D. LÉPINGLE
J. MÉMIN

Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A9_0>

INTEGRABILITE UNIFORME ET DANS L^r DES MARTINGALES EXPONENTIELLES

par D.Lépingle et J.Mémin

La question de la continuité absolue de deux mesures de probabilité associées à des processus aléatoires, qui se ramène à celle de l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles positives, est un problème important en théorie du filtrage stochastique, et la recherche de conditions suffisantes a donné lieu à de nombreux travaux; citons [1,2,3,4,5,7,8] pour ne parler que des plus récents.

Dans la première partie de cette étude, nous donnons des conditions obtenues en [4] une version un peu plus générale permettant en particulier d'améliorer un résultat de Kazamaki [2]. La deuxième partie est consacrée à l'étude de conditions assurant la L^r-intégrabilité des martingales exponentielles $\mathcal{E}(M)$. Yen dans [8] donne deux résultats dans cette direction; utilisant [4] et nous inspirant de [8] nous généralisons certains de ces résultats et en donnons de nouveaux.

On se donne comme à l'accoutumée un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$, la filtration étant continue à droite et $\mathcal{F}_0$ contenant tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Les martingales et processus croissants seront adaptés à cette filtration et auront leurs trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche. Les notations utilisées sont celles de l'article [4].

I. Critères d'intégrabilité uniforme.

Si M est une martingale locale nulle en zéro à sauts $\Delta M \geqslant -1$, si $T=\inf\{t>0:\Delta M_t=-1\}$, si μ désigne la mesure aléatoire à valeurs entières associée à ses sauts et si ν désigne son système de Lévy, c'est-à-dire la projection prévisible duale de μ, il a été démontré dans [4] que sous l'une ou l'autre des conditions suivantes

(1) $E\left[\exp\{\frac{1}{2}<M^c,M^c>_\infty+(\operatorname{Log}(1+x)-\frac{x}{1+x}).\mu_\infty\}\right] < \infty \quad , T = \infty$

(2) $E\left[\exp\{\frac{1}{2}<M^c,M^c>_T+((1+x)\operatorname{Log}(1+x)-x).\nu_{T-}\}\right] < \infty \quad ,$

alors $E[\mathcal{E}(M)_\infty]=1$, en rappelant que $\mathcal{E}(M)$ est la martingale locale positive définie par

$$\mathcal{E}(M) = \exp\{M-\frac{1}{2}<M^c,M^c>+(\operatorname{Log}(1+x)-x).\mu\} .$$

Cela étendait le résultat de Novikov [6] portant sur les martingales continues où la condition était

(3) $E\left[\exp \frac{1}{2}<M,M>_\infty\right] < \infty$.

De son côté, Kazamaki [2] a amélioré le résultat de Novikov en obtenant la condition moins restrictive

(4) $E\left[\exp \frac{1}{2}M_\infty\right] < \infty$,

où M est supposée uniformément intégrable et continue.

Pour obtenir (4), Kazamaki part de (3) et applique l'inégalité de Schwarz à une décomposition multiplicative bien choisie. De même, on peut,en modifiant légèrement les méthodes qui permettaient de conclure dans les cas (1) et (2), obtenir deux familles de conditions qui généralisent l'une (1) et (4), l'autre (2) et (4).

I.1. Théorème. Soit $\mathcal{T}$ la famille des temps d'arrêt bornés. Si pour un $\alpha\in[0,1[$ l'une des deux conditions suivantes est réalisée

(5-α) : $T=\infty$ et lorsque S varie dans $\mathcal{T}$, la famille des variables aléatoires

$$\exp\{\alpha M_S+(\frac{1}{2}-\alpha)<M^c,M^c>_S+(\operatorname{Log}(1+x)-x+(1-\alpha)\frac{x^2}{1+x}).\mu_S\}$$

<u>est uniformément intégrable</u> ;

(6-α) : <u>lorsque</u> S <u>varie dans</u> $\mathfrak{T}$, <u>la famille des variables aléatoires</u>

$$1_{\{S<T\}}\exp\{\alpha M_S+(\tfrac{1}{2}-\alpha)<M^c,M^c>_S+\alpha(\mathrm{Log}(1+x)-x).\mu_S+(1-\alpha)((1+x)\mathrm{Log}(1+x)-x).\nu_S\}$$

<u>est uniformément intégrable,</u>

<u>alors</u> $E[\mathcal{E}(M)_\infty] = 1$.

<u>Preuve</u>. a) Montrons d'abord le résultat pour la condition (5-α). Rappelons que si l'on pose comme en [4]

(7) $\tilde{M} = M - <M^c,M^c> - \frac{x^2}{1+x}.\mu$,

alors pour $0\leq\lambda\leq 1$, des inégalités

(8) $\lambda\mathrm{Log}(1+x) \leq \mathrm{Log}(1+\lambda x) \leq \mathrm{Log}(1+x) + (\lambda-1)\frac{x}{1+x}$

valables pour $x>-1$, on déduit

(9) $(\mathcal{E}(M))^\lambda \leq \mathcal{E}(\lambda M) \leq \mathcal{E}(M)\ \exp(\lambda-1)\tilde{M}$.

Si l'on pose ici

(10) $A^{(\alpha)} = \mathrm{Log}\,\mathcal{E}(M) - (1-\alpha)\tilde{M}$,

la condition (5-α) exprime exactement que $T=\infty$ et que la famille $(\exp A_S^{(\alpha)}, S\in\mathfrak{T})$ est uniformément intégrable. On déduit de (8) et de (9) que

(11) $\mathcal{E}(\lambda M) \leq (\mathcal{E}(M))^{(\lambda-\alpha)(1-\alpha)^{-1}}\ \exp(1-\lambda)(1-\alpha)^{-1}A^{(\alpha)}$

(12) $\mathcal{E}(\lambda M) \leq \exp(\lambda-\alpha)\tilde{M}\ \exp A^{(\alpha)}$.

Pour $\alpha\leq\lambda<1$, la condition (5-α) et l'inégalité (11) montrent que la martingale locale positive $\mathcal{E}(\lambda M)$ est uniformément intégrable, car si $C\in\mathcal{F}$ et $S\in\mathfrak{T}$, on obtient en appliquant l'inégalité de Hölder avec $p=(1-\alpha)(\lambda-\alpha)^{-1}$

$$E[1_C\mathcal{E}(\lambda M)_S] \leq (E[1_C\ \exp A_S^{(\alpha)}])^{(1-\lambda)(1-\alpha)^{-1}} .$$

Posons pour $k\geq 1$

$$T_k = \inf\{t>0 : \tilde{M}_t\leq -k\} .$$

D'après (9) et (12), pour $\alpha\leq\lambda\leq 1$,

$$\mathcal{E}(\lambda M)_{T_k} \leq 1_{\{T_k=\infty\}}\mathcal{E}(M)_{T_k}\exp(1-\lambda)k + 1_{\{T_k<\infty\}}\exp(\alpha-\lambda)k \exp A^{(\alpha)}_{T_k}$$
$$\leq \mathcal{E}(M)_{T_k}\exp k + 1_{\{T_k<\infty\}}\exp A^{(\alpha)}_{T_k} \quad ,$$

et cette somme est intégrable et indépendante de λ ; cela prouve l'intégrabilité uniforme de la famille $(\mathcal{E}(\lambda M)_{T_k}\,;\alpha\leq\lambda\leq 1)$; comme de plus, en utilisant (9) sur $\{T_k=\infty\}$ et (11) sur $\{T_k<\infty\}$, on vérifie aisément que $\mathcal{E}(\lambda M)_{T_k}$ tend p.s. vers $\mathcal{E}(M)_{T_k}$ lorsque λ tend vers 1 , cette convergence a également lieu dans L^1 et

$$E[\mathcal{E}(M)_{T_k}] = \lim_{\lambda\to 1} E[\mathcal{E}(\lambda M)_{T_k}] = 1 \ .$$

Mais d'après (10),

$$E[\mathcal{E}(M)_{T_k}\ 1_{\{T_k<\infty\}}] \leq \exp-(1-\alpha)k\ E[\exp A^{(\alpha)}_{T_k}\ 1_{\{T_k<\infty\}}]$$
$$\leq \exp-(1-\alpha)k \sup_{S\in\mathcal{E}} E[\exp A^{(\alpha)}_S] \quad ,$$

ce qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, et ainsi

$$E[\mathcal{E}(M)_\infty] = 1 \ .$$

b) La démonstration pour la condition (6-α) est tout à fait semblable; elle est basée sur la double inégalité démontrée en [4,(3.6)], beaucoup plus difficile à démontrer que (9)

$$(\mathcal{E}(M))^\lambda \leq Z^\lambda \leq \mathcal{E}(M)\exp(\lambda-1)\hat{M} \ , \qquad 0<\lambda\leq 1 \ ,$$

où Z^λ est une martingale locale positive et où

$$\hat{M} = M - \langle M^c,M^c\rangle + (\mathrm{Log}(1+x)-x).\mu - ((1+x)\mathrm{Log}(1+x)-x).\nu \quad ;$$

par conséquent,

$$Z^\lambda \leq (\mathcal{E}(M))^{(\lambda-\alpha)(1-\alpha)^{-1}} \exp(1-\lambda)(1-\alpha)^{-1}B^{(\alpha)}$$

avec

$$B^{(\alpha)} = \mathrm{Log}\,\mathcal{E}(M) - (1-\alpha)\hat{M} \ . \qquad \square$$

On peut remarquer que la condition (5-0) n'est autre que (1), et la condition (6-0) n'est autre que (2). De plus les conditions (5-α) et (6-α) sont de moins en moins restrictives lorsque α croît.

I.2. Proposition. Pour $0\leqslant\alpha<\beta<1$, la condition (5-α) entraîne la condition (5-β) et la condition (6-α) entraîne la condition (6-β).

Preuve. Lorsque $C\in\mathcal{F}$ et $S\in\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} E[1_C \exp A_S^{(\beta)}] &= E[1_C\, \mathcal{E}(M)_S \exp-(1-\beta)\tilde{M}_S] \\ &= E[1_C\, (\mathcal{E}(M)_S)^{(\beta-\alpha)(1-\alpha)^{-1}} (\mathcal{E}(M)_S)^{(1-\beta)(1-\alpha)^{-1}} \exp-(1-\beta)\tilde{M}_S] \\ &\leqslant (E[1_C \exp A_S^{(\alpha)}])^{(1-\beta)(1-\alpha)^{-1}} . \end{aligned}$$

Même chose pour la condition (6-α) . □

Les conditions (5-α) et (6-α) pour $\alpha>0$ ne sont pas faciles à manier puisqu'elles portent sur l'intégrabilité uniforme d'une famille de variables aléatoires. Il est évidemment plus pratique d'avoir à vérifier l'intégrabilité d'une seule variable aléatoire. Dans cette direction nous avons quelques résultats partiels qui permettent notamment de généraliser celui de Kazamaki [2].

I.3. Proposition. Si M est uniformément intégrable jusqu'à l'instant T et si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $E[\exp\{\frac{1}{2}M_\infty+(\mathrm{Log}(1+x)-x+\frac{x^2}{2(1+x)})1_{\{x<0\}}.\mu_\infty\}] < \infty$, $T=\infty$

(ii) $E[\exp\{\frac{1}{2}M_T+\frac{1}{2}((1+x)\mathrm{Log}(1+x)-x).\nu_{T-}\}] < \infty$,

alors $E[\mathcal{E}(M)_\infty] = 1$.

Preuve. Comme $(\mathrm{Log}(1+x)-x+\frac{x^2}{2(1+x)})1_{\{x<0\}}.\mu$ est un processus croissant, la condition (i) montre que le processus

$$\exp\{\tfrac{1}{2}M+(\mathrm{Log}(1+x)-x+\frac{x^2}{2(1+x)})1_{\{x<0\}}.\mu\}$$

est une sous-martingale uniformément intégrable; elle domine le processus $\exp A^{(1/2)}$, par conséquent la famille $(\exp A_S^{(1/2)};S\in\mathcal{C})$ est uniformément intégrable et la condition (5-1/2) du théorème est vérifiée. On a la même démonstration pour (ii) après avoir remarqué que $(\mathrm{Log}(1+x)-x).\mu$ est négatif. □

Nous nous intéresserons maintenant essentiellement à la condition (5-α).

I.4. Lemme. Le processus exp $A^{(\alpha)}$ est une sous- martingale locale de décomposition multiplicative

$$(13)\quad \exp A^{(\alpha)} = \mathcal{E}(\alpha M)\ \exp\{\tfrac{1}{2}(1-\alpha)^2\langle M^c,M^c\rangle+(\mathrm{Log}\tfrac{1+x}{1+\alpha x}-(1-\alpha)\tfrac{x}{1+x})\cdot\mu\}\ ,$$

où le deuxième facteur du membre de gauche est un processus croissant optionnel.

Preuve. On vérifie sans peine la formule (13), et la positivité de $\mathrm{Log}\frac{1+x}{1+\alpha x}-(1-\alpha)\frac{x}{1+x}$, déjà vue en (8).

On pourra remarquer que les définitions de $A^{(\alpha)}$ et de $B^{(\alpha)}$ permettent aussi d'écrire les formules

$$\exp A^{(\alpha)} = (\mathcal{E}(M))^{\alpha}\ \exp(1-\alpha)A^{(0)}$$

$$\exp B^{(\alpha)} = (\mathcal{E}(M))^{\alpha}\ \exp(1-\alpha)B^{(0)}\quad .$$

I.5. Lemme. La condition(5-α) est équivalente à l'assertion suivante

$$(14\text{-}\alpha)\quad T=\infty\ ,\ \mathcal{E}(\alpha M)\ \text{est uniformément intégrable et}\ E[\exp A_\infty^{(\alpha)}] < \infty\quad .$$

Preuve. Il est clair que (5-α) implique (14-α). Réciproquement, (14-α) et la décomposition (13) montrent que exp $A^{(\alpha)}$ est une sous-martingale uniformément intégrable.

I.6. Proposition. Si $\Delta M \geqslant -1+\delta$ pour un $\delta>0$ et $\delta\leqslant 1$, si M est uniformément intégrable, la condition

$$E[\exp\tfrac{1}{1+\delta}M_\infty] < \infty$$

assure l'intégrabilité uniforme de $\mathcal{E}(M)$.

Preuve. On vérifie que si $\beta=\frac{\delta}{1+\delta}$, on a

$$\mathrm{Log}(1+x)-x+\beta\frac{x^2}{1+x} \leqslant 0 \quad\text{et}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{1+\delta} \leqslant 0\quad .$$

La sous-martingale uniformément intégrable $\exp\frac{1}{1+\delta}M$ domine donc le processus $\exp A^{((1+\delta)^{-1})}$, qui est ainsi uniformément intégrable comme il est exigé en $(5-(1+\delta)^{-1})$.

I.7. <u>Proposition. Si</u> M <u>est uniformément intégrable et si l'on a pour un</u> $\alpha\in[0,1]$

(15-α) $T=\infty$, $E[\exp\frac{\alpha}{2-\alpha}M_\infty] < \infty$ <u>et</u> $E[\exp A_\infty^{(\alpha)}] < \infty$,

<u>alors</u> $\mathcal{E}(M)$ <u>est uniformément intégrable</u>.

<u>Preuve</u>. Le cas $\alpha=0$ est clair, $A^{(0)}$ étant un processus croissant. Le cas $\alpha=1$ aussi, c'est le théorème I.8 de [4]. Pour $0<\alpha<1$, on applique la proposition I.6 à $\delta=1-\alpha$ de sorte que la condition $E[\exp\frac{\alpha}{2-\alpha}M_\infty]<\infty$ assure l'intégrabilité uniforme de $\mathcal{E}(\alpha M)$, on termine grâce au lemme I.5. □

I.8. La proposition I.6 généralise le résultat de Kazamaki; en effet, si M est continue ou si M n'admet que des sauts positifs, on peut prendre $\delta=1$ et on retrouve la condition (4); la même implication est obtenue à partir de la proposition I.3.

I.9. La proposition I.7 permet d'obtenir un peu mieux. Supposons en effet M continue et prenons α dans l'intervalle $]\frac{1}{2},\frac{2}{3}[$; la condition (4) entraîne $E[\exp\frac{\alpha}{2-\alpha}M_\infty]<\infty$ puisque $\frac{\alpha}{2-\alpha}<\frac{1}{2}$, et elle entraîne aussi (5-1/2) (proposition I.3), donc aussi (5-α) (proposition I.2), donc finalement $E[\exp A_\infty^{(\alpha)}]<\infty$. Les conditions (15-α) sont bien dans ce cas plus générales que (4).

I.10. La décomposition (13) permet de déduire le résultat du théorème correspondant à $\alpha>0$ du résultat correspondant à $\alpha=0$. Nous partons pour cela de la condition équivalente à (5-α) donnée dans le lemme I.5, c'est-à-dire (14-α). On calcule que

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\alpha M)\ \mathcal{E}({}^{\alpha}M)$$

où ${}^{\alpha}M$ est le processus donné par

$${}^{\alpha}M = (1-\alpha)M - (1-\alpha)\langle M^c,M^c\rangle - \alpha(1-\alpha)\frac{x^2}{1+\alpha x}.\mu \quad .$$

Puisque par hypothèse $\mathcal{E}(\alpha M)$ est uniformément intégrable, il existe une probabilité notée P_α égale à $\mathcal{E}(\alpha M)_\infty.P$, et on vérifie facilement [5] que ${}^{\alpha}M$ est une P_α-martingale locale. La condition (5-0) appliquée à $\mathcal{E}({}^{\alpha}M)$ nous assure que $\mathcal{E}({}^{\alpha}M)$ est uniformément P_α- intégrable si

$$E_\alpha[\exp\{\tfrac{1}{2}\langle{}^{\alpha}M^c,{}^{\alpha}M^c\rangle_\infty+\Sigma_s(\mathrm{Log}(1+\Delta{}^{\alpha}M_s)-\frac{\Delta{}^{\alpha}M_s}{1+\Delta{}^{\alpha}M_s})\}] < \infty \ ,$$

mais c'est précisément

$$E_\alpha\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\,(1-\alpha)^2\langle M^c,M^c\rangle_\infty+\left(\operatorname{Log}\frac{1+x}{1+\alpha x}-(1-\alpha)\frac{x}{1+x}\right).\mu_\infty\right\}\right]<\infty,$$

ce qui s'écrit $E\left[\exp A_\infty^{(\alpha)}\right]<\infty$ d'après (13). Or, dire que $\mathcal{E}({}^\alpha M)$ est une P_α-martingale uniformément intégrable signifie justement que $\mathcal{E}(M)$ est une P-martingale uniformément intégrable.

II. Critères de L^r-intégrabilité.

Dans [8] Yen démontre les théorèmes a) et b) suivants:

Théorème a). Si $\Delta M\geq 0$, et s'il existe une constante k telle que

$$E\left[\exp\frac{k}{2}[M,M]_\infty\right]<\infty$$

alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable avec

$$r=\frac{k}{2\sqrt{k}-1}\quad\text{pour } 1<k\leq 4$$

$$=\frac{2k}{k+2}\quad\text{pour } k\geq 4\,.$$

Théorème b). Si $\Delta M\geq 0$, si M est quasi-continue à gauche et s'il existe une constante k telle que $E\left[\exp\frac{k}{2}\langle M,M\rangle_\infty\right]<\infty$, alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable avec la même valeur de r que pour le théorème a).

Notons que le nombre r obtenu est compris entre 1 et 2. Nous nous proposons de compléter ces résultats dans trois directions: lorsque les sauts de M ne sont pas nécessairement d'amplitude positive, lorsque $r\geq 2$ et lorsque M n'est pas quasi-continue à gauche. Ces résultats contiennent le théorème b) mais non le théorème a).

Nous nous sommes intéressés surtout ici aux questions du type suivant: quelles hypothèses sur $[M,M]$, $\langle M,M\rangle$ et les sauts de M assurent que $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable pour un r donné?

Nous commençons par donner une série de critères portant sur $[M,M]$.

II.1 . Théorème

a) S'il existe $\delta>0$ tel que $\Delta M \geq -1+\delta$ et si $[M,M]$ est borné , $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable avec $r = (1-\frac{\delta}{2})^{-1}$.

b) Si $\Delta M \geq 0$ et si $[M,M]$ est borné , $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable pour tout r.

Preuve . a) La majoration (11) avec $\alpha=0$ et $0<\lambda<1$ donne

$$\mathcal{E}(\lambda M) \leq (\mathcal{E}(M))^{\lambda} \exp(1-\lambda)A^{(0)} .$$

Comme $\Delta M \geq -1+\delta$,il existe $c>0$ tel que $A^{(0)} \leq c\,[M,M]$,par conséquent on a la majoration

$$\mathcal{E}(\lambda M) \leq (\mathcal{E}(M))^{\lambda} \exp(1-\lambda)c\,[M,M] ,$$

d'où $\mathcal{E}(\lambda M) \leq C\,(\mathcal{E}(M))^{\lambda}$ d'après l'hypothèse.Si l'on choisit un λ tel que $1-\delta<\lambda<1$ et si l'on pose $N = \lambda^{-1}M$,on vérifie que $\Delta N \geq -1+\delta'$ avec $0<\delta'<1$ et en appliquant l'inégalité trouvée à N on obtient $\mathcal{E}(M) \leq C\,(\mathcal{E}(\lambda^{-1}M))^{\lambda}$; d'où pour $t \leq \infty$

$$E\left[\mathcal{E}(M)_t^{1/\lambda}\right] \leq C\,E\left[\mathcal{E}(\lambda^{-1}M)_t\right] \leq C .$$

b) Lorsque $\Delta M \geq 0$, on peut prendre pour λ tout nombre de l'intervalle $]0,1[$ donc $1/\lambda$ arbitrairement grand.

Remarque. On ne peut guère se passer de restrictions sur les sauts de M pour obtenir des conditions d'intégrabilité uniforme à partir de $[M,M]$; en effet il est facile de trouver une martingale locale $\mathcal{E}(M)$ non uniformément intégrable telle que $[M,M]$ soit borné. Voici un exemple donné par P.A.Meyer:soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible , $A = 1_{[\![T,\infty[\![}$ et $\tilde{A}$ son compensateur prévisible ;on considère $M = \tilde{A} - A$, on a alors $[M,M] = A \leq 1$ mais $\mathcal{E}(M)_\infty = 0$ p.s.

Le résultat suivant, à rapprocher pour la partie a) de [4] théorème I-8 complète le théorème a) de Yen.

II.2. Théorème.

a) Soit $\Delta M \geq -1$ et $r \geq 1$; si M est une martingale uniformément intégrable et si $\exp rM_\infty$ est intégrable, alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable.

b) Soit $\Delta M \geq 0$ et $r \geq 1$; si $E[\exp 2r^2 [M,M]_\infty] < \infty$, alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable.

Preuve. a) Avec les hypothèses, le processus $\exp rM$ est une sous-martingale uniformément intégrable qui domine $(\mathcal{E}(M))^r$, d'où le résultat.

b) On écrit : $\exp rM = \exp\{rM - k[M,M]\} \exp k[M,M]$. Soit $p > 1$ on a l'inégalité:

$$E[\exp rM_\infty] \leq (E[\exp\{prM_\infty - pk[M,M]_\infty\}])^{\frac{1}{p}} (E[\exp \tfrac{p}{p-1} k [M,M]_\infty])^{\frac{p-1}{p}}$$

Mais si $pk = \frac{1}{2} p^2 r^2$ (c'est à dire si $k = \frac{1}{2} pr^2$), le processus $\exp\{prM - \frac{1}{2} p^2 r^2 [M,M]\}$ est une surmartingale positive égale à 1 pour t égal à 0, du fait de la négativité de $-\operatorname{Log}(1+x) + x - \frac{1}{2}x^2$ lorsque $x \geq 0$. Ainsi on a $E[\exp rM_\infty] < \infty$ dès que $\exp \frac{p^2}{2(p-1)} r^2 [M,M]_\infty$ est intégrable. Lorsque $p > 1$ le minimum de $\frac{p^2 r^2}{2(p-1)}$ est obtenu pour $p = 2$; d'où le résultat compte tenu de a) et du fait que l'hypothèse donnée implique l'intégrabilité de $[M,M]_\infty$, donc l'uniforme intégrabilité de M.

Voici maintenant divers critères portant sur $\langle M,M\rangle$.

II-3. Théorème.

a) S'il existe $k > 2$ tel que $E[\exp \frac{k}{2} \langle M,M\rangle_\infty] < \infty$, alors $|\mathcal{E}(M)|$ est L^r-intégrable avec $r = \frac{2k}{2+k}$.

b) Si $\Delta M \geq 0$ et s'il existe $k \in]1,4[$ tel que $E[\exp \frac{k}{2} \langle M,M\rangle_\infty] < \infty$, alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable avec $r = \frac{k}{2\sqrt{k}-1}$.

c) Si $\langle M,M\rangle_\infty$ est borné, $\mathcal{E}(M)$ est L^2-intégrable; si de plus ΔM est borné, alors $\mathcal{E}(M)$ est L^r-intégrable pour tout $r < \infty$.

Preuve. a) La proposition II.1 de [4] nous permet d'écrire

$$(\mathcal{E}(M))^2 = \mathcal{E}(2M+[M,M]) = \mathcal{E}(N+<M,M>) = \mathcal{E}(\tilde{N})\ \mathcal{E}(<M,M>)$$

où $N=2M+[M,M]-<M,M>$ et $\tilde{N}=\int\frac{1}{1+\Delta<M,M>}dN$. La martingale locale $\mathcal{E}(\tilde{N})$ est positive et vaut 1 en t=0. Nous en déduisons l'inégalité

(16) $(\mathcal{E}(M))^2 \leqslant \mathcal{E}(\tilde{N}) \exp <M,M>$,

puis pour $1<r<2$

$$|\mathcal{E}(M)|^r \leqslant (\mathcal{E}(\tilde{N}))^{r/2} \exp \frac{r}{2}<M,M> .$$

L'inégalité de Hölder avec $p=2/r$ nous conduit pour tout $t\leqslant\infty$ à

$$E[|\mathcal{E}(M)_t|^r] \leqslant (E[\mathcal{E}(\tilde{N})_t])^{r/2}\ (E[\exp\frac{r}{2-r}<M,M>_t])^{1-r/2}$$

d'où, puisque $E[\mathcal{E}(\tilde{N})_\infty]\leqslant 1$,

$$E[|\mathcal{E}(M)_t|^r] \leqslant (E[\exp \frac{k}{2}<M,M>_\infty])^{1-r/2}$$

si $r=\frac{2k}{2+k}$, ce qui était le résultat désiré. Notons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur les sauts et en particulier il n'est pas supposé que $\mathcal{E}(M)$ soit positive.

b) Lorsque $\Delta M>-1$, d'après la proposition II.3 de [4], pour tout $\lambda>1$ tel que le processus $W^\lambda=((1+x)^\lambda-1-\lambda x).\mu$ soit localement intégrable, il existe une martingale locale N^λ telle qu'ait lieu la décomposition

(17) $(\mathcal{E}(M))^\lambda = \mathcal{E}(N^\lambda)\ \mathcal{E}(\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)<M^c,M^c>+V^\lambda)$,

où V^λ est le compensateur prévisible de W^λ. Lorsque $\Delta M\geqslant 0$, utilisant l'inégalité

$$(1+x)^\lambda \leqslant 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x^2 \qquad \text{pour } 1\leqslant\lambda\leqslant 2 \ \text{ et } \ x\geqslant 0 ,$$

on obtient $W^\lambda\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x^2.\mu$ et $V^\lambda\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)x^2.\nu$, par conséquent on tire de (17)

$$(\mathcal{E}(M))^\lambda \leqslant \mathcal{E}(N^\lambda) \exp \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)<M,M>$$

et pour $r<\lambda$

$$(\mathcal{E}(M))^r \leqslant (\mathcal{E}(N^\lambda))^{r/\lambda} \exp \frac{1}{2}(\lambda-1)r<M,M> .$$

Cette dernière inégalité permet d'obtenir un résultat meilleur que celui de a) lorsque l'on recherche la L^r-intégrabilité de $\mathcal{E}(M)$ avec des valeurs de r proches de 1 (notons que c'est exactement le principe de démonstration que Yen utilise pour obtenir le résultat analogue avec $[M,M]$ à partir de l'inégalité correspondante $(\mathcal{E}(M))^\lambda \leqslant \mathcal{E}(\lambda M)\exp\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)[M,M]$). Pour finir, on applique l'inégalité de Hölder avec $p=\lambda/r$ et on en déduit que $(\mathcal{E}(M))^r$ est intégrable dès que $\exp\frac{\lambda-1}{2}r\frac{\lambda}{\lambda-r}[M,M]$ l'est. Pour r fixé, on obtient le minimum de $\frac{\lambda-1}{2}r\frac{\lambda}{\lambda-r}$ lorsque $\lambda=\min(r+\sqrt{r^2-r},2)$; on en déduit la relation entre k et r; si $k\geqslant 4$, on retrouve le résultat de a), si $k<4$, on obtient $r=\frac{k}{2\sqrt{k-1}}$.

c) Notons d'abord que de l'inégalité (16) découle l'intégrabilité de $(\mathcal{E}(M))^2$ lorsque $\langle M,M\rangle$ est borné. Considérons maintenant un entier pair n supérieur à 2 et le processus W^n défini en b) égal à $((1+x)^n-1-nx).\mu=\Sigma_{k\geqslant 2}C_n^k x^k.\mu$. Si ΔM est borné par B, on obtient

$$V^n \leqslant \frac{(1+B)^n}{B^2}x^2.\nu$$

et ainsi grâce à (17)

$$(\mathcal{E}(M))^n \leqslant \mathcal{E}(N^n)\ \exp\{\tfrac{1}{2}n(n-1)\langle M^c,M^c\rangle+\frac{(1+B)^n}{B^2}x^2.\nu\} .$$

Puisque $\langle M,M\rangle_\infty$ est borné, on en déduit que pour tout $t\leqslant\infty$

$$E[(\mathcal{E}(M)_t)^n] \leqslant C\ E[\mathcal{E}(N^n)_t] \leqslant C .$$

II.4. <u>Remarque</u>. En reprenant une majoration de W^n, on peut obtenir aussi un critère de L^r-intégrabilité $(2\leqslant r<n)$ lorsque $\langle M,M\rangle$ n'est pas borné mais que l'on a $|\Delta M|\leqslant B$ avec une condition du type $E[\exp k\langle M,M\rangle_\infty]<\infty$. Par exemple, pour obtenir la L^2-intégrabilité de $\mathcal{E}(M)$ lorsque $|\Delta M|\leqslant 1$, il suffit d'avoir $E[\exp 8\langle M,M\rangle_\infty]<\infty$. En effet, puisque $(1+x)^3-1-3x=3x^2+x^3$ est borné par $4x^2$ quand $|x|\leqslant 1$, nous avons ici $|V^3|\leqslant 4x^2.\nu$ et

$$(\mathcal{E}(M))^2 \leqslant (\mathcal{E}(N^3))^{2/3}\ \exp\{2\langle M^c,M^c\rangle+\tfrac{2}{3}4x^2.\nu\}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder avec $p=3/2$ on obtient que $(\mathcal{E}(M))^2$ est intégrable dès que $\exp\{6\langle M^c,M^c\rangle_\infty+8x^2.\nu_\infty\}$ l'est.

II.5. <u>Remarque</u>. La restriction donnée en b) et c) sur l'amplitude des sauts ne peut être levée comme le montre l'exemple suivant.

Soit M le processus défini par $M_t=0$ si $t<1$, $M_t=X$ si $t\geq 1$, où X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-1,+\infty[$ de fonction de répartition F telle que

$$\int_{-1}^{+\infty} x\, F(dx) = 0 \ , \ \int_{-1}^{+\infty} x^2\, F(dx) < \infty \ , \ \int_{-1}^{+\infty} x^{2+\varepsilon}\, F(dx) = \infty \text{ pour tout } \varepsilon>0$$

(on peut prendre par exemple F avec une densité f où

$$\begin{aligned} f(x) &= k\ (x-1)^2 && \text{sur } [-1,+2] \\ &= k'\ (x^3(\operatorname{Log} x)^2)^{-1} && \text{sur }]+2,+\infty[\end{aligned}$$

avec k et k' adéquats). Alors M est une martingale de système de Lévy $\nu(dt,dx)=F(dx)dt$ et l'on calcule que

$$\langle M,M\rangle_t = x^2.\nu_t = (\int_{-1}^{+\infty} x^2\, F(dx))\ 1_{\{t\geq 1\}}$$

est non aléatoire et est borné. Ainsi $\mathcal{E}(M)$ est de carré intégrable mais on a $\mathcal{E}(M)_1=1+X$ et comme $\int_{-1}^{+\infty} (1+x)^{2+\varepsilon}\, F(dx)=\infty$, on vérifie que

$$E[(\mathcal{E}(M)_1)^{2+\varepsilon}] = \infty \ .$$

<u>Références</u>.

[1]. Kabanov,Y.,Liptzer,R.,Shiryayev,A. : Continuité absolue et singularité des probabilités localement absolument continues, à paraître (en russe).

[2]. Kazamaki,N. : On a problem of Girsanov, Tôhoku Mathematical Journal, 29, 4,597-600 (1977).

[3]. Kazamaki,N. : A sufficient condition for the uniform integrability of exponential martingales, à paraître in Toyama Math. Report.

[4]. Lépingle,D.,Mémin,J. : Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 42,175-203 (1978).

[5]. Mémin,J. : Décompositions multiplicatives de semi-martingales exponentielles et application. Sém. de Prob. XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer Verlag 1978.

[6]. Novikov,A. : On an identity for stochastic integrals. Theor. Probability Appl. 17,717-720 (1972).

[7]. Novikov,A. : On conditions for uniform integrability of non-negative martingales. International symposium on stochastic differential equations Vilnius 1978.

[8]. Yen,K. : Critères d'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles, à paraître in Acta Mathematica Sinica (en chinois).