P. BOLLEY

J. CAMUS

Hypoellipticité pour une équation d'évolution abstraite du second ordre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n^{o} 3, p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A3_0>

HYPOELLIPTICITE POUR UNE EQUATION D'EVOLUTION ABSTRAITE

DU SECOND ORDRE

P. BOLLEY
Institut de Mathématiques & Informatique
Université de Nantes
44 000 - NANTES

J. CAMUS
UER Mathématiques & Informatique
Université de Rennes
35 000 - RENNES

Dans cet article on étudie l'hypoellipticité de l'opérateur suivant :

$$P = (\partial_t + at\,A)\,(\partial_t + bt^k A) + cA$$

où $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, A est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H, a, b, c sont des nombres complexes et k est un entier impair >1. Plus précisément on démontre le résultat suivant :

THEOREME : *Si $Re a.Re b < 0$ et si $\frac{c}{a} \notin \mathbb{Z}$, l'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$.*

Cette notion d'hypoellipticité est précisée plus loin ; en particulier lorsque $H = L^2(\mathbb{R})$ et $A = -i \frac{\partial}{\partial t}$ on retrouve l'hypoellipticité classique.

Cette étude vient à la suite de plusieurs travaux faits sur des opérateurs de la forme $(\partial_t + at\,A)\,(\partial_t + bt\,A) + cA$ (cf. [5], [7],...) ou plus généralement $(\partial_t + at^k A)\,(\partial_t + bt^k A) + ct^{k-1}A$ (cf. [4], [3], [6], [1],...).

La démonstration du résultat annoncé est faite tout d'abord dans le cas où A est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné par une méthode qui nous a été inspirée par les techniques utilisées dans [7] et [3] ; puis dans le cas général on opére comme dans [1].

Notons que les méthodes de réduction à une variable et d'homothéties dans le cas où $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$, utilisées par exemple dans [2] ne semblent pas s'adapter ici.

I - CAS OU A EST DEFINI POSITIF SUR H ET A INVERSE A^{-1} BORNE.

1-1 - NOTATIONS.

On utilise les notations de (cf. aussi ,) que l'on rappelle ici. Dans ce chapitre I, A désigne un opérateur linéaire, non borné dans un espace de Hilbert H de domaine dense dans H, auto-adjoint défini positif et ayant un inverse borné A^{-1} (par exemple l'opérateur A peut-être $(1 - \Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur $\mathbb{R}^n$ ou bien une extension auto-adjointe de $|D_x|$ sur $\mathbb{R}$).

On introduit une famille "d'espaces de Sobolev" H^s pour $s \in \mathbb{R}$ ("dans la variable x") définis par A de la façon suivante : si $s \geqslant 0$, H^s est l'espace des éléments u de H tels que $A^s u \in H$ muni de la norme $||u||_s = ||A^s u||_o$ où $||u||_o$ désigne la norme de u dans H ; si $s < 0$, H^s est le complété de H pour la norme $||u||_s = ||A^s u||_o$. Etant donnés s et m dans $\mathbb{R}$, A^m est un isomorphisme (pour les structures d'espaces de Hilbert) de H^s sur H^{s-m} (par exemple l'opérateur A étant l'opérateur $(1-\Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur $\mathbb{R}^n$ alors l'espace H^s est l'espace de Sobolev classique dans $\mathbb{R}^n$ d'ordre $s\theta$).

On note par H^∞ l'intersection des espaces H^s et par $H^{-\infty}$ leur réunion. On munit le premier de la topologie limite projective et le deuxième de la topologie limite inductive. Puisque pour chaque $s \in \mathbb{R}$, H^s et H^{-s} peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre, H^∞ et $H^{-\infty}$ peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre.

Soit J un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. On note $C^\infty(J;H^\infty)$ l'espace des fonctions C^∞ dans J à valeurs dans H^∞. C'est l'intersection des espaces $C^\infty(J;H^k)$ (des fonctions j fois continuement différentiables dans J à valeurs dans H^k) pour tous j et k entiers > 0. On munit $C^\infty(J;H\ )$ de la topologie C^∞ naturelle. Si K est un sous-ensemble compact de J on note $C_o^\infty(K;H\ )$ le sous-espace de $C^\infty(J;H\ )$ formé des fonctions qui s'annulent identiquement hors de K. C'est un sous-espace formé de $C^\infty(J;H^\infty)$ et on note $(C_o^\infty(J;H^\infty)$ la limite inductive des $C_o^\infty(K;H^\infty)$ pour tout sous-ensemble compact K de J.

On note par $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ le dual de $C_o^\infty(J;H\ )$; c'est l'espace des distributions dans J à valeurs dans $H^{-\infty}$.

Soit l'opérateur P différentiel sur $\mathbb{R}$ défini par :

$$P = (\partial_t + at\, A)\ (\partial_t + bt^k A) + cA$$

où a, b, c sont des nombres compexes, k est un entier impair $\geqslant 3$.

Définition 1.1. On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de $\mathbb{R}$ si pour tout sous ensemble J' de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tels que $Pu \in C^{\infty}(J';H^{\infty})$ alors $u \in C^{\infty}(J';H^{\infty})$. On dit que P est hypoelliptique au point t = 0 s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J.

Le résultat important de ce chapitre I est :

THEOREME 1.1.

L'opérateur P est hypoelliptique en t = 0 dans chacun des cas suivants :

i) $Re\,a > 0$, $Re\,b < 0$, $\frac{c}{a} \neq 1,2,\ldots$

ii) $Re\,a < 0$, $Re\,b > 0$, $\frac{c}{a} \neq 0, -1, -2,\ldots$

iii) $Re\,a < 0$, $Re\,b < 0$.

I-2 - UNE ESTIMATION SOUS ELLIPTIQUE.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note V(J) le complété de $C_o^{\infty}(J;H^{\infty})$ pour la norme :

$$||u||_{V(J)} = \{\int(||\partial_t u||_o^2 + ||t^{\frac{k+1}{2}} Au||_o^2 + ||A^{\frac{1}{2}}u||_o^2)\,dt\}^{\frac{1}{2}}$$

et V'(J) le dual de V(J).

On a l'estimation suivante :

Proposition 2.1. Si $Re\,a(|a|^2 - 2\,Re\,c\bar{a}) > 0$ alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout u tels que $A^{1/2}u \in V(-T,T)$, on ait :

$$||u||_{V(-T,T)} \leqslant C\,||Pu||_{V'(-T,T)}$$

Démonstration. Pour $u \in C_o^{\infty}(J;H^{\infty})$ où $J =]-T,T[$ on a :

$$\int_J ((\partial_t u+bt^k A), (\partial_t-\bar{a}tA))_o\,dt =$$

$$\int_J (||\partial_t u||_o^2 - abt^{k+1}||Au||_o^2 + b(t^k Au,\partial_t u)_o - a(\partial_t u,tAu)_o)dt$$

Or par intégrations par parties on a :

$$2 \text{ Re} \int_J (\partial_t u, tAu)_o \, dt = - \int_J (u,Au)_o \, dt$$

$$2 \text{ Re} \int_J (\partial_t u, t^k Au)_o \, dt = -k \int_J (u, t^{k-1} Au)_o \, dt$$

Par conséquent :

$$\text{Re} \left\{ \bar{a} \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J (\partial_t u + bt^k A, \partial_t u - atAu)_o \, dt = c\bar{a} \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J (Au,u)_o \, dt \right\}$$

$$= \text{Re } \bar{a} \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J ||\partial_t u||_o^2 - |a|^2 \frac{\text{Reb Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J^{k+1} ||Au||_o^2 \, dt + \frac{|a|^2}{2} \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J (u,Au)_o dt$$

$$+ \text{Re}(\bar{a}b \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J (t^k Au, \partial_t u) \, dt) - \text{Re}(c\bar{a} \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \int_J (Au,u)_o \, dt)$$

$$= |\text{Rea}| \int_J ||\partial_t u||_o^2 dt - \frac{|a|^2}{|\text{Rea}|} \text{Rea Reb} \int_J t^{k+1} ||Au||_o^2 dt + (\frac{|a|^2}{2} - \text{Re}c\bar{a}) \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|}) \int_J (Au,u)_o dt$$

$$+ \text{Re}\bar{a}b \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \text{Re} (\int_J (t^k Au, \partial_t u)_o \, dt) - \text{Im}\bar{a}b \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} \text{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_o dt$$

$$= |\text{Rea}| \int_J ||\partial_t u||_o^2 dt - \frac{|a|^2}{|\text{Rea}|} \text{Rea Reb} \int_J t^{k+1} ||Au||_o^2 dt$$

$$+ \int_J \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} (\frac{|a|^2}{2} - \text{Re}c\bar{a} - k \frac{\text{Re}\bar{a}b}{2} t^{k-1}) (Au,u)_o \, dt.$$

Mais $\frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} (|a|^2 - 2 \text{ Re}c\bar{a}) > 0$, $k > 1$ et A est défini positif ; donc il existe $T_1 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que si u est nulle pour $|t| \geqslant T_1$ on a :

$$\int_J \frac{\text{Rea}}{|\text{Rea}|} (\frac{|a|^2}{2} - \text{Re}c\bar{a} - \frac{\text{Re}\bar{a}b}{2} k \, t^{k-1}) (Au,u)_o \, dt \geqslant C_1 \int_J ||A^{\frac{1}{2}} u||_o^2 \, dt$$

De plus pour tout $\varepsilon > 0$

$$|2 \text{ Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_o dt| \leqslant \varepsilon \int_J ||\partial_t u||_o^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_J t^{k-1} \, t^{k+1} ||Au||_o^2 \, dt$$

Comme Rea Reb < 0 et $k+1$ pair on voit qu'il existe $C_2 > 0$ et $T_2 > 0$ tels que si u est nulle pour $|t| \geqslant T_2$ on a :

$$|\mathrm{Re}a|\int_J\|\partial_t u\|_o^2 dt - \frac{|a|^2}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Re}a\ \mathrm{Re}b\int_J t^{k+1}\|Au\|_o^2 dt - \mathrm{Im}\bar{a}b\frac{\mathrm{Re}a}{|\mathrm{Re}a|}\mathrm{Im}\int_J (t^k Au,\partial_t u)_o dt$$

$$\geqslant C_2\ \{\int_J\|\partial_t u\|_o^2\ dt + \int_J t^{k+1}\|Au\|_o^2\ dt\ \}$$

Donc pour $T = \min(T_1,T_2)$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in C_o^\infty(J;H^\infty)$ on ait (avec $J =]-T,T[$)

$$\|u\|_{V(J)}^2 \leqslant C\ |\ < Pu,u >_{V'(J)\ x\ V(J)}\ |$$

Soit maintenant u tel que $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$. Alors $Pu \in V'(J)$; en effet Pu s'écrit :

$$Pu = \partial_t^2 u + abt^{k+1} + atA\partial_t u + bkt^{k-1}Au = bt^k A\partial_t u + cAu$$

et V'(J) s'écrit :

$$V'(J) = H^{-1}(J;H) \oplus t^{\frac{k+1}{2}}L^2(J;H) \oplus L^2(J;H^{-\frac{1}{2}})$$

où $H^{-1}(J;H)$ est l'espace de Sobolev classique d'ordre -1 sur J à valeurs dans H ; on vérifie alors que si $A^{1/2}u \in V(J)$ alors chaque terme de Pu appartient à V'(J).

Soit alors une suite (v_n) de $C_o^\infty(J;H)$ convergeant vers $A^{\frac{1}{2}}u$ dans V(J) ; la suite (u_n) où $u_n = A^{-1/2}v_n$, qui appartient à $C_o^\infty(j;H)$, converge vers u dans V(J) et $< Pu_n,u_n >_{V'(J)\ x\ V(J)}$ converge vers $< Pu,u >_{V'(J)\ x\ V(J)}$. D'où le résultat.

Corollaire 2.1. On suppose que $\mathrm{Re}a(|a|^2 - 2\ \mathrm{Re}c\bar{a}) > 0$. Il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que si $u \in V(-T,T)$ et $A^{1/2}\ Pu \in V'(-T,T)$ alors $A^{1/2}u \in V(-T,T)$.

Démonstration. A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(T_h)_{h\geqslant 0}$ de contractions sur H et qui de plus est holomorphe dans $|\arg h| < \frac{M}{2}$. De façon générale $T_h H$ est inclus dans le domaine de A^s pour tout $h > 0$ et $s \geqslant 0$ et $T_h A^s x = A^s T_h x$ pour tout x appartenant au domaine de A^s.

Soit $u \in V(J)$ (avec $J =]-T,T[$) ; alors $T_h(A^{-\frac{1}{2}}u)$ est tel que $A^{\frac{1}{2}} T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) \in V(J)$ donc par application de la proposition 2.1 on a pour tout $h \geqslant 0$.

$$\left|\left|\frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) - A^{-\frac{1}{2}}u}{h}\right|\right|_{V(J)} \leqslant C \left|\left| P \left(\frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) - A^{-\frac{1}{2}}u}{h}\right)\right|\right|_{V'(J)}$$

$$= C \left|\left| \frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}Pu) - A^{-\frac{1}{2}}Pu}{h}\right|\right|_{V'(J)}$$

Comme $A^{\frac{1}{2}}Pu \in V'(J)$ il s'en suit que le deuxième membre est borné au voisinage de $t = 0$; donc le premier membre est borné et par suite $A^{1/2}u \in V(J)$.

On définit l'espace $W(J)$ par :

$$W(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty});\ \partial_t^2 u,\ t^{k+1}A^2u,\ tA\partial_t u\ ;\ Au \in L^2(J;H)\}$$

On a le résultat de régularité maximale suivant :

Corollaire 2.2. On suppose que $\frac{\mathrm{Re}\,a}{|\mathrm{Re}\,a|}(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,c\bar{a}) > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que si $u \in V(-T,T)$ et $Pu \in L^2(-T,T\ ;\ H)$ alors $u \in W(-T,T)$.

Démonstration. 1 - $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ (où $J =]-T,T[$) d'après le corollaire 2.1 car $u \in V(J)$ et $A^{1/2}Pu \in V'(J)$.

2 - On montre maintenant que $t^{\frac{k+1}{2}}Au \in V(J)$

D'après le corollaire 2.1, il suffit de vérifier que $t^{\frac{k+1}{2}}A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ et que $A^{1/2}P(t^{\frac{k+1}{2}}A^{\frac{1}{2}}u) \in V'(J)$. Or $t^{\frac{k+1}{2}}A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ car $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$. De plus :

$$P(t^{\frac{k+1}{2}}u) = t^{\frac{k+1}{2}}Pu + \alpha\, t^{\frac{k-3}{2}}u + \beta\, t^{\frac{k-1}{2}}\partial_t u + \gamma\, t^{\frac{k+1}{2}}Au + \delta\, t^{\frac{3k-1}{2}}Au$$

pour certains coefficients α, β, γ et δ. Comme $Pu \in L^2(J;H)$ et $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ on en déduit que $AP(t^{\frac{k+1}{2}}u) \in V'(J)$.

3 - On montre enfin que $\partial_t u \in V(J)$.

D'après le corollaire 2.1, il suffit de vérifier que $A^{\frac{1}{2}}\partial_t u \in V(J)$ et que $A^{\frac{1}{2}}P(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) \in V'(J)$. or

$$\partial_t(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) = A^{\frac{1}{2}}\partial_t^2 u = A^{\frac{1}{2}}Pu - abt^{k+1}A^{\frac{3}{2}}u - atA^{\frac{1}{2}}\partial_t u - bkt^{k-1}A^{\frac{1}{2}}u - cA^{\frac{1}{2}}u.$$

Comme $Pu \in L^2(J;H)$ et $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ on en déduit que $\partial_t(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) \in L^2(J;H)$. De plus $t^{\frac{k+1}{2}}A(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) \in L^2(J;H)$ car $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ et $A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) = \partial_t u \in L^2(J;H)$ car $u \in V(J)$. Donc $A^{\frac{1}{2}}\partial_t u \in V(J)$. Enfin $A^{\frac{1}{2}}P(A^{\frac{1}{2}}\partial_t u) = P(\partial_t u) = \partial_t Pu + \alpha t^k A^2 u + \beta A_t u + \gamma t^{k-2}Au$ pour certains coefficients α, β et γ. Comme $Pu \in L^2(J;H)$ et $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ on en déduit que $P(\partial_t u) \in V'(J)$.

4 - On en déduit alors que $\partial_t u$, $t^{\frac{k+1}{2}}Au$ et $A^{\frac{1}{2}}u \in V(J)$ et par suite que $u \in W(J)$.

I-3 - LES ESPACES $H^{n,h}$ et $W^{n,h}$.

Etant donnés un entier $n \geqslant 0$, un entier h impair et un intervalle ouvert borné J de $\mathbb{R}$ on définit l'espace $H^{n,h}(J)$ par (cf. [ ])

$$H^{o,h}(J) = L^2(J;H)$$

$$H^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})\ ;\ \partial_t u,\ t^h Au \quad H^{n-1,h}(J)\} \text{ pour } n \geqslant 1;$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

On définit également l'espace $W^{n,h}(J)$ par :

$$W^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})\ ;\ \partial_t^2 u,\ t^{k+1}A^2 u,\ Au,\ tA\partial_t u \in H^{n,h}(J)\}$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

L'opérateur P est linéaire et continu de $W^{n,h}(J)$ dans $H^{n,h}(J)$ et l'espace $W^{n,h}(J)$ est l'espace de régularité maximale associé à l'espace $H^{n,h}(J)$ pour l'opérateur P. Notons que $W^{o,h}(J) = W(J)$.

On définit de façon habituelle les espaces $W^{n,h}_{loc}(J)$ et $H^{n,h}_{loc}(J)$.

Proposition 3.1. Etant donné $n \geq 1$, l'espace $H^{n,h}(J)$ s'injecte continuement dans $H^{n-1,h}(J)$.

Démonstration. La propriété est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai à l'ordre n-1. Soit alors $n \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$; donc $\partial_t u$ et $t^k Au \in H^{n-2,h}(J)$ ie $n \in H^{n-1,h}(J)$.

Proposition 3.2. Si $0 \notin \bar{J}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $u \in H^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $\partial_t^j\, A^{n-j}u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n$.

Démonstration. Montrons que i) implique ii). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n-1. Soit alors $u \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$. L'hypothèse de récurrence montre alors que $\partial_t^j\, A^{n-1-j}\partial_t u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$ et $\partial_t^j A^{n-1-j}(t^h Au) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$; d'où $\partial_t^j A^{n-j}u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n$. Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n-1. Soit alors u tel que $\partial_t^j\, A^{n-j}u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n$. D'une part $\partial_t^j\, A^{n-1-j}\, \partial_t u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$; d'autre part $\partial_t^j\, A^{n-1-j}(t^h Au) = \sum_{l=o}^{\inf(h,j)} h(h-1)\ldots(h-l+1)\, t^{h-l}\, A^{n-j}\, A^{n-j}\, \partial_t^{j-l}$ et chaque terme du deuxième membre appartient à $L^2(J;H)$ car $A^{n-j}\, \partial_t^j u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$ ie $u \in H^{n,h}(J)$.

Proposition 3.3. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in H^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $t^{hj}\, A^j\, \partial_t^{n-j}\, u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n$

Démonstration. Montrons que i) implique ii). Le résultat est immédiat d'après la définition de $H^{n,h}(J)$.

Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit alors u tel que $t^{kj}\, A^j\, \partial_t^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n$. On doit montrer que $\partial_t u$ et $t^h A u \in H^{n-1,h}(J)$ ie d'après l'hypothèse de récurrence on doit montrer que $t^{hj}\, A^j\, \partial_t^{n-1-j}(\partial_t u) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$ ce qui est vrai par hypothèse et que $t^{hj}\, A^j\, \partial_t^{n-1-j}(t^h A u) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Or $t^{hj}\, A^j\, \partial_t^{n-1-j}(t^h A u) = \sum_{l=o}^{\inf(h,n-1-j)} h\ldots(h-l+1)\, t^{hj+h-l}$ $A^{j+1}\, \partial_t^{n-1-j-e} u$ et il est facile de vérifier qu'il suffit (en utilisant la proposition 3.2) de démontrer que le résultat est vrai pour des u à support compact au voisinage de $t = 0$; mais pour de telles fonctions l'inégalité de Hardy montre que :

$$\| t^{hj+h-l}\, A^{j+1}\, \partial_t^{n-1-j-l} u \|_{L^2(J;H)} \leq C\, \| t^{h(j+1)}\, A^{j+1}\, \partial_t^{n-(j+1)} u \|_{L^2(J;H)}$$

pour $0 \leq l \leq \inf(h,n-1-j)$. Comme $t^{h(j+1)}\, A^{j+1}\, \partial_t^{n-(j+1)} u \in L^2(J;H)$ il s'en suit que $t^{hj}\, A^j\, \partial_t^{n-j-1}(t^h A u) \in L^2(J;H)$.

Remarque 3.1. On peut même montrer que $u \in H^{n,h}(J)$ si et seulement si $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $\partial_t^n u$ et $t^{hn}\, A^n u \in L^2(J;H)$.

On va caractériser l'espace $H^{n,h}(J)$ à l'aide de l'opérateur $t^{\frac{h-1}{2}}\, A^{\frac{1}{2}}$ et d'un opérateur Z du type :

$$Z = \partial_t + d t^h A$$

où d est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}\, d > 0$.

<u>Proposition 3.4</u>. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in H^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J:H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour $o \leqslant j \leqslant n$.

<u>Démonstration</u>.

<u>1ère étape</u>. On démontre que $H^{n,h}(J)$ coïncide avec l'espace $K^{n,h}(J)$ défini par :

$$K^{o,h}(J) = L^2(J;H)$$

$$K^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty}) \ ; \ Zu, \ t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)\} \quad \text{pour}$$

$n \geqslant 1$.

Tout d'abord si u est à support compact dans J on a par intégration par parties :

$$h\left|\left|t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u\right|\right|^2_{L^2(J;H)} = -2\mathrm{Re} \int_J (\partial_t u, t^h A u)_o dt$$

d'où en décomposant :

$$= -2\mathrm{Re} \int_J (Zu, t^h Au)_o dt + 2\mathrm{Re}d\left|\left|t^h Au\right|\right|^2_{L^2(J;H)}$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(2\ \mathrm{Re}d-\varepsilon)\left|\left|t^h Au\right|\right|^2_{L^2(J;H)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left|\left|Zu\right|\right|^2_{L^2(J;H)} + h\left|\left|t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u\right|\right|^2_{L^2(J;H)}$$

De la première égalité et de cette dernière inégalité on en déduit que si u est à support compact dans J alors u est dans $H^{1,h}(J)$ si et seulement si u est dans $K^{1,h}(J)$. D'autre part si le support de u ne rencontre pas 0 on a aussi cette propriété. D'où l'on déduit que $H^{1,h}(J)$ et $K^{1,h}(J)$ coïncident.

Soit alors $n \geqslant 2$ et supposons que les espaces $H^{j,h}(J)$ et $K^{j,h}(J)$ coïcident pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Montrons que $H^{n,h}(J)$ et $K^{n,h}(J)$ coïncident. Soit $u \in K^{n,h}(J)$ ie Zu et $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$ et soit à montrer que $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J) = K^{n-1,h}(J)$. Il suffit de montrer que $t^h Au \in K^{n-1,h}(J)$. Or $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}}(t^h Au) = t^h A(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in H^{n-2,h}(J) = K^{n-2,h}(J)$

et $Z(t^h Au) = t^h AZu + ht^{h-1} Au \in H^{n-2,h}(J)$ car $Zu \in K^{n-1,h}(J) = H^{n-1,h}(J)$ donc $t^h AZu \in H^{n-2,h}(J)$ et $t^{h-1} Au = t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in K^{n-2,h}(J)$ car $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$. Inversement soit $u \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$ et soit à montrer que Zu et $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$ ie $\partial_t(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) = t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \partial_t u + \frac{h-1}{2} t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-2,h}(J)$ et $t^h A(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in K^{n-2,h}(J)$.

D'après l'hypothèse de récurrence il suffit de montrer que $t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u$ $K^{n-2,h}(J) = H^{n-2,h}(J)$ c'est à dire d'après la proposition 3.3 que $t^{hj} A^j \partial_t^{n-2-j}(t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-2$. Or $t^{hj} A^j \partial_t^{n-2-j}$ $(t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u) = \sum_{l=o}^{\inf(\frac{h-3}{2}, n-2-j)} (\frac{h-3}{2}) \dots (\frac{h-3}{2} - l + 1)\, t^{hj + \frac{h-1}{2} - 1 - l}\, A^{j+\frac{1}{2}}$ $\partial_t^{n-2-j-l} u$ et il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le résultat pour des u à support compact au voisinage de 0. Mais pour de telles fonctions on peut appliquer l'inégalité de Hardy ; or $\partial_t u \in H^{n-1,h}(J)$ donc $t^{hj} A^j \partial_t^{n-1-j} u \in H^{1,h}(J)$, par suite $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{hj} \partial_t^{n-1-j} u \in L^2(J;H)$ et grâce à l'inégalité de Hardy on en déduit que chaque terme du second membre de l'égalité précédente appartient à $L^2(J;H)$.

<u>2ème étape</u>. On démontre la proposition 3.4.

Montrons que i) implique ii). Ce résultat est immédiat d'après la 1ère étape.

Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après la 1ère étape. Soit alors $n \geqslant 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n-1. Soit u tel que $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour

$0 \leqslant j \leqslant n-1$, ce qui est vrai par hypothèse et que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{1}{2}} Z^{n-1-j}(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u)$ $\in L^2(J;H)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Or $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-1-j}(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) = \sum_{l=o}^{\inf(\frac{h-1}{2},n-1-j)}$ $c_l\, t^{\frac{h-1}{2}j + \frac{h-1}{2} - l} A^{\frac{j}{2}+\frac{1}{2}} Z^{n-1-j-l}u$ pour des coefficients complexes c_l et il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le résultat pour des u à support compact au voisinage de $t = 0$. Mais pour de telles fonctions la proposition 4.1 montre que :

$$||t^{\frac{h-1}{2}(j+1)-1} A^{\frac{j+1}{2}} Z^{n-1-j-1}u||_{L^2(J;H)} \leqslant C \sum_{m=o}^{1} ||t^{\frac{h-1}{2}(m+j+1)} A^{\frac{m+j+1}{2}} Z^{n-(m+j+1)}u||_{L^2(J;H)}$$

et le deuxième membre est fini.

Proposition 3.5. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in W^{n,h}(J)$

ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j}u \in W(J)$ pour $0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n$.

Démonstration. Montrons que ii) implique i). Soit donc $u \in \mathcal{D}(J;H^{-\infty})$ tel que $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Z^{p-j}u \in W(J)$ pour $0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n$.

Tout d'abord on en déduit que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j}(Au) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leqslant j \leqslant p \leqslant n$ ie $Au \in H^{n,h}(J)$.

Montrons maintenant que $\partial_t^2 u \quad H^{n,h}(J)$. On a la formule suivante :

$$t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} \partial_t^2 u = \partial_t^2(t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u) + \alpha\, \partial_t(t^{\frac{h-1}{2}j-1} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u) + \beta\, t^{\frac{h-1}{2}j-2} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u$$

$$+ \sum_{m=1}^{\inf(h,n-j)} \gamma_m\, \partial_t(t^{h-m+\frac{h-1}{2}j} A^{1+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m}u)$$

$$\sum_{m=1}^{\inf(h,n-j)} \sum_{l=1}^{\inf(h,n-j-m)} \delta_{ml}\, t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j} A^{2+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m-1} u$$

pour certains coefficients α, β, γ et δ ; certains termes disparaisent pour $h = 1$. Or $\partial_t^2(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u) \in L^2(J;H)$ par hypothèse ; $\partial_t(t^{\frac{h-1}{2}j-1} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u)$ $= \partial_t A^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{h-3}{2}} t^{\frac{h-1}{2}(j-1)} A^{\frac{j-1}{2}} Z^{n-1-(j-1)}u \in L^2(J;H)$ par hypothèse et $t^{\frac{h-1}{2}j-2}$ $A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u = t^{h-3} At^{\frac{h-1}{2}(j-2)} A^{\frac{j-2}{2}} Z^{n-2-(j-2)}u \in L^2(J;H)$ par hypothèse pour $j \geqslant 2$ et pour $j = 1$ le terme s'écrit $A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{h-1}{2}-2} Z^{n-1}u \in L^2(J;H)$. De plus $\partial_t(t^{h-m+\frac{h-1}{2}j} A^{1+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m}u) = \partial_t(t^{h-m+\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m}Au)$. Or $Au \in H^{n,h}(J)$ donc $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m}u \in H^{1,h}(J)$ pour $m \geqslant 1$ donc $\partial_t(t^{h-m+\frac{h-1}{2}j} A^{1+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m}u)$ $L^2(J;H)$ pour $m = 1,\dots,\inf(h,n-j)$. Enfin $t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j} A^{2+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m-1}u$ peut être majoré en norme dans $L^2(J;H)$, du moins pour des u à support compact, par l'inégalité de Hardy en fonction de $t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j+K} A^{\frac{j+2}{2}} \partial_t^k$ $Z^{n-j-m-1}Au$. Or pour K tel que $m+l-1 \geqslant K \geqslant -h-l+m+1$ ce terme appartient à $L^2(J;H)$ car $Au \in H^{n,h}(J)$.

Ainsi $\partial_t^2 u \in H^{n,h}(J)$.

Montrons maintenant que $t^{h+1}A^2u \in H^{n,h}(J)$. On a la formule suivante :

$$t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}(t^{h+1}A^2u) = t^{h+1} A^2\, t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u + \sum_{m=1}^{\inf(h+1,n-j)} a_m\, t^{\frac{h-1}{2}j+h+1-m} Z^{n-j-m}u$$

pour certains coefficients a_h.

Or $t^{h+1}A^2 t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u \in L^2(J;H)$ par hypothèse. Par l'inégalité de Hardy $t^{\frac{h-1}{2}j+h+1-m} A^{\frac{j}{2}+2} Z^{n-j-h}u$ peut être majoré en norme dans

$L^2(J;H)$ en fonction de $t^{\frac{h-1}{2}(j+1)} A^{\frac{j+2}{2}} \partial_t^{m-2} Z^{n-j-h} Au$ pour $m \geqslant 2$; or ce terme appartient à $L^2(J;H)$. Enfin pour $m = 1$, on écrit $t^{\frac{h-1}{2}j+h} A^{\frac{j}{2}+2} Z^{n-j-1}u$ $= t^h A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-1}Au) \in L^2(J;H)$ car $Au \in H^{n,h}(J)$ donc $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-1} Au$ $\in H^{1,h}(J)$.

Montrons enfin que $t\partial_t Au \in H^{n,h}(J)$. On a la formule suivante

$$t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}(t\partial_t Au) = t\partial_t A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u)$$

$$\sum_{m=1}^{\inf(h+1,n-j)} \alpha_m\, t^{\frac{h-1}{2}j+h-m+1} A^{\frac{j}{2}+2} Z^{n-j-m}u$$

$$+ \beta t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}+1} \partial_t Z^{n-j-1}u$$

Or $t\partial_t A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j}u) \in L^2(J;H)$ par hypothèse. Les termes $t^{\frac{h-1}{2}j+h-m+1}$ $A^{\frac{j}{2}+2} Z^{n-j+m}u$ ont été traités précédemment. Le terme $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}+1} \partial_t Z^{n-j-1}u$ appartient également à $L^2(J;H)$ car $Au \in H^{n,h}(J)$. Ainsi $u \in W^{n,h}(J)$.

Inversement on montre par les mêmes procédés que i) implique ii).

I-4 - PROPRIETES DES OPERATEURS X ET Y.

Soit l'opérateur $Z = \partial_t + dt^h A$ où d est un nombre complexe et h un entier impair $\geqslant 1$. On donne tout d'abord quelques inégalités.

Proposition 4.1. On suppose $\mathrm{Re}\, d > 0$. Etant donnés deux entiers q et $j \geqslant 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour u à support compact dans J, on ait :

$$||t^q u||_{L^2(J;H)} \leqslant C \sum_{l=o}^{j} ||t^{\frac{h-1}{2}l} A^{\frac{l}{2}} t^{q+j-l} Z^{j-l}u||_{L^2(J;H)}$$

Démonstration. Soit un entier p impair >1. On a :

$$\int_J (\partial_t u + bt^h Au, t^p u)_o \, dt = \int_J (Zu, t^p u)_o \, dt$$

Or par intégration par parties on a :

$$2 \operatorname{Re} \int_J (\partial_t u, t^p u)_o \, dt = -p \, \| t^{\frac{p-1}{2}} u \|^2_{L^2(J;H)}$$

De plus :

$$\int_J (t^h Au, t^p u)_o \, dt = \| t^{\frac{h+p}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \|^2_{L^2(J;H)}$$

Ainsi :

$$p \| t^{\frac{p-1}{2}} u \|^2_{L^2(J;H)} = -2 \operatorname{Re} \int_J (t^{\frac{p+1}{2}} Zu, \, t^{\frac{p-1}{2}} u)_o \, dt + 2 \operatorname{Re} d \| t^{\frac{h+p}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \|^2_{L^2(J;H)}$$

Comme Red > 0, on en déduit qu'il existe une constente C > 0 telle que :

$$\| t^{\frac{p-1}{2}} u \|_{L^2(J;H)} \leqslant C \left(\| t^{\frac{p-1}{2}+1} Zu \|_{L^2(J;H)} + \| t^{\frac{h+1}{2} + \frac{p-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \|_{L^2(J;H)} \right)$$

Soit en posant : $q = \frac{1}{2}(p-1)$

$$\| t^q u \|_{L^2(J;H)} \leqslant C \left(\| t^{q+1} Zu \|_{L^2(J;H)} + \| t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u \|_{L^2(J;H)} \right)$$

C'est le résultat annoncé pour j = 1. Le cas général se démontre par récurrence sur j.

Proposition 4.2. On suppose Red < 0. Etant donnés deux entiers q et j $\geqslant 0$ il existe une constante C > 0 telle que pour tout u à support compact dans J on ait :

$$\| t^q u \|_{L^2(J;H)} \leqslant C \, \| t^{q+j} Q^j u \|_{L^2(J;H)}$$

$$||t^{q+j\frac{h-1}{2}} A^{\frac{j}{2}}u||_{L^2(J;H)} \leqslant C\ ||t^q Z^j u||_{L^2(J;H)}$$

$$||t^{q+jh}\ A^j u||_{L^2(J;H)} \leqslant C\ ||t^q Z^j u||_{L^2(J;H)}$$

<u>Démonstration</u>. Comme on l'a vérifié dans la démonstration précédente on a :

$$(2q+1)||t^q u||^2_{L^2(J;H)} = -2\ \mathrm{Re}\int_J (t^{q+1}Zu,\ t^q u)_o\ dt + 2\ \mathrm{Re}d\ ||t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}}u||^2_{L^2(J;H)}$$

D'où comme Red < 0 :

$$(2q+1)||t^q u||^2_{L^2(J;H)} \leqslant -2\ \mathrm{Re}\int_J (t^{q+1}Zu,\ t^q u)_o\ dt$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc :

$$(2q+1-\varepsilon)||t^q u||^2_{L^2(J;H)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||t^{q+1}Zu||^2_{L^2(J;H)}$$

C'est la première inégalité pour $j = 1$. Le cas général se démontre par récurrence sur j.

De la première égalité ci-dessus on en déduit :

$$(-2\mathrm{Re}d)||t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}}u||^2_{L^2(J;H)} \leqslant ||t^{q+1}Zu||^2_{L^2(J;H)} + ||t^q u||^2_{L^2(J;H)}$$

Compte tenu de l'inégalité précédente on en déduit la deuxième inégalité, pour $j = 1$ de la proposition 4.2. Le cas général se démontre par récurrence sur j.

Enfin par intégration par parties on a :

$$(2q+h)||t^{\frac{h-1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}}u||^2_{L^2(J;H)} = 2\ \mathrm{Re}\int_J (t^q Zu,\ t^{h+q}Au)_o\ dt$$

$$+ 2\ \mathrm{Re}d||t^{h+q}Au||^2_{L^2(J;H)}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc :

$$(-2\ \mathrm{Red}-\varepsilon)\,||t^{h+q}Au||^2_{L^2(J;H)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||t^q Zu||^2_{L^2(J;H)}$$

C'est la troisième inégalité de la proposition 4.2. Le cas général se démontre par récurrence sur j.

On rappelle maintenant un résultat de résolubilité locale relatif à l'opérateur Z démontré par [ ]:

Définition 4.1. On dit que Z est localement résoluble en $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que pour tout $f \in C_0^\infty(J;H)$ il existe $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tel que $Pu = f$.

Proposition 4.3. L'opérateur Z est localement résoluble (resp. hypoelliptique) en $t = 0$ si et seulement si $\mathrm{Red} > 0$ (resp > 0).

Démonstration. Cf [ ]. On note maintenant $X = \partial_t + atA$ et $Y = \partial_t + bt^hA$ où k est un entier. On a les formules de concaténation suivantes.

Proposition 4.4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des coefficients complexes e_p et f_p pour $1 \leqslant p \leqslant \inf(k,n+1)$ tels que :

$$Y^n(XY+cA) = (XY + (c+na)A)Y^n + \sum_{p=1}^{\inf(k,n+1)} e_p\, t^{k-p}\, AY^{n-p+1}$$

$$X^n(XY+cA) = (XY + (c-na)A)X^n + \sum_{p=1}^{\inf(k,n+1)} f_p\, t^{h-p}\, AX^{n-p+1}$$

Démonstration. Un calcul direct montre que :

$$Y(XY+cA) = (XY+(ca)A)Y - bkt^{k-1}AY$$

Puis par récurrence sur n on démontre le résultat général.

On procède de même pour X.

On donne enfin une formule de commutation de X et de Y.

Proposition 4.5. Pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe des coefficients complexes g_p et h_p pour $1 \leqslant p \leqslant \inf(k,n)$ tels que :

$$Y^p X = XY^p + pa\, AY^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k,n)} g_p\, t^{h-p}\, AY^{n-p}$$

$$X^n Y = YX^n - na\, AX^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k,n)} h_p\, t^{h-p}\, AX^{n-p}$$

Démonstration. Un calcul direct montre que :

$$YX - XY = aA - bkt^{k-1}A$$

Puis par récurrence sur n on démontre le résultat général.

Plus généralement :

Proposition 4.6. Pour tous entiers m et $n \geqslant 1$, il existe des polynômes $Q(t;x,y)$ et $R(t;x,y)$ en x et y et à coefficients polynômes en t et des polynômes $p_{jq}(t)$ et $n_{jq}(t)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant j+q \leqslant m$ tels que :

$$Y^n X^m = \sum_{\substack{0<j<n \\ 0<j+q<m}} p_{jq}(t)\, A^j X^{m-q-j} + Q(t;\partial_t,A)Y$$

$$X^n Y^m = \sum_{\substack{0<j<n \\ 0<j+q<m}} r_{jq}(t)\, A^j X^{m-q-j} + R(t;\partial_t,A)X$$

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$. La proposition montre que :

$$YX^m = ma\, AX^{m-1} + \sum_{j=1}^{\inf(k,m)} h_j\, t^{k-j}\, AX^{m-j} + X^m Y.$$

Puis par récurrence sur n on démontre la formule générale.

On procède de même pour l'autre formule.

I-5 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPOELLIPTICITE LORSQUE Rea < 0 ET Reb > 0.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 5.1. *On suppose* $\mathrm{Re}\,a < 0$ *et* $\mathrm{Re}\,b > 0$*. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

i) il existe un entier $n_o \geq 0$ *tel que étant donnés un entier* $n \geq n_o$ *et un intervalle ouvert* J *de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0*, pour toute distribution* $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ *alors* $Pu \in H^{n,k}_{loc}(J)$ *implique* $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$*.*

ii) $\frac{c}{a} \neq -p$ *pour tout entier* $p \geq 0$*.*

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

I-5.1 : Démonstration de la condition nécessaire d'hypoellipticité.

On transforme tout d'abord la propriété d'hypoellipticité de P sous forme d'une estimation.

Proposition 5.1. On suppose que étant donnés un entier $n \geq 0$ et un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ alors $Pu \in H^{n,k}_{loc}(J)$ implique $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$. Alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C^\infty_o(-T,T;H^{\ \ })$ on ait :

$$||u||_{W^{n,k}(-T,T)} \leq C\ ||Pu||_{H^{n,k}(-T,T)}$$

Démonstration. Par un procédé classique (cf. [ ] par exemple) on montre que pour tout compact K de J et tout $\theta_1 \in C^\infty_o(J)$, il existe $\theta_2 \in C^\infty_o(J)$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $u \in W^{n,k}_{loc}(J)$, on ait :

$$||\theta_1 u||_{W^{n,k}(J)} \leqslant C\, (||\theta_2 Pu||_{H^{n,h}(J)} + ||u||_{L^2(J;H)})$$

De là on déduit qu'il existe T' > 0 et C' > 0 tels que pour tout $u \in C_o^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$||u||_{W^{n,k}(J)} \leqslant C'(||Pu||_{H^{n,k}(J)} + ||u||_{L^2(J;H)})$$

Comme de plus :

$$||u||_{L^2(J;H)} \leqslant T'||\partial_t u||_{L^2(J;H)} < T'||u||_{W^{n,k}(J)}$$

On en déduit alors le résultat.

On peut alors démontrer la condition nécessaire d'hypoellipticité pour l'opérateur p.

Proposotion 5.2. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$, $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_o^\infty(-T,T;H^\infty)$ on ait :

$$||u||_{W^{n,k}(-T,T)} \leqslant C\, ||Pu||_{H^{n,k}(-T,T)}$$

Alors $\frac{c}{a} \neq -q$ pour tout q entier $\geqslant 0$.

Démonstration. Supposons qu'il existe q entier $\geqslant 0$ tel que $c + qa = 0$. Appliquons l'hypothèse à $X^q u$ pour $u \in C_o^\infty(J;H\ )$ où $J =]-T,T[$:

$$||X^q u||_{W^{n,k}(J)} \leqslant C\, ||PX^q u||_{H^{n,k}(J)}.$$

Or d'après la proposition 4.4 on en déduit puisque c+qa = 0.

$$PX^q = X^{q+1}Y - \sum_{l=1}^{\inf(k,q+1)} f_l\, t^{k-p}\, AX^{q-l+1}$$

De plus :

$$Y^{p-h}(t^{h-1}u) = \sum_{j=o}^{\inf(k-1,p-h)} g_j \; t^{k-1-j} \; Y^{p-h-j}u$$

pour certains coefficients complexes g_j.

Utilisant alors les équivalences de normes données par les propositions 3-5 et 3-4, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in C_o^\infty(J;H^\infty)$ on ait :

$$\sum_{o<h<p<n} ||t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}X^q u||_{W(J)} \leqslant C \sum_{o<h<p<n} ||t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} X^{q+1} Yu||_{L^2(J;H)}$$

$$+ \sum_{o\leqslant h\leqslant p\leqslant n} \; \sum_{1\leqslant l\leqslant \inf(k,q+1)} \; \sum_{o\leqslant j\leqslant \inf(k-1,p-h)} ||t^{\frac{h-1}{2}h+k-1-j} A^{\frac{h}{2}h} Y^{p-h-j}$$

$$X^{q+1-l}u||_{L^2(J;H)}$$

On va montrer que chaque terme du second membre est de la forme $||QYu||_{L^2(J;H)}$ où Ψ est un "opérateur en ∂_t et A" ou bien peut être "absorbé" par un terme du premier membre à condition que u soit à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

D'après la proposition 4.6 on a :

$$||t^{\frac{h-1}{2}h+k-1-j} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h-j} X^{q+1-l}u||_{L^2(J;H)} \leqslant C(||QYu||_{L^2(J;H)}$$

$$+ \sum_{\substack{o\leqslant r\leqslant p-h-j \\ o\leqslant s+r\leqslant q+1-l}} ||t^{\frac{h-1}{2}h+k-1-j} A^{r+\frac{h}{2}} X^{q+1-l-s-r}Au||_{L^2(J;H)})$$

En utilisant la proposition 4.2 et l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$||t^{\frac{h-1}{2}h+k-1-j} A^{r+\frac{h}{2}} X^{q+1-l-s-r} Au||_{L^2(J;H)}$$

$$\leqslant C \; ||t^{\frac{h-1}{2}h+k-j-1-s+r+n-h} A^{\frac{h}{2}} \partial_t^{n-h} X^q Au||_{L^2(J;H)}$$

Or $r \leqslant p-h-j$ donc $k-j-1+s-r+n-h \geqslant k-1 \geqslant 2$; on en déduit donc que ce terme peut être absorbé par $||X^q u||_{W^{n,h}(J)}$ pour u à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

En conséquence il existe un entier $m \geqslant 0$ et deux constantes $T' > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_o^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$||X^q u||_{W^{n,k}(J)} \leqslant C \sum_{j+h\leqslant m} ||\partial_t^j A^h Y u||_{L^2(J;H)}$$

Or d'après la proposition 4.2 :

$$||u||_{L^2(J;H)} \leqslant C \, ||X^q u||_{L^2(J;H)}$$

Ainsi il existerait $T' > 0$, $C' > 0$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que pour tout $u \in C_o^\infty(-T',T';H^\infty)$ on ait :

$$||u||_{L^2(J;H)} \leqslant C' \sum_{j+h\leqslant m} ||\partial_t^j \, A^h \, Y u||_{L^2(J;H)}$$

Or une telle inégalité entraînerait que $Y^+ = -(\partial_t - \bar{b}t^k A)$ est localement résoluble en $t = 0$ (cf. [ ]) ; ce qui n'est pas d'après la proposition 4.3.

I-5.2 : Démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité.

La démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité de P est basée sur le résultat de régularité suivant :

Proposition 5.3. On suppose que $\mathrm{Re}\, a < 0$ et $\mathrm{Re}\, b > 0$, qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$ et $\frac{c}{a} \neq 0,\dots,-(n-1)$. Alors il existe $T > 0$ tel que pour u vérifiant :

$$t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in V(-T,T) \text{ pour } 0\leqslant h\leqslant p\leqslant n$$

$$t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} \, Pu \in L^2(-T,T;H) \text{ pour } 0\leqslant h\leqslant p\leqslant n \text{ (ie } Pu \in H^{n,h}(-T,T))$$

alors $t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in W(-T,T)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ (ie $u \in W^{n,h}(-T,T)$)

<u>Démonstration</u>. 1 - On démontre le résultat pour $h = 0$ ie $Y^p u \in W(J)$ pour $0 \leq p \leq n$ où $J =]-T,T[$. Cette démonstration est faite par récurrence sur p.

1.1 - On montre tout d'abord que $Y^n u \in W(J)$. Comme $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$ il suffit d'après le corollaire 2.2 que $Y^n u \in V(J)$ et que $(XY+(c+na)A)Y^n u \in L^2(J;H)$. Or par hypothèse $Y^n u \in V(J)$, $Y^n Pu \in L^2(J;H)$ et $t^{k-p}AY^{n-p+1}u \in L^2(J;H)$ pour $1 \leq p \leq \inf(k,n+1)$ car $t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{n-h}u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq n$. Tenant compte de la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a le résultat recherché.

1.2 - On suppose que pour un p donné avec $1 \leq p \leq n-1$ on a $Y^q u \in W(J)$ pour $p+1 \leq q \leq n$. On montre alors que $Y^p u \in W(J)$.

Pour cela on calcule :

$$Y^p Pu - Y^{p+2}u = (Y^p X - XY^p)Yu + (X-Y)Y^{p+1}u - cAY^p u$$

d'après la proposition 4.5 :

$$= (pa+c+g_1 t^{k-1})AY^p u + \sum_{h=2}^{\inf(k,p)} g_h\, t^{k-h} AY^{p-h+1} + (a-bt^{k-1})tAY^{p+1}u.$$

Or $Y^p Pu \in L^2(J;H)$ par hypothèse, $t^{k-h}\, AY^{p-h+1}u \in L^2(J;H)$ pour $2 \leq h \leq \inf(k,p)$ car $t^{\frac{h-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ par hypothèse, $Y^{p+2}u \in L^2(J;H)$ car $Y^{p+1}u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence et $AY^{p+1}u \in L^2(J;H)$ car $Y^{p+1}u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence. De là on en déduit que si $pa+c \neq 0$ il existe T éventuellement plus petit que le précédent tel que $AY^p u \in L^2(J;H)$ avec $J =]-T,T[$.

Par suite pour tout nombre complexe λ, compte tenu de l'hypothèse $Y^p Pu \in L^2(J;H)$ on a $Y^p(XY-\lambda A)u \in L^2(J;H)$. Or $t^{k-h}AY^{p+1-h}u \in L^2(J;H)$

pour $1\leqslant h\leqslant \inf(k,p+1)$. Donc d'après la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a $(XY+(\lambda+pa)A)Y^p u \in L^2(J;H)$ avec $Y^p u \in V(J)$; le corollaire 2.2 montre alors que $Y^p u \in W(J)$ dès que $-(|a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda+pa)\bar{a}) > 0$.

1.3 - On montre enfin que $u \in W(J)$.

Pour cela on calcule :

$$Pu - Y^2 u = (a-bt^{k-1})\, tAYu + cAu.$$

Or $Pu \in L^2(J;H)$, $Y^2 u \in L^2(J;H)$ car $Yu \in V(J)$ par hypothèse et $(a-bt^{k-1})\, tAYu \in L^2(J;H)$ car $Yu \in W(J)$ d'après 1.2. De là on en déduit que si $c \neq 0$ alors $Au \in L^2(J;H)$. On termine comme en 1.2.

2 - Soit maintenant h tel que $1\leqslant h\leqslant n-1$ et supposons que $t^{\frac{k-1}{2}l} A^{\frac{l}{2}} Y^{p-l} u \in W(J)$ pour $0\leqslant l\leqslant p\leqslant n$ avec $l\leqslant h-1$. Montrons que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(J)$ pour $h\leqslant p\leqslant n$.

2.1 - On montre d'abord par récurrence sur p que $At^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in L^2(J;H)$. Pour $p = h$ on doit montrer que $At^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} u \in L^2(J;H)$.

Pour cela on calcule :

$$A^{\frac{h}{2}} X(t^{\frac{k-1}{2}h} Yu) - A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Pu = -\, ct^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{k}{2}+1} u - \frac{k-1}{2}h\, A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Yu$$

Or ;

$A^{\frac{h}{2}} \partial_t (t^{\frac{k-1}{2}h} Yu) = A^{\frac{1}{2}} \partial_t \left(t^{\frac{k-1}{2}}\, t^{\frac{h-1}{2}(h-1)} A^{\frac{k-1}{2}} Y^{h-(h-1)} u\right) \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (en h).

$A^{\frac{h}{2}}\, t\, At^{\frac{k-1}{2}h} Yu = t^{\frac{k+1}{2}} A^{\frac{3}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{h-(h-1)} u \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (en h).

Donc $A^{\frac{k}{2}} X(t^{\frac{k-1}{2}h} Yu) \in L^2(J;H)$. De plus $A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Pu \in L^2(J;H)$ par hypothèse.

Enfin $A^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Yu = t^{\frac{k-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} Y^{h-(h-1)} u \in L^2(J;H)$. Par suite si

$c \neq 0$ alors $A\, t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} u \in L^2(J;H)$.

Soit alors p tel que h+1 p n et supposons que $A\, t^{\frac{h-1}{2}h} A^{h}$ $Y^{q-h}u \in L^2(J;H)$ pour $h \leq q \leq p-1$ et montrons le pour q = p. Pour cela on forme :

$$A^{\frac{h}{2}}(Xt^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1}u) - A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h}Pu = (-c-(p-h)a+g_1 t^{k-1})\, t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u$$

$$- \sum_{l=2}^{\inf(k,p-h)} g_l\, t^{k-l+\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h-l+1}u - \frac{k-1}{2}h\, A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Y^{p-h+1}u$$

Or :

$A^{\frac{h}{2}}\partial_t(t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1}u) = A^{\frac{1}{2}}\partial_t(t^{\frac{k-1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)}u) \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (en h).

$A^{\frac{h}{2}} tAt^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1}u = t^{\frac{k+1}{2}} A^{\frac{3}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)}u \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (en h).

Donc : $A^{\frac{h}{2}} X\, t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1}u \in L^2(J;H)$. De plus $A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h}Pu \in L^2(J;H)$ par hypothèse :

$t^{h-l+\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h+1-l}u = t^{k-2}A(t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{(p-l+1)-h}u) \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (pour $q = p-l+1$ avec $2 \leq l \leq p-h$).

Enfin $A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Y^{p-h+1} = t^{\frac{k-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)}u \in L^2(J;H)$ d'après l'hypothèse de récurrence (en h).

Ainsi si $c+(p-h)a \neq 0$, il existe T éventuellement plus petit que le précédent tel que $A\, t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in L^2(J;H)$ avec $J =]-T,T[$.

2.2 - On montre maintenant que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in W(J)$ pour $h \leq p \leq n$. De 2.1 on déduit que pour tout nombre complexe J compte tenu de l'hypothèse $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}Pu \in L^2(J;H)$ on a $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}(XY+\lambda A)u \in L^2(J;H)$

Or $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} t^{k-1} AY^{p-h-2+l} u \in L^2(J;H)$ pour $1 \leq l \leq \inf(k,p-h+1)$ d'après 2.1.

Donc d'après la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a : $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} (XY+(\lambda+(p-h)aA)Y^{p-h}u \in L^2(J;H)$. Or $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h+l} u \in L^2(J;H)$ comme on l'a déjà vu et $X(t^{\frac{k-1}{2}h-1} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u) \in L^2(J;H)$ comme on le vérifie par des méthodes analogues aux précédentes. Par suite $(XY + (\lambda+(p-h)a)A)$ $(t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u) \in L^2(J;H)$ pour tout λ et $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in L^2(J;H)$. Le corollaire 2.2 montre alors que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in W(J)$.

3 - On démontre enfin que $t^{\frac{k-1}{2}n} A^{\frac{n}{2}} u \in W(J)$.

Le calcul fait en 2.1 pour $p = h$ vaut pour $p = h = n$ d'où l'on déduit que $At^{\frac{k-1}{2}n} A^{\frac{n}{2}} u \in L^2(J;H)$. Puis on termine comme précédemment.

La proposition 5.3 est ainsi démontrée.

On peut alors démontrer la condition suffisante d'hypoellipticité. Soit n_o tel que $-(|a|^2 - 2 \operatorname{Re}(c+n_o a)\bar{a}) > 0$. Soient un entier $n \geq n_o$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une distribution de $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tel que $Pu \in H^{n,h}_{loc}(J)$. En dehors de $t = 0$, P est elliptique ; par suite le résultat de régularité est vrai en dehors de $t = 0$ et il suffit de démontrer cette régularité sur un voisinage $J =]-T,T[$ de 0. Tout d'abord comme $t = 0$ n'est pas caractéristique pour P, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} A^s u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$. Comme on peut supposer $s \leq 0$, l'hypothèse $Pu \in H^{n,h}(J)$ implique que $P(A^s u) \in H^{n,h}(J)$. Donc d'après la proposition précédente 5.3 on en déduit en particulier que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}(A^{s+\frac{1}{2}}u) \in V(J)$ pour $0<h<p<n$. De proche en proche on arrive ainsi à $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h}u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ et $u \in W^{n,h}(J)$ d'après la proposition 5.3.

Remarque 5.1. Lorsque Re $a < 0$ et Re $b > 0$ l'opérateur X est hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y n'est pas hypoelliptique en $t = 0$, d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY + cA$ donnée précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur Y qui n'est pas hypoelliptique.

1-5 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPOELLIPTICITE LORSQUE Re $a > 0$ ET Re $b < 0$.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 6.1. On suppose Rea > 0 et Reb < 0. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un entier $n_o \geq 0$ tel que étant donnés un entier $n \geq n_o$ et un intervalle ouvert J de R contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ alors $Pu \in H^{n,1}_{loc}(J)$ implique $u \in W^{n,1}_{loc}(J)$.

ii) $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geq 1$.

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

Les démonstrations sont analogues au cas précédent (où Rea < 0) ; en fait elles se simplifient notablement puisque les espaces $H^{n,1}$ et $W^{n,1}$ ne font plus intervenir de poids, lorsqu'on les définit à partir des opérateurs $A^{1/2}$ et X. La démonstration de la condition nécessaire utilise l'inégalité.

$$||u||_{W^{n,1}(J)} \leq c\ ||Pu||_{H^{n,1}(J)}$$

que l'on applique à $Y^{q-1}u$ (et non à $Y^q u$, car il y a une commutation de X et de Y à effectuer) si l'on suppose que $-c+qa = 0$ pour un q entier >1. On arrive ainsi à une inégalité qui montrerait que $X^+ = -(\partial_t - atA)$ est localement résoluble en $t = 0$; ce qui n'est pas.

Remarque 6.1. Lorsque $Rea < 0$ et $Reb > 0$ l'opérateur X n'est pas hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y est hypeolliptique en $t = 0$ d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY + cA$ donnée précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur X qui n'est pas hypoelliptique.

I-7 - HYPOELLIPTICITE LORSQUE Rea < 0 ET Reb > 0.

Le principal résultat est le suivant (cf théorème 1.1).

THEOREME 7.1. Si $Rea < 0$ et $Reb < 0$, l'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$.

Démonstration. Pour tout u à support compact dans un intervalle J on a, en reprenant la démonstration de la proposition 4.2 et pour tout $\varepsilon > 0$.

$$(-2 \operatorname{Re} a - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \, ||tAu||_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \, ||Xu||_{L^2(J;H)}$$

d'où :

$$(-2 \operatorname{Rea} - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} ||tYAu||_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \, ||Pu||_{L^2(J;H)} + \frac{|c|}{\varepsilon^{1/2}} ||Au||_{L^2(J;H)}$$

Or toujours d'après la démonstration de la proposition 4.2 pour tout $\eta > 0$:

$$(1-\eta)^{\frac{1}{2}} ||Au||_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\eta^{1/2}} ||tAYu||_{L^2(J;H)}$$

donc :

$$\left((-2 \operatorname{Rea} - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \frac{|c|}{\varepsilon^{1/2}} \frac{(1-\eta)^{1/2}}{\eta^{1/2}}\right) ||tYAu||_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} ||Pu||_{L^2(J;H)}$$

ε étant fixé >0 tel que $(-2\,\mathrm{Re}a-\varepsilon) > 0$, on choisit η assez près de 1 pour que :

$$(-2\,\mathrm{Re}a-\varepsilon)^{1/2} - \frac{|c|}{\varepsilon^{1/2}} \frac{(1-\eta)^{1/2}}{\eta^{1/2}} > 0.$$

Ainsi il existe une constante $C > 0$ pour que pour tout u à support compact dans J on ait :

$$||tAYu||_{L^2(J;H)} \leqslant C\,||Pu||_{L^2(J;H)}$$

et donc toujours d'après la proposition 4.2.

$$||Au||_{L^2(J;H)} \leqslant C\,||Pu||_{L^2(J;H)}$$

A partir de cette estimation il est facile d'en déduire que P est hypoelliptique en $t = 0$.

II - CAS GENERAL.

II-1 - NOTATIONS.

Soit $(E_\lambda)_{-\infty<\lambda<+\infty}$ la résolution spectrale de A (cf [ ]). On utilise les notations de [ ] que l'on rappelle ici.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère les trois projections orthogonales de H définies par les opérateurs $E_{-\varepsilon}$, $E_{+\varepsilon} - E_{-\varepsilon}$ et $I - E_\varepsilon$ et les sous-espaces correspondants $H_- = E_{-\varepsilon}H$, $H_o = (E_\varepsilon - E_{-\varepsilon})H$ et $H_+ = (I-E_\varepsilon)H$. Ces espaces sont orthogonaux deux à deux et déterminent H par $H = H_- \oplus H_o \oplus H_+$. Soit A_- la restriction de A aux éléments de son domaine qui sont dans H_- ; dans H_- l'opérateur A_- est auto-adjoint défini négatif et à inverse borné. Soit A_o la restriction de A aux éléments de H_o ; dans H_o l'opérateur A_o est auto-adjoint et borné. Enfin soit A_+ la restriction de A aux éléments de son domaine qui appartiennent à H_+ ; dans H_+ l'opérateur A_+ est auto-adjoint, défini positif et à inverse borné. Ces trois opérateurs déterminent l'opérateur A par $A = A_- + A_0 + A_+$.

Puisque $-A_-$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif à inverse borné dans H_-, on peut définir comme en I la famille d'espaces de Sobolev H_-^s pour $s \in \mathbb{R}$. De même puisque A_+ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné dans H_+, on peut définir la famille d'espaces de Sobolev H_+^s pour $s \in \mathbb{R}$. On pose alors $H^s = H_-^s \oplus H_0 \oplus H_+^s$ et on définit comme en I les espaces $C^\infty(J;H^\infty)$ et $\mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de $\mathbb{R}$ si pour tout sous-ensemble ouvert J, de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tels que $Pu \in C^\infty(J;H^\infty)$ alors $u \in C^\infty(J';H^\infty)$.

On dit que P est hypoelliptique au point $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J.

II-2 - CONDITION SUFFISANTE D'HYPOELLIPTICITE QUAND Rea Reb < 0.

L'opérateur P est le même qu'en I.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 2.1. Si Rea Reb < 0 et si $\frac{c}{a}$ n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$ alors P est hypoelliptique en $t = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple Rea > 0 et Reb < 0.

Si $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geq 1$ le théorème 1.1 de I montre que l'opérateur :

$$P_+ = (\partial_t + at\,A_+)\,(\partial_t + bt^k\,A_+) + cA_+$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_+.

Si $\frac{c}{a} \neq -p$ pour tout entier $p \geqslant 0$ la théorème 1.1 de I montre que l'opérateur :

$$P_- = (\partial_t + (-a)t(-A_-))(\partial_t+(-b)t^k(-A_-)) + (-c)(-A_-)$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_-.

Enfin l'opérateur :

$$P_o = (\partial_t + at\, A_o)\ (\partial_t + bt^k\, A_o) + c\, A_o$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_o puisque A_o est un opérateur borné dans H_o.

Comme P est égal à $P_- + P_o + P_+$ on en déduit que P est hypoelliptique en $t = 0$ dès que $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier p de $\mathbb{Z}$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] : ARAMAKI J. - Some remarks on local solvability and hypoellipticity second order abstract evolution equations,
J. of Hokkaïds University (1976), 302-307.

[2] : BOLLEY P. - CAMUS J. et HELFFER B. - Remarques sur l'hypoellipticité,
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (29.11.1976), série A, 979-982.

[3] : GIGLIOLI A. - A class of second order evolution equations with double characteristics,
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. IV, Ser 3, (1976) 187-229.

[4] : GIGLIOLI A. et TREVES F. - An example in the solvability theory of linear PDE'S,
Am. J. Math 96 (1974), 366-384.

[5] : GRUSIN V.V. - On a class of hypoelliptic operators,
Math. Sbornik 83 (125) (1970), 456-573.

[6] : MENIKOFF A. - Some examples of hypoelliptic partial differential equations.

[7] : TREVES F. - Concatenation of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity,
Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 201-205.

[8] : YOSIDA K. - Functional analysis,
Springer Verlag, Berlin, 1966.