de (2.17). Il existe donc ℓ_2 tel que :

$$[M' \phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-\nu''}](x',t',\xi,\tau) \leq c\, g^{\ell_2} [M' \phi^{-\delta} r^{-|\gamma|} \varphi^{-\nu''}](x',t',\xi,\tau)$$

On majore de même le premier facteur de (2.14). Pour obtenir (2.16) on remarque enfin que :

$$r \geq \psi = \phi\, \varphi \geq 1,$$

ce qui démontre le lemme 1.

On choisit maintenant une fonction de troncature $\chi(\xi,\tau,\xi',\tau') \in S^o$, telle que :

$$\chi = 1 \text{ si } r \leq 2\ (1 + |\xi-\xi'| + |\tau-\tau'|)$$

$$\chi = 0 \text{ si } r \geq 3\ (1 + |\xi-\xi'| + |\tau-\tau'|)$$

Le lemme suivant est classique :

Lemme 2.2. Si f vérifie (2.15), on a $I(\chi f) \in S^{-\infty}$.

Nous en rappelons néanmoins la démonstration. Les dérivées $\partial^{\alpha}_{x,t}\,\partial^{\beta}_{\xi,\tau}\,\chi f$ vérifient aussi (2.15), $m + m'$ étant remplacé par un autre exposant. Il suffit donc de majorer $I(\chi f)$ lui-même. Pour ce lemme, il est inutile de distinguer la variable t ; désignons donc par x la variable de Ω. Posons :

$$L = (1 + |\xi-\xi'|^2)^{-1}\,(1 - \Delta_{x'})$$

On a $L(e^{ih}) = e^{ih}$ donc, pour tout entier M

$$I(\chi f) = I(({}^tL)^M\,\chi f)$$

Si f vérifie (2.15), on a, pour tous compacts K et K' de Ω

$$|({}^tL)^M\,\chi f(x,x',\xi,\xi')| \leq c(1+|\xi-\xi'|^2)^{-M}(1+|\xi|+|\xi'|)^{m+m'+2\Theta M}$$

si $x \in K$ et $x' \in K'$, d'où :

$$|I(\chi f)|(x,\xi) \leq c \iint_D (1+|\xi-\xi'|^2)^{-M}(1+|\xi|+|\xi'|)^{m+m'+2\Theta M}\,dx'd\xi'.$$

L'intégrale porte sur le domaine $D = \{x' \in K',\ |\xi-\xi'| \geq \frac{1}{2}|\xi|\}$. En utilisant $\Theta < 1$, on en déduit pour tout entier N une majoration de la forme $|I(f)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}$, d'où le lemme 2.2.

Majorons maintenant $I((1-\chi)f_{\nu\lambda})$. Dans le support de $(1-\chi)f_{\nu\lambda}$, où une inégalité analogue à (2.2) est vérifiée, on utilise les majorations (2.16). Il nous suffit donc de démontrer :

Lemme 2.3. Soit $f(x,t,\xi,\tau,x',t',\xi',\tau')$ une fonction C^{∞} sur R^{4n} dont le support est inclus dans

(2.18) $\{(x,t,\xi,\tau,x',t',\xi',\tau')\,|\,(x,t,x',t')\in K,\ 1+|\xi-\xi'| + |\tau-\tau'| \leq \frac{1}{2}r\}$

où K est un compact de $\Omega \times \Omega$. On suppose qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que :

$$(2.19)\qquad |\partial^{\alpha}_{x'}\partial^{\beta}_{t'}\partial^{\gamma}_{\xi'}\partial^{\delta}_{\tau'} f| \leq c\, g^{\ell}\, r^{-|\gamma|+\Theta(\beta-\delta)}$$

g étant définie par (2.4). Alors l'intégrale I(f) est bornée.

Démonstration. Considérons maintenant l'opérateur différentiel :

$$L = (1+|\xi-\xi'|^2 + |\tau-\tau'|^2 r^{-2\Theta} + |t-t'|^2 r^{2\Theta})^{-1}(1-\Delta_{x'}-r^{-2\Theta}\partial^2_{t'}-r^{2\Theta}\partial^2_{\tau'})$$

Cet opérateur vérifie aussi $L(e^{ih}) = e^{ih}$ d'où $I(f) = I(({}^tL)^M f)$ pour tout entier M. Or d'après (2.16)

$$|({}^tL)^M f| \leq c\, (1+|\xi-\xi'|^2 + |\tau-\tau'|^2 r^{-2\Theta} + |t-t'|^2 r^{2\Theta})^{\frac{\ell}{2}-M}$$

En choisissant M assez grand, l'intégrale

$$\int (1+|\xi-\xi'|^2 + |\tau-\tau'|^2 r^{-2\Theta} + |t-t'|^2 r^{2\Theta})^{\frac{\ell}{2}-M}\, dx'\, dt'\, d\xi'\, d\tau'$$

converge et est indépendante de r (x décrit un compact). La proposition 2.2 est donc démontrée.

On a pour les opérateurs adjoints le résultat suivant :

Proposition 2.3. Si $A \in OPS^M_\Theta(\Omega)$, alors $A^* \in OPS^M_\Theta(\Omega)$.

Pour les sommations, on a la proposition suivante :

Proposition 2.4. Soit $\mu \in R$, et pour tout $j \in N$, soit $a_j \in S^{\mu,-j}_\Theta$. Alors il existe $a \in S^{\mu,0}_\Theta$ tel que pour tout n

$$a - \sum_{j<N} a_j \in S^{\mu,-N}_\Theta$$

Démonstration. On suit la démonstration de Beals [1]. On voit que :

$$|D^\beta_t D^\gamma_\xi D^\delta_\tau \phi| \leq c\, \phi^{1-\delta} \varphi^{-\beta} r^{-|\gamma|}$$

$$|D^\beta_t D^\gamma_\xi D^\delta_\tau \phi| \leq c\, \phi^{-\delta} \varphi^{1-\beta} r^{-|\gamma|}$$

Soit $\chi(t) \in C^\infty(R)$ égale à 0 si $t \leq 1$ et à 1 si $t \geq 2$. Posons pour

$R > 0$

$$\chi_R(x,t,\xi,\tau) = \chi(\frac{\Psi}{R}) = \chi(\frac{\phi\varphi}{R})$$

On a $(1-\chi R) \in \bigcap_j S_\Theta^{o,-j}$, et $R\chi_R$ est borné dans $S_\Theta^{o,1}$, car :

$$|D_x^\alpha \, D_t^\beta \, D_\xi^\gamma \, D_\tau^\delta \, \chi_R| \leq \frac{C}{R} \phi^{1-\delta} \varphi^{1-\beta} r^{-|\gamma|}$$

Si $a \in S_\Theta^{\mu,-j}$, $(R\chi_R \; a)$ est donc borné dans $S_\Theta^{\mu,1-j}$. On peut donc choisir une suite $R_j \to \infty$ telle que pour tout N la série $\sum_N^\infty \chi_{R_j} \; a_j$ converge dans $S_\Theta^{\mu,-N}$, d'où la proposition 2.4.

III - Construction de paramétrixes.

On considère un polynôme différentiel :

(3.1) $$p(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t) \, t^{\ell(\alpha,j)} \, \xi^\alpha \, \tau^j$$

On a vu (proposition 2.1) que, pour tout $\Theta \in]0,1[$, on a $p \in S_\Theta^{\mu,k}$, où μ et k sont définis par :

(3.2) $$\mu = \sup_{(\alpha,j)} \; (|\alpha| + \Theta j - \Theta \ell(\alpha,j)) \qquad k = \sup \; (j + \ell(\alpha,j))$$

Nous suivons la méthode de [5] en construisant la paramétrixe en deux étapes. La première étape n'utilise que les hypothèses dites "d'ellipticité générale" H2 et H3. Ces hypothèses H2 et H3 correspondent à l'hypothèse d'ellipticité transversale faite dans [5]. Nous allons écrire ces hypothèses avec les notations du § II. On suppose qu'il existe $\Theta \in]0,1[$ tel que, μ étant défini par (3.2), on ait :

(H2) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ on ait :

(3.3) $|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta \, p(x,t,\xi,\tau)| \leq c \, |p(x,t,\xi,\tau)| \, \varphi^{-\beta} \, r^{-|\gamma|} \, \phi^{-\delta}$

si $(x,t) \in K$ et $\Psi \geq A$

(H3) Il existe $M \in \mathcal{C}_\Theta$ tel que :

(3.4) $$|p(x,t,\xi,\tau)| \geq M(x,t,\xi,\tau) \geq c \, r^\mu$$

si $\Psi \geq A$

Dans le cas où $M = r^\mu$ cette hypothèse nous permettra de démontrer l'hypoellipticité avec perte de $m-\mu$ dérivées, et dans le cas :

(3.5) $$M = \sum_{|\alpha|+j \leq m} \varphi^{\ell(\alpha,j)} \, r^{|\alpha|} \, \phi^j$$

cette hypothèse nous donnera la régularité maximale (ce cas correspond à l'hypothèse H'3 du § I).

La proposition suivante constitue la première étape de la construction de la paramétrixe. Elle est formellement identique à la construction du Hörmander [11].

Proposition 3.1. Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\Theta \in \left]0,1\right[$, et $P \in OPS_\Theta^{\mu,k}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{C}_\Theta$ tel que les hypothèses H2 et H3 soient vérifiées. Alors il existe $Q \in OPS_\Theta^{M^{-1}}$ tel que :

(3.6) $$QP = I + R_1 \qquad PQ = I + R_2$$

où $R_j \in \bigcap_N S_\Theta^{o,-N}$ $(j = 1,2)$.

Démonstration. On va chercher le symbole q de Q sous forme d'un développement asymptotique $q \sim \sum_0^\infty q_j$, où $q_j \in S_\Theta^{M^{-1}\gamma^{-j}}$. Pour former q_o, choisissons une fonction $\chi(u) \in C^{\infty}(R)$ égale à 0 si $u \leq A+1$ et à 1 si $u \geq A+2$. Posons :

$$q_o = \chi(\Psi)\, p^{-1}$$

Comme $\chi(\Psi) \in S_\Theta^{o,o}$ (d'après la démonstration de la proposition 2.4), on a bien $q_o \in S_\Theta^{M^{-1}}$. On définit ensuite les q_j par la relation de récurrence :

$$q_k = -\frac{1}{p} \sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha_{\xi,\tau}\, q_j)\, (\partial^\alpha_{x,t}\, p)$$

Comme tous les q_k ont leur support inclus dans $\{\Psi \geq A\}$ on vérifie par récurrence que $q_k \in S_\Theta^{M^{-1}\,\Psi^{-k}}$. La proposition 2.4 assure l'existence d'un $q \in S_\Theta^{M^{-1}}$ tel que pour tout N,

$$q - \sum_0^{n-1} q_j \in S_\Theta^{M^{-1}\Psi^{-N}}$$

Vérifions que $(q \circ p) - 1 \in \bigcap_j S_\Theta^{o,-j}$. Soit N arbitraire. On a :

$$(q \circ p) - 1 = \sum_{j=0}^{N+k-1} (q_j \circ p) - 1 + (q - \sum_{j=0}^{N+k-1} q_j) \circ p$$

Le second terme est dans $S_\Theta^{o,-N}$ (puisque $p \in S_\Theta^{\mu,k}$ et

$q - \sum_{j=0}^{N+k-1} q_j \in S_\Theta^{-\mu,-N-K}$).

D'après la proposition 2.2. :

$$q_j \circ p - \sum_{|\alpha|<N+k-j} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha_{\xi,\tau} q_j)(\partial^\alpha_{x,t}\, p) \in S_\Theta^{o,-N}$$

D'autre part, d'après la construction des q_j :

$$1 - \sum_{|\alpha|+j<N+K} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha_{\xi,\tau}\, q_j)(\partial^\alpha_{x,t} p) = 1 - q_o p = 1 - \chi(\Psi) \in \bigcap_j S_\Theta^{0,-j}$$

ce qui démontre la proposition.

Cette proposition nous amène à étudier les opérateurs de $\bigcap_j OPS_\Theta^{\mu,-j}(\Omega)$, qui ne sont pas régularisants dans Ω, mais seulement dans le complémentaire de l'hyperplan $t = 0$ dans Ω. La proposition 3.1 permet donc la réduction à la surface $t = 0$, $\tau = 0$.

On posera, pour tout réel μ, $\mathcal{H}_\Theta^\mu = \bigcap_j S_\Theta^{\mu,-j}$ et $OP\mathcal{H}_\Theta^\mu = \bigcap_j OPS_\Theta^{\mu,-j}$.

La classe $\mathcal{H}_\Theta^\mu$ correspond à la classe des opérateurs de Hermite introduite dans [5].

On a $a \in \mathcal{H}_C^\mu$ si et seulement si pour tout entier N, sur tout compact, et pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ il existe $C > 0$ tel que :

(3.7) $|\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \partial_\xi^\gamma \partial_\tau^\delta a| \leq C(1 + |t| r^\Theta + |\tau| r^{-\Theta})^{-N}(1+r)^{\mu-|\gamma|+\Theta(\beta-\delta)}$

Cela résulte de :

$$\Psi \geq (1 + |t| r^\Theta + |\tau| r^{-\Theta}) \geq C \Psi^{1/2},\ r^\Theta \leq \frac{\Psi}{\varphi},\ r^{-\Theta} \leq C \frac{\Psi}{\varphi}$$

D'après les propositions 2.2 et 2.3, si $A \in OPS_\Theta^{\mu,k}$ et $B \in OP\mathcal{H}_\Theta^{\mu'}$, on a $A \circ B$ et $B \circ A \in OP\mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'}$ et $B^* \in OP\mathcal{H}_\Theta^{\mu'}$.

Nous donnerons un résultat plus précis pour la composition de A et B lorsque A est un opérateur différentiel de la forme :

$$A(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t)\, t^{\ell(\alpha,j)} D_x^\alpha D_t^j$$

avec $\mu = \sup\{|\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$, et $B \in OP\mathcal{H}_\Theta^{\mu'}$ de symbole $b(x,t,\xi,\tau)$.

Posons :

$$I = \{(\alpha,j) \mid \mu = |\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$$

et

(3.8) $$a_o(x,t,\xi,\tau) = \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)\, t^{\ell(\alpha,j)}\, \xi^\alpha\, \tau^j.$$

<u>Proposition 3.2.</u> Avec les notations ci-dessus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le symbole a o b de A o B vérifie :

(3.9) $$a \circ b(x,t,\xi,\tau) - e^{it\tau}\, a_o(x,t,\xi,D_t)\left[e^{it\tau} b(x,t,\xi,\tau)\right] \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'-\varepsilon}$$

<u>Démonstration.</u> On a vu (proposition 2.1) que $a - a_o \in S_\Theta^{\mu-\varepsilon,k}$ (avec ε et k convenables). D'où $(a - a_o) \circ b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'-\varepsilon}$. Pour $a_o \circ b$ on a la formule exacte :

(3.10) $$a_o \circ b(x,t,\xi,\tau) = e^{it\tau} \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)\, t^{\ell(\alpha,j)} D_\tau^j (\xi+D_x)^\alpha \left[e^{it\tau} b\right]$$

Il résulte de (3.7) que si $b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu'}$ on a :

(3.11) $$e^{it\tau}\, b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu'},\quad D_x^\alpha\, b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu'},\quad \xi^\alpha\, b \in \mathcal{H}^{\mu'+|\alpha|},\quad D_t^j b \in \mathcal{H}^{\mu'+\Theta j}$$
$$t^\ell\, b \in \mathcal{H}^{\mu'-\Theta\ell}$$

Si l'on développe $(\xi + D_x)^\alpha$ dans (3.10), on obtient une somme de terme de la forme

$$e^{-it\tau} \sum_{|\alpha'|+|\alpha''|+\Theta j-\Theta\ell} b_{\alpha j}\, t^{\ell(\alpha,j)}\, D_t^j\, \xi^{\alpha'} D_x^{\alpha''} \left|e^{it\tau}\, b\right|$$

D'après (3.11), ces termes dont dans $\mathcal{H}_\Theta^{\mu'+|\alpha'|+\Theta j-\Theta\ell(\alpha,j)} = \mathcal{H}_\Theta^{\mu'+\mu-|\alpha''|}$

Les termes correspondant à $\alpha'' \neq 0$ sont dans $\mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'-1}$. Les termes correspondant à $\alpha'' = 0$ forment bien le second terme de (3.9).

On en déduit aussitôt, par passage à l'adjoint :

<u>Corollaire.</u> Avec les notations ci-dessus, la symbole b o a vérifie :

(3.12) $$(b\circ a)(x,t,\xi,\tau) - e^{it\tau}\, b(x,t,\xi,D_t)\left[e^{it\tau}\, a_o(x,t,\xi,\tau)\right] \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'-\varepsilon}$$

$$(3.13)\qquad a \underset{t}{o} b(x,t,\xi,\tau) = e^{-it\tau}\, a(x,t,\xi,D_t)\, [e^{it\tau}\, b(x,t,\xi,\tau)]$$

On a :

$$a(x,t,\xi,D_t) \circ b(x,t,\xi,D_t) = a \underset{t}{o} b(x,t,\xi,D_t).$$

On vérifie avec les mêmes calculs que pour la proposition 2.2, que :

$$a \in S_\Theta^{\mu,k} \quad b \in S_\Theta^{\mu',k'} \Longrightarrow a \underset{t}{o} b \in S_\Theta^{\mu+\mu',k+k'}$$

donc

$$(3.14)\qquad a \in S_\Theta^{\mu,k} \quad b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu'} \Longrightarrow a \underset{t}{o} b \in \mathcal{H}_\Theta^{\mu+\mu'}$$

Montrons maintenant que l'on peut achever la construction de la paramétrixe à l'aide de la proposition suivante, que nous démontrerons au § IV.

<u>Proposition 3.3.</u> Sous les hypothèses du théorème 1, l'opérateur différentiel ordinaire $p_o(x,t,\xi,D_t)$ admet un inverse à gauche $a(x,t,\xi,D_t)$, où $a(x,t,\xi,\tau) \in S_\Theta^{-\mu,o}$.

<u>Fin de la démonstration du théorème 1.</u> Posons :

$$(3.15)\qquad q_1(x,t,\xi,\tau) = q(x,t,\xi,\tau) - r_1(x,t,\xi,\tau) \underset{t}{o} a(x,t,\xi,\tau)$$

On a $q_1 \in S_\Theta^{M^{-1}}$. En effet le second terme est dans $\mathcal{H}_\Theta^{-\mu}$ d'après (3.14), et les hypothèses :

$$r^\mu \leq M \leq |p(x,t,\xi,\tau)| \leq c\, r^\mu\, \psi^k$$

impliquent que $\mathcal{H}_\Theta^{-\mu} \subset S_\Theta^{M^{-1}}$. On a :

$$q_1 \circ p = 1 + r_1 - r_1 \underset{t}{o} a \underset{t}{o} p_o \quad \text{mod. } \mathcal{H}_\Theta^{-\varepsilon}$$

d'après le corollaire de la proposition 3.2. Comme $a \underset{t}{o} p_o = 1$, on a :

$$q_1 \circ p = 1 \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{H}_\theta^{-\varepsilon}.$$

Posons $r_3 = q_1 \circ p - 1$. On a $(r_3)^n \in \mathcal{H}_\Theta^{-n\varepsilon} \subset S_{\Theta,\Theta}^{-n\varepsilon}$. Il existe un symbole q_3 d'ordre 0 tel que $q_3 \sim \sum_0^\infty (-r_3)^j$ et $q_3 - 1 \in \mathcal{H}_\Theta^{-\varepsilon}$.

Posons $q = q_3 \circ q_1$. On a bien $q \in S_\Theta^{M^{-1}}$. En effet, comme

$$r^\mu \leq M \leq c\, r^\mu\, \psi^k$$

le composé d'un symbole de $S_\Theta^{M^{-1}}$ et d'un symbole de $\mathcal{H}_\Theta^{-\varepsilon}$ est dans $\mathcal{H}_\Theta^{-\mu-\varepsilon}$ donc a fortiori dans $S_\Theta^{M^{-1}}$. D'autre part :

$$q \circ p = q_3 \circ q_1 \circ p = q_3 \circ (1 + r_1) = 1 \quad \mathrm{mod.}\ S^{-\infty}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

L'hypoellipticité avec perte de $m-\mu$ dérivées en découle immédiatement car si $Q \in OPS_\Theta^{-\mu,0} \subset \mathcal{L}_{\Theta,\Theta}^{-\mu}$ on a

$$f \in H_{loc}^s(\Omega) \Longrightarrow Qf \in H_{loc}^{s+\mu}(\Omega).$$

Démonstration de la régularité maximale (théorème 2).

Nous nous plaçons dans le cas où l'hypothèse (H'3) est vérifiée. La paramétrixe Q que nous avons construite est alors dans $OPS_\Theta^{M^{-1}}$, où M est donnée par (3.3). Il nous faut démontrer que :

$$f \in H_{loc}^s(R^n) \Longrightarrow t^{\ell(\alpha,j)}\, D_x^\alpha\, D_t^j\, Qf \in H_{loc}^s(R^n)$$

si $|\alpha| + j \leq m$. Il nous suffit de vérifier que $(t^{\ell(\alpha,j)}\, \xi^\alpha\, \tau^j) \circ q \in S_\Theta^{o,o}$. Cela résulte de $q \in S_\Theta^{M^{-1}}$ (par construction) et de $t^{\ell(\alpha,j)}\, \xi^\alpha\, \tau^j \in S_\Theta^M$(d'après la proposition 2.1).

IV - Une classe d'opérateurs différentiels ordinaires.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition 3.3. Nous voulons démontrer l'existence d'un inverse à gauche $a(x,t,\xi,D_t)$, avec $a \in S_\Theta^{-\mu,0}$, pour l'opérateur différentiel ordinaire :

$$p_o(x,t,\xi,D_t) = \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)\, t^{\ell(\alpha,j)}\, \xi^\alpha\, D_t^j$$

où l'on pose $I = \{(\alpha,j) \mid |\alpha| + j \leq m \text{ et } |\alpha| + \Theta j - \Theta\ell(\alpha,j) = \mu\}$.

On peut écrire aussi :

$$p_o(x,t,\xi,\tau) = \lim_{r\to\infty} r^{-\mu}\, p(x,tr^{-\Theta},\xi r,\tau r^{\Theta})$$

Le symbole p_o possède la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$p_o(x,t,\xi,\tau) = \lambda^{-\mu}\, p_o(x,t\lambda^{-\Theta},\, \xi\lambda,\, \tau\lambda^{\Theta})$$

pour tout $\lambda > 0$. Il nous suffit donc de construire l'inverse pour $|\xi| = 1$. Faisons le changement de variable :

$$(4.1) \qquad t|\xi|^{\Theta} = s \qquad \tau|\xi|^{-\Theta} = \sigma \qquad \xi|\xi|^{-1} = \omega$$

et posons

$$(4.2) \qquad b(x,s,\omega,\sigma) = |\xi|^{-\mu}\, p_o(x,t,\xi,\tau)$$

Vérifions les majorations satisfaites par le symbole $b(x,s,\omega,\sigma)$.

Proposition 4.1. Pour tout compact $K \subset \Omega_1$, il existe $A > 0$ tel que pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ on ait :

$$(4.3) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_s^\beta \partial_\omega^\gamma \partial_\sigma^\delta\, b(x,s,\omega,\sigma)| \leq c|b(x,s,\omega,\sigma)|\,(1+|s|)^{-\beta}\,(1+|\sigma|)^{-\delta}$$

$$(4.4) \qquad |b(x,s,\omega,\sigma)| \geq C$$

si $x \in K$, $|\omega| = 1$ et $|s| + |\sigma| \geq A$.

Démonstration. Ecrivons les majorations des hypothèses H2 et H3 avec le changement de variable (4.1) en posant

$$\tilde{p}(x,s,\omega,\sigma,r) = r^{-\mu}\, p(x,t,\xi,\tau) \tag{4.5}$$

où $r = |\xi|$. On tronque le symbole $\tilde{p}$ pour qu'il soit nul pour $|t| \geq 1$. Les hypothèses s'écrivent : pour tout compact $K \subset \Omega_I$, il existe $A > 0$ tel que pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ on ait :

$$|\partial_x^\alpha \partial_s^\beta \partial_\omega^\gamma \partial_\sigma^\delta \tilde{p}| \leq C|\tilde{p}(x,s,\omega,\sigma,r)|\ (1+|s|)^{-\beta}\ (1+|\sigma|)^{-\delta}$$

$$|\tilde{p}(x,s,\omega,\sigma,r)| \geq C$$

si $x \in K$, $|\omega| = 1$ et $|s| + |\sigma| \geq A$. La constante C est indépendante de x,s,σ,ω et r. Comme par définition :

$$b(x,s,\omega,\sigma) = \lim_{r\to\infty} \tilde{p}(x,s,\omega,\sigma,r)$$

et comme les dérivées de $\tilde{p}$ convergent vers celles de b, on en déduit la proposition 4.1.

On veut construire un opérateur $a(x,\omega,s,D_s)$ tel que :

$$a(x,s,\omega,D_s)\ b(x,s,\omega,D_s) = I$$

et pour $|s| + |\sigma|$ assez grand :

$$|\partial_x^\alpha \partial_s^\beta \partial_\omega^\gamma \partial_\sigma^\delta a(x,s,\omega,\sigma)| \leq C|a(x,s,\omega,\sigma)|\ (1+|s|)^{-\beta}\ (1+|\sigma|)^{-\delta}$$

Nous utiliserons de nouvelles notations pour simplifier. Nous désignerons par λ le paramètre (x,ω) qui décrit le compact $\Lambda = K \times S^{n-2}$.

Cela nous amène à étudier une classe d'opérateurs sur R dépendant du paramètre $\lambda \in \Lambda$.

Définition 4.1. On désigne par $S^k(\Lambda)$ l'espace de Fréchet des fonctions $a(t,\tau,\lambda)$ C^∞ sur $R^2 \times \Lambda$ telles que, pour tout multi-indice (α,β,γ), on ait :

$$|\partial_t^\alpha \partial_\tau^\beta \partial_\lambda^\gamma \, a(t,\tau,\lambda)| \leq c(1+|t|)^{k-\alpha} \quad (1+|\tau|)^{k-\beta}$$

pour tout $(t,\tau,\lambda) \in R^2 \times \Lambda$.

Tout polynôme en t et τ dont les coefficients dépendent de manière C^∞ de λ, est dans un $S^k(\Lambda)$. A tout symbole $a(t,\tau,\lambda) \in S^k(\Lambda)$ on associe un opérateur pseudo-différentiel sur R, $a(t,D_t,\lambda)$, dépendant du paramètre λ, défini pour tout $u \in \mathcal{S}(R)$ par :

$$a(t,D_t,\lambda)\, u(t) = (2\pi)^{-1} \int e^{it\tau}\, a(t,\tau,\lambda)\, \hat{u}(\tau)\, d\tau.$$

Les propriétés de $S^k(\Lambda)$ sont classiques. Si $a \in S^k(\Lambda)$ et $b \in S^{k'}(\Lambda)$ on a pour tout N

$$a \circ b - \sum_{j<N} \frac{1}{j!} (D_\tau^j a)\,(\partial_t^j b) \in S^{k+k'-N}(\Lambda)$$

Si $a_j \in S^{-j}(\Lambda)$ pour tout $j \in N$, il existe $a \in S^o(\Lambda)$ tel que pour tout N

$$(4.5) \qquad a - \sum_0^{N-1} a_j \in S^{-N}(\Lambda)$$

Si un symbole $b \in S^k(\Lambda)$ vérifie (4.3) et (4.4), alors b admet une paramétrixe a' dans $S^o(\Lambda)$, c'est-à-dire que

$$(4.6) \qquad r = a' \circ b - 1 \in S^{-\infty}(\Lambda) \qquad r' = b \circ a' - 1 \in S^{-\infty}(\Lambda).$$

En effet, si a'_o est un symbole égal à $\frac{1}{b}$ quand $|t|+|\tau|$ est assez grand, on a $a'_o \circ b = 1 + r_1$, avec $r_1 \in S^{-1}(\Lambda)$. D'après (4.5) il existe $a'_1 \in S^o(\Lambda)$ tel que $a'_1 \sim \sum_0^\infty (-r_1)^j$, et le symbole

$a' = a'_1 \circ a'_o$ vérifie bien (4.6).

La proposition 3.3 se trouve donc ramenée à la suivante :

<u>Proposition 4.2.</u> Soient Λ un compact de R^{2n-2} et $b(t,\tau,\lambda) \in S^k(\Lambda)$ vérifiant (4.3) et (4.4). On suppose qu'il existe $\lambda_o \in \Lambda$ tel que $b(t,D_t,\lambda_o)$ soit injectif dans $\mathcal{S}'(R)$. Alors il existe un voisinage V de λ_o dans Λ et un $a \in S^o(V)$ tel que pour tout $\lambda \in V$

(4.7) $$a(t,D_t,\lambda) \circ b(t,D_t,\lambda) = I$$

La démonstration est inspirée de [6].

<u>Démonstration</u>. La fonction $(t,\tau) \longrightarrow r(t,\tau,\lambda_o)$ est dans $\mathcal{S}(R^2)$, donc l'opérateur $r(t,D_t,\lambda_o)$ est compact dans $\mathcal{S}(R)$ et dans $\mathcal{S}'(R)$. D'après (4.6) $b(t,D_t,\lambda_o)$ est donc à indice dans $\mathcal{S}(R)$ et dans $\mathcal{S}'(R)$. Si on suppose $b(t,D_t,\lambda_o)$ injectif dans $\mathcal{S}'(R)$, il admet donc, un inverse à gauche a_o dans $\mathcal{S}'(R)$. Des égalités

$$a_o \circ b = I$$

et

$$a'(t,D_t,\lambda) \circ b(t,D_t,\lambda) = r(t,D_t,\lambda)$$

on déduit :

$$[a'(t,D_t,\lambda) - r(t,D_t,\lambda) \circ a_o] \circ b = I + r_2$$

avec $r_2 \in S^{-\infty}(\Lambda)$ et $r_2(t,\tau,\lambda_o) = 0$. L'opérateur $R(\lambda) = r_2(t,D_t,\lambda)$ est un opérateur à noyau dans $\mathcal{S}(R^2)$ dépendant de manière C^∞ de $\lambda \in \Lambda$. Il existe un voisinage V de λ_o dans Λ tel que :

$$\| R_2(\lambda) \|_{\mathcal{L}(L^2(R))} \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $\lambda \in V$. $I + R(\lambda)$ est donc inversible pour tout $\lambda \in V$ et, d'après Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6], l'inverse est de la forme $I + s_2(t,D_t,\lambda)$, où $s_2 \in S^{-\infty}(\Lambda)$. Posons alors :

$$a(t,D_t,\lambda) = [I + s_2(t,D_t,\lambda)] \circ [a'(t,D_t,\lambda) - r(t,D_t,\lambda)\, a_o]$$

On a bien

$$a(t,\tau,\lambda) \in S^o(\Lambda)$$

et pour tout $\lambda \in V$

$$a(t,D_t,\lambda) \circ b(t,D_t,\lambda) = I.$$

V - Exemples.

Nous allons donner des exemples où l'hypothèse H'3 est vérifiée. Tous ces exemples ont été étudiés dans [4]. Nous verrons d'abord une classe assez vaste d'opérateurs pour lesquels la surface $t = 0$ est non caractéristique et pour lesquels on peut expliciter l'hypothèse H'3. Ensuite nous donnerons un exemple pour lequel la surface $t = 0$ est caractéristique.

1. Le cas non-caractéristique.

On suppose ici $\ell(o,m) = 0$ et $a_{o,m} = 1$, c'est-à-dire

$$P = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ j<m}} a_{\alpha j}(x,t)\, t^{\ell(\alpha,j)}\, D_x^\alpha D_t^j . \tag{5.1}$$

On fait l'hypothèse de convexité suivante :

(C) Pour tout multi-indice (α,j) tel que $|\alpha| + j \leq m$, il existe λ_o, λ_1 et $\lambda_2 \in [0,1]$ et deux multi-indices $(\alpha_1,0)$ et $(\alpha_2,0)$ tels que :

$$\lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$|t|^{\ell(\alpha,j)}|\xi|^{|\alpha|}|\tau|^{j} \leq$$
$$\leq c(|\tau|^{m})^{\lambda_o}(|t|^{\ell(\alpha_1,0)}|\xi|^{|\alpha_1|})^{\lambda_1}(|t|^{\ell(\alpha_2,0)}|\xi|^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}$$

Pour tous les opérateurs de la forme (5.1) vérifiant l'hypothèse (C) on peut expliciter la condition H'3. Lorsque les $a_{\alpha j}$ sont constants, l'hypothèse H'3 est nécessaire pour qu'on ait l'hypoellipticité avec régularité maximale (cf. [4]).

Tout d'abord on peut simplifier l'énoncé de H'3. Posons :

(5.2) $$M = \sum_{|\alpha|+j\leq M} (|t|+r^{-\Theta})^{\ell(\alpha,j)} \; r^{|\alpha|} \; (|\tau|+r^{\Theta})^{j}$$

$$M_1 = \sum_{|\alpha|+j\leq M} |t|^{\ell(\alpha,j)} \; r^{|\alpha|} \; |\tau|^{j} + r^{\mu}$$

Rappelons les notations :

(5.3) $\mu = \sup\{|\Theta|+\Theta j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$ $I = \{(\alpha,j)/\ \mu = |\alpha|+\Theta_j - \Theta\ell(\alpha,j)\}$.

On peut énoncer :

<u>Proposition 5.1</u>. Si I contient (o,m) on a nécessairement $\mu = m\Theta$.
Si I contient un multi-indice $(\alpha,0)$, on a :

(5.4) $$\Theta = \sup_{|\alpha|\leq m} \frac{|\alpha|}{\ell(\alpha,0)+m}$$

Si la famille d'entiers $\ell(\alpha,j)$ vérifie ces deux hypothèses et la condition (C) il existe C > 0 tel que

$$c^{-1}\, M_1 \leq M \leq c\, M_1$$

<u>Démonstration</u>. Les deux premières affirmations résultent immédiatement de la définition de I. Pour la troisième les seuls points à

vérifier sont :

$$r^{|\alpha|-\Theta\ell(\alpha,j)}\ |\tau|^j \leq c\ M_1 \qquad |t|^{\ell(\alpha,j)}\ r^{|\alpha|+\Theta j} \leq c\ M_1$$

La première majoration résulte de $|\Theta|-\Theta\ell(\alpha,j) \leq \mu-\Theta j = \Theta(m-j)$ d'où

$$r^{|\alpha|-\Theta\ell(\alpha,j)}|\tau|^j \leq r^{\Theta(m-j)}|\tau|^j \leq (r^\mu)^{1-\frac{j}{m}}(|\tau|^m)^{\frac{j}{m}} \leq c(r^\mu+|\tau|^m) \leq cM_1.$$

Pour la seconde on utilise l'hypothèse de convexité (C). Il existe $(\alpha_1,0)$, $(\alpha_2,0)$, λ_o, λ_1, λ_2 tels que $\lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et

$$|t|^{\ell(\alpha,j)}r^{|\alpha|+\Theta j} \leq (r^{\Theta m})^{\lambda_o}(|t|^{\ell(\alpha_1,0)}\ r^{|\alpha_1|})^{\lambda_1}(|t|^{\ell(\alpha_2,0)}\ r^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}$$

$$\leq c(r^\mu+|t|^{\ell(\alpha_1,0)}\ r^{|\alpha_1|}+|t|^{\ell(\alpha_2,0)}\ r^{|\alpha_2|}) \leq cM_1$$

d'où la proposition.

Etant donné un opérateur P de la forme (5.1) vérifiant la condition (C), définissons Θ par (5.4) et posons $\mu = m\Theta$. L'hypothèse (H'3) est alors équivalente à : il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|p| \geq c\ M_1$$

si $|t|\ r^\Theta + |\tau|\ r^{-\Theta} \geq A$.

Sous cette forme, la condition (H'3) peut s'expliciter plus facilement. Nous allons le faire d'abord pour des opérateurs quasi-homogènes, puis pour un exemple plus compliqué.

a) Le cas quasi-homogène.

Supposons que $\frac{m}{\Theta}$ soit un entier, et posons $\ell(\alpha,j) = \left[\frac{|\alpha|}{\Theta} + j - m\right]$, où $[x]$ désigne le plus petit entier $\geq \sup(x,0)$. La condition (C) est alors vérifiée.

Proposition 5.2.

Dans ce cas l'hypothèse H'3 est équivalente à : il existe $C > 0$ tel que :

$$(5.6) \qquad |p_m(x,t,\xi,\tau)| \geq C \sum_{|\alpha|+j=m} |t|^{\ell(\alpha,j)} |\xi|^{|\alpha|} |\tau|^j .$$

pour tout $(x,t,\xi,\tau) \in T^*(R^n)$.

En effet, on voit que la fonction M_1 définie en (5,2) est dans le cas quasi-homogène, majorée et minorée par une fonction de la forme :

$$(5.7) \qquad M_1' = r^{m\Theta} \left[\sum_{|\alpha|+j\leq m} (|t|r^{\Theta})^{\ell(\alpha,j)} (|t|r^{-\Theta})^j + 1 \right]$$

On remarque que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que $|t|r^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta} > A$ entraîne :

$$(5.8) \quad 1+ \sum_{|\alpha|+j\leq m-1} (|t|r^{\theta})^{\ell(\alpha,j)} (|\tau|r^{-\Theta})^j \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|+j=m} (|t|r^{\Theta})^{\ell(\alpha,j)} (|\tau|r^{-\Theta})^j$$

En effet il existe A_1 tel que $|t|\ r^{\Theta} > A_1$ entraîne, si $|\alpha| + j \leq m-1$, en posant $|\beta| = m-|j|$, d'où $|\beta| > |\alpha|$:

$$(|t|r^{\Theta})^{\left[\frac{\alpha}{\Theta}+j-m\right]} \leq \varepsilon(|t|r^{\Theta})^{\left[\frac{|\beta|}{\Theta}+j-m\right]}$$

L'inégalité (5.8) est donc vérifiée si $|t|\ r^{\Theta} > A_1$. D'autre part il existe A_2 tel que $|\tau|\ r^{-\Theta} > A_2$ entraîne, si $j < m$

$$A_1^{\ell(\alpha,j)} (|\tau|\ r^{-\Theta})^j < \varepsilon(|\tau|\ r^{-\Theta})^m .$$

Donc l'inégalité (5.8) est vérifiée pour $|t|r^{\Theta} + |\tau|r^{-\Theta} > A_1+A_2$.

Donc il existe $A > 0$ tel que $|t|\ r^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta} > A$ entraîne :

$$|p-p_m| \leq \varepsilon\, r^{m\Theta} \, \Big(\sum_{|\alpha|+j=m} (|t|\, r^{\Theta})^{\ell(\alpha,j)} \, (|\tau|\, r^{-\Theta})^{j} \Big)$$

L'hypothèse (H'3), qu'on peut formuler comme en (5.5), est donc équivalente dans le cas quasi-homogène à (5.6), d'où la proposition.

b) Exemples non quasi-homogènes.

Considérons des opérateurs dans R^2 de la forme

(5.9) $$P(x,t,D_x,D_t) = D_t^m + \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha t^{\ell(\alpha)} D_x^\alpha$$

pour lesquels la condition (C) est évidemment vérifiée. On pose, suivant (5.4)

(5.10) $$\Theta = \sup_{\alpha \leq m} \frac{\alpha}{m+\ell(\alpha)} \qquad \mu = m\Theta$$

On peut alors expliciter facilement l'hypothèse (H'3). Faisons-le sur deux exemples.

Exemple 1. Soit :

$$p(x,t,\xi,\tau) = \tau^2 + t^{2k} \xi^2 + \lambda\, t^\ell\, \xi + a\tau + b \qquad \lambda, a, b \in C$$

Si $\ell \geq k-1$, on est dans le cas quasi-homogène étudié ci-dessus (avec $\Theta = \frac{1}{k+1}$) et (H'3) est toujours vérifiée. Si $\ell < k-1$, H'3 est équivalente à : il existe C > 0 tel que :

(5.11) $$|\tau^2 + t^{2k}\xi^2 + \lambda t^\ell \xi| \geq c(|\tau|^2 + |t^{2k}\xi^2| + |t^\ell \xi|)$$

c'est-à-dire à : $\lambda \notin R$.

Dans le cas $\ell < k-1$, on a d'après (5.10), $\Theta = \frac{1}{\ell+2}$. D'après (5.5) l'hypothèse (H'3) s'énonce : il existe A tel que pour $|t|\, r^\Theta + |\tau|\, r^{-\Theta} > A$ on ait

$$|p| \geq C\ (|\tau|^2 + |t^{2k}\ \xi^2| + |t^{\ell}\ \xi| + |\tau| + 1)$$

Mais le raisonnement du § a) montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe A_1 tel que $|t|\ r^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta} > A_1$ entraîne :

$$|\tau| + 1 \leq \varepsilon(|\tau|^2 + |t^{\ell}\ \xi|)\ .$$

La condition (H'3) est donc bien équivalente à (5.11), donc à $\lambda \notin R$.

<u>Exemple 2</u>. Soit :

$$p(t,\xi,\tau) = \tau^4 + a_1\ \xi + a_2\ t^4\ \xi^2 + a_3\ t^9\ \xi^3 + a_4\ t^{16}\ \xi^4 \tag{5.12}$$

où $a_j \in C$. Dans cet exemple le Θ défini par (5.10) est égal à $\frac{1}{4}$.

Posons

$$\begin{aligned} p_1(t,\xi,\tau) &= \tau^4 + a_2\ t^4\ \xi^2 + a_3\ t^9\ \xi^3 \\ p_2(t,\xi,\tau) &= \tau^4 + a_3\ t^9\ \xi^3 + a_4\ t^{16}\ \xi^4 \end{aligned} \tag{5.13}$$

La condition H'3 est équivalente à : il existe $C > 0$ tel que pour tout $(t,\xi,\tau) \in R^3$

$$|p_1(t,\xi,\tau)| \geq C(|\tau|^4 + |t^4\ \xi^2| + |t^9\ \xi^3|) \tag{5.14}$$

$$|p_2(t,\xi,\tau)| \geq C(|\tau|^4 + |t^9\ \xi^3| + |t^{16}\ \xi^4|) \tag{5.15}$$

<u>Démonstration</u>. La condition H'3 s'énonce : il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que, si $|t|\ |r|^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta} > A$:

$$|p(t,\xi,\tau)| \geq c(|\tau|^4+|\xi|+|t^4\xi^2|+|t^9\xi^3|+|t^{16}\xi^4|) = M(t,\tau,\xi).$$

Le même raisonnement que dans le cas quasi-homogène montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe A_1 tel que $|t|\ r^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta} > A_1$ entraîne

$$|\xi| \leq \varepsilon(|\tau|^4 + |t^4\ \xi^2|) \tag{5.16}$$

Le coefficient a_1 est donc sans influence sur la condition H'3. De même il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $A_2 > 0$ tels que :

$$(5.17) \qquad |t|\ |\xi|^{\frac{1}{7}} < \varepsilon_1 \Longrightarrow |t^{16}\ \xi^4| < \varepsilon |t^9\ \xi^3|$$

$$(5.18) \qquad |t|\ |\xi|^{\frac{1}{5}} > A_2 \Longrightarrow |t^4\ \xi^2| < \varepsilon |t^9\ \xi^3|$$

Si $|\xi|$ est assez grand, donc a fortiori si $|t|\ r^{\Theta} + |\tau|\ r^{-\Theta}$ est assez grand, l'une ou l'autre de ces inégalités sera vérifiée. Dans le 1er cas on a :

$$|p-p_1| \leq C\ |t^{16}\ \xi^4| < \varepsilon(|\tau|^4 + |t^4\ \xi^2| + |t^9\ \xi^3|)$$

et

$$M(t,\xi,\tau) \leq c\ (|\tau|^4 + |t^4\ \xi^2| + |t^9\ \xi^3|) \leq c\ M(t,\xi,\tau)$$

Donc la condition H'3, pour la restriction du symbole p à la zone où (5.17) est vérifiée est bien équivalente à (5.14). De même pour l'ensemble des (t,ξ,τ) où (5.18) est vérifiée H'3 est équivalente à (5.15). Comme pour $|t|r^{\Theta} + |\tau|r^{-\Theta}$ assez grand l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée, H'3 est bien équivalent à la réunion de (5.14) et (5.15).

Dans le cas général d'un symbole $p(t,\xi,\tau)$ de la forme (5.9), désignons par α_o la plus grande valeur de α pour laquelle le sup est atteint dans (5.10). Un calcul analogue à (5.16) montre que les termes $a_\alpha\ t^{\ell(\alpha)}\ \xi^\alpha$ avec $\alpha < \alpha_o$ sont sans influence sur la condition H'3. Celle-ci se traduit toujours par un nombre fini d'inégalités analogues à (5.14) et (5.15).

2. Le cas caractéristique non fuchsien.

Nous donnerons seulement l'exemple suivant, traité dans [4]. Soit :

(5.19) $$P = t^{\sigma}(D_t^4 + D_x^4) + \lambda\, D_t^2 + \mu\, t^2\, D_x^2 + \nu\, D_x$$

où σ est un entier ≥ 3 et λ, μ, ν des nombres complexes. On a :

Proposition 5.3. L'opérateur P est hypoelliptique avec régularité maximale (au sens du théorème 2) si et seulement si :

1) L'opérateur différentiel $p_o(x,\xi,t,D_t)$ défini de la manière suivante :

i) si $\sigma > 6$ $\quad p_o(x,\xi,t,D_t) = \lambda\, D_t^2 + \mu\, t^2\, \xi^2 + \nu\, \xi$

ii) si $\sigma = 6$ $\quad p_o(x,\xi,t,D_t) = \lambda\, D_t^2 + t^{\sigma}\, \xi^4 + \mu\, t^2\, \xi^2 + \nu\xi$

iii) si $\sigma < 6$ $\quad p_o(x,\xi,t,D_t) = \lambda\, D_t^2 + t^{\sigma}\, \xi^4$

est injectif dans $\mathcal{S}(R)$ quand $\xi = \pm 1$.

2) Les conditions d'ellipticité générale suivantes sont vérifiées pour tous $t \neq 0$ et $(\xi,\tau) \neq (0,0)$

i) si $\sigma > 6$, on a à la fois $\lambda\, \tau^2 + \mu\, t^2\, \xi^2 \neq 0$

$$\lambda\, \tau^2 + t^{\sigma}\, \xi^4 + \mu\, t^2\, \xi^2 \neq 0$$

$$t^{\sigma}\, \tau^4 + t^{\sigma}\, \xi^4 + \lambda\, \tau^2 \neq 0$$

ii) si $\sigma \leq 6$, on a $\quad t^{\sigma}\, \tau^4 + t^{\sigma}\, \xi^4 + \lambda\, \tau^2 \neq 0.$

Si ces conditions sont vérifiées, l'opérateur P admet une paramétrixe à gauche dans $\mathcal{L}^{-2\Theta}_{\Theta,\Theta}(R^2)$, où Θ est défini par :

$$\Theta = \sup\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{\sigma+2}\right) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEALS, General calculus for pseudo-differential operators. Duke Maths. Journal 42 n°1, mars 1975.

[2] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. pures et appl. 55, (1976), 131-171.

[3] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non fuschiens. Comm. in partial differential equ. 2(1) (1977), 1-30.

[4] BOLLEY-CAMUS-HELFFER, Remarques sur l'hypoellipticité. C.R.A.S. t. 283 (1976) 979-982, et exposé aux Journées "Equations aux dérivées partielles". (Rennes 1976) à paraître aux séminaires d'Analyse fonctionnelle de Rennes.

[5] BOUTET de MONVEL, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. CPAM 27 (1974) 585-639.

[6] BOUTET de MONVEL-GRIGIS-HELFFER, Paramétrixes d'opérateurs pseudo-differentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34-35 (1976) 93-121.

[7] BOUTET de MONVEL-TREVES, On a class of pseudo-differential operators with double characteristics. Inventiones Math. 24 (1974) &-34.

[8] GILIOLI-TREVES, An example in the solvability theory of linear partial differential equations. Amer. J. of Math. 96 (1974), 367-385.

[9] GRUSHIN, On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik 83 (125), (1970), 456-473.

[10] GRUSHIN-VISHIK, Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. Math. Sb. 80 (122) (1969) 455-491.

[11] HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Amer. Math. Soc. Proc. of Sym. Pure Math 10 (1966) 138-183.

[12] MENIKOFF, Some examples of hypoelliptic partial differential equations. Math. Ann. 221 (1976) 167-181.

[13] ROLLAND, Hypoellipticité partielle pour des opérateurs elliptiques et dégénérés. CRAS (1976).

[14] SJOSTRAND, Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12 (1974) 85-130.

[15] YAMAMOTO, Parametrices for pseudo-differential equations with double characteristics. Hokkaido Math J. 5 (1976) 280-301.

[16] MENIKOFF, Pseudo-differential operators with double charactéristics (à paraître).