LOUIS-MARIE LE NY

Probabilités stationnaires de réseaux de files d'attente à routages dépendant de l'état et avec plusieurs classes de clients

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-45
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A7_0>

PROBABILITES STATIONNAIRES DE RESEAUX DE FILES D'ATTENTE A ROUTAGES DEPENDANT DE L'ETAT ET AVEC PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS.

Louis-Marie LE NY
Département Génie Electrique
IUT
rue du Clos-Courtel
35000 RENNES

S O M M A I R E

A - DEFINITIONS ET NOTATIONS page 2

A1 - ETATS DU RESEAU R 3
A2 - TAUX DE SERVICE D'UNE CLASSE k 4
A3 - SOUS-RESEAU PROPRE 5
A4 - TAUX DE PROBABILITE STATIONNAIRE u_k, v_k, w_k, z_k 6
A5 - SOUS-RESEAU STANDARD PAR CLASSES 8

B - THEOREMES DE STABILITE 9

B1 - 1er THEOREME DE STABILITE 9
B2 - PROBABILITE NATURELLE ET RESEAU NATUREL PAR CLASSES 11
B3 - 2ème THEOREME DE STABILITE 13
B4 - FLUX DE SORTIE CONDITIONNEL DE CLIENTS D'UNE CLASSE k 16

C - COMPOSITION DE RESEAUX 17

C1 - DEFINITION D'UNE STATION n-ECHANGEABLE PAR CLASSES 17
C2 - THEOREME FONDAMENTAL 17
C3 - THEOREME GENERAL 21

D - RESEAU PARFAIT PAR CLASSES 24

D1 - DEFINITION 24
D2 - PROBABILITE STATIONNAIRE 24
D3 - INTERPRETATION PHYSIQUE 25
D4 - EXEMPLE DE RESEAU PARFAIT PAR CLASSES 25
D5 - STATIONS DUALES PAR CLASSES 26
D6 - THEOREME DE SUBSTITUTION 26
D7 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS FERME 28
D8 - CAS PARTICULIER OU LES ROUTAGES SONT FIXES 31
D9 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS OUVERT 32

E - EXTENSION AU CAS DE LOIS NON EXPONENTIELLES 34

E1 - ETUDE D'UN CAS AVEC UNE SEULE CLASSE DE CLIENTS 34
E2 - CAS OU IL Y A PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS 36

F - CAS OU LES CLIENTS PEUVENT CHANGER DE CLASSE p. 38

F1 - NOTATIONS 38

F2 - THEOREME 38

F3 - PROPOSITION 41

BIBLIOGRAPHIE 44

PROBABILITES STATIONNAIRES DE RESEAUX DE FILES D'ATTENTE A ROUTAGES DEPENDANT DE L'ETAT ET AVEC PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS.

INTRODUCTION

Ce rapport a pour objet de montrer que la probabilité stationnaire d'un réseau de files d'attente comprenant plusieurs classes de clients s'exprime encore sous forme d'un produit de fonctions indépendantes lorsque les probabilités de répartition entre stations (ou routages) dépendent de l'état de tout le réseau moyennant une hypothèse d'"échangeabilité par classes".

Ce rapport reprend les techniques utilisées par J. Pellaumail [1] dans le cas d'une classe de clients.

Dans les paragraphes A, B, C nous donnons les définitions et théorèmes de base dans le cas où les lois de service sont exponentielles. Le paragraphe D concerne un type particulier de réseau appelé réseau parfait ; nous y notons également que, dans le cas où les routages sont fixes, nous retrouvons la formule habituelle donnée par Baskett, Chandy, Muntz et Palacios [2].

Le paragraphe E permet de voir comment les résultats précédents peuvent s'étendre au cas où les lois de service ne sont pas exponentielles.

Enfin, dans le paragraphe F, nous montrons que certains résultats donnés dans les paragraphes A, B, C sont encore valables sous des hypothèses plus larges (possibilité de changement de classes par exemple).

A - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Soit R un réseau fermé markovien ergodique de files d'attente composé de m stations de service $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$, l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$ étant également noté M.

On suppose qu'il y a N clients en circulation dans ce réseau et qu'ils sont répartis en K classes notées $k = 1, 2, \dots, K$.

On envisage d'abord le cas où les clients ne peuvent pas changer de classe.

Pour toute classe k, le nombre total de clients de classe k en circulation dans le réseau R est noté n_k ; on a donc

$$\sum_{k=1}^{K} n_k = N \quad \text{et on pose } n = (n_1, \dots n_k, \dots, n_K)$$

La notion de station que nous considérons est une notion très large : pour nous, une station est un sous-ensemble dont l'évolution interne (discipline de service) est markovienne et indépendante de l'état des autres stations ; de plus on suppose qu'une station ne peut changer d'état que par arrivée ou départ d'un client.

Pour fixer les idées, nous allons donner un exemple de telle station quand il y a 2 classes de clients et 2 serveurs, et quand les lois de service sont exponentielles. La discipline générale est "premier arrivé, premier servi" (PAPS), toutefois chaque client de la classe 2 doit laisser passer avant lui un client (et un seul) de la classe 1 si un tel client se présente. L'état d'une telle station est caractérisé par le nombre de clients de classe 2 situés en queue de file qui n'ont pas encore laissé passer un client de classe 1 avant eux et par l'état général de la file d'attente.

A1 - ETATS DU RESEAU R

Dans toute la suite, sauf modification de l'indice m, on appellera état fondamental du réseau R un m-uple $e = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_m)$ où e_i caractérise l'état de la station S_i. Suivant les cas et suivant les stations ce vecteur e_i pourra, ou non, dépendre de l'ordre d'arrivée des clients dans la station S_i. Par exemple, si la loi de service, pour chaque classe de clients, dans la station S_i, ne dépend que des nombres de clients $(e_{ik})_{1 \leq k \leq K}$ dans les différentes classes, on pourra caractériser l'état de la station S_i par le vecteur $(e_{ik})_{1 \leq k \leq K}$; ceci permet de prendre en compte des priorités mais ne permet pas de prendre en compte une discipline PAPS. Si la discipline de service, à la station S_i, est PAPS, on pourra prendre comme ensemble d'états tous les N-uples $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq \mathbf{N}}$ où E_{ij} désigne l'indice de la classe du $j^{\text{ième}}$ client dans la file d'attente et $E_{ij} = 0$ s'il y a moins de j clients dans la station i.

Les disciplines de service dans les stations et l'ensemble d'états choisi seront toujours supposés tels que :

<u>*A11*</u> : on ne fait pas de distinction entre les éléments d'une même classe,

<u>*A12*</u> : Pour tous les indices i et k, on différencie deux états qui ne correspondent pas à un même nombre de clients de classe k dans la station i.

<u>*A13*</u> : Pour tout sous-réseau ouvert R' extrait du réseau initial et en partant d'un état e' quelconque de R', si un client de classe k quitte le réseau R' en partant de la station i ou rentre dans le réseau R' en allant dans la station i, l'état de R' atteint est unique ; on exclut donc les disciplines du type : on se met en tête ou en queue de la file d'attente avec "une chance sur deux". Il faut noter que cet aspect de l'hypothèse est essentiellement pour la commodité de l'exposition. Cette hypothèse exclut aussi les disciplines du type : on se met en tête ou en queue de la file d'attente de la station en tenant compte de l'état des autres stations. Cet aspect de l'hypothèse est fondamental.

Bien entendu, toutes les définitions qui suivent dépendent de l'ensemble d'états que l'on a choisi ; nous supposons donc que cet ensemble d'états est fixé une fois pour toutes. On le notera E.

Etant donné un état e d'un réseau ouvert R, avec abus de notation, on notera symboliquement $(e + f_{ik})$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k quitte la station S_i et le réseau R, on arrive dans l'état e : si p est une probabilité,

$p(e + f_{ik})$ désignera donc la probabilité de cet ensemble d'états. Compte tenu de A12, l'ensemble d'états choisi est toujours tel que les ensembles $(e + f_{ik})$ sont deux à deux disjoints quand i et k varient. De façon analogue, on notera $(e - f_{ik})$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k rentre dans le réseau ouvert R et dans la station S_i, on atteint l'état e : notons qu'usuellement l'état $(e - f_{ik})$ est unique mais avec nos hypothèses, cette unicité peut ne pas être satisfaite. Si le réseau R est fermé, on définit de même $(e - f_{ik} + f_{jk})$ l'ensemble des états tels que, si un client de classe k va de la station S_j à la station S_i, l'état atteint est e.

Bien entendu, quand on utilisera des réseaux notés R', R" etc... et des états associés e', e", etc... on définira de façon analogue $(e' + f'_{ik})$, $(e'' + f''_{ik})$ etc...

A2 - *TAUX DE SERVICE D'UNE CLASSE k*

Si $G_{ik}(t, t + dt)$ désigne l'évènement :

"un client de la classe k quitte la station S_i entre les instants t et t + dt", on définit *le taux de service de la classe k dans la station S_i* par l'égalité

$$g_{ik}(e) = \lim_{dt \to o} \frac{P[G_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

Ce taux de service $g_{ik}(e)$ peut dépendre de l'état e de tout le réseau R.

Dans le cas où $g_{ik}(e)$ ne dépend que du nombre de clients de classe k dans la station S_i, cette station est dite pure pour la classe k ou encore k-pure. Dans ce cas $g_{ik}(e)$ sera noté $h_{ik}(e_{ik})$. Si une station est k-pure pour tout k = 1, 2, ..., K on dira que cette station est *pure par classes*.

On supposera que le taux de service de la classe k est nul si la station ne contient pas de clients de classe k et strictement positif sinon.

A3 - SOUS-RESEAU PROPRE

Un sous-réseau R de $\check{R}$ est dit *propre* si les 3 conditions suivantes sont réalisées :

a - Pour ce sous-réseau, les taux de probabilité de transfert à l'intérieur du sous-réseau R ne dépendent que de l'état du sous-réseau R .

b - Pour ce sous-réseau, les taux de probabilité pour un client de quitter R ne dépendent que de l'état de R .

c - Pour ce sous-réseau R , quand un client rentre dans ce sous-réseau, la probabilité, pour ce client, d'aller dans telle ou telle station de R ne dépend que de l'état de R .

Dans le cas où l'on considère un tel sous-réseau propre R on considère $a_{ik}(e)$ (resp $b_{ik}(e)$) le taux de probabilité qu'un client de classe k quitte la station i pour aller dans une autre station (resp.à l'extérieur) du sous-réseau R quand l'état de R est e.

Dans ce cas , si l'on note $A_{ik}(t, t + dt)$ l'évènement, "un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et t + dt pour aller dans une autre station de R si l'état de R est e ", on pose :

$$a_{ik}(e) = \lim_{dt \to o} \frac{P[A_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

De même, si $B_{ik}(t, t + dt)$ désigne l'évènement "un client de classe k quitte la station S_i de R entre t et t + dt pour aller à l'intérieur de R si l'état de R est e ", on pose:

$$b_{ik}(e) = \lim_{dt \to o} \frac{P[B_{ik}(t, t + dt)]}{dt}$$

On utilise également $C_{ik}(e)$: probabilité pour un client de classe k d'aller dans la station i de R sachant qu'il rentre dans le sous-réseau R et que ce sous-réseau est dans l'état e. On pose :

$$a_i(e) = \sum_{k=1}^{K} a_{ik}(e) \quad , \quad b_i(e) = \sum_{k=1}^{K} b_{ik}(e) \quad , \quad c_i(e) = \sum_{k=1}^{K} c_{ik}(e)$$

Enfin si l'on considère l'évènement $D_{ij,k}(t, t + dt)$: "un client de classe k va de la station i de R dans la station j de R entre t et t + dt sachant que l'état du sous-réseau R est e", on définit le taux

$$d_{ij,k}(e) = \lim_{dt \to 0} \frac{P[D_{ij,k}(t, t + dt)]}{dt}$$

et $\quad d_{ij}(e) = \sum_{k=1}^{K} d_{ij,k}(e).$

On peut noter que $\sum_{i \in M} C_i(e) = 1$ et $\sum_{j \in M} d_{ij}(e) = a_i(e)$

et que $(a_{ik} + b_{ik})(e)$ est le taux de service $g_{ik}(e)$ de la classe k pour la station S_i dans le sous-réseau R.

Le rapport $\dfrac{d_{ij,k}(e)}{(a_{ik} + b_{ik})(e)}$ est noté $r_{ij,k}(e)$ et est appelé probabilité de répartition d'un client de classe k de la station i vers la station j ou encore routage.

A4 - *TAUX DE PROBABILITES STATIONNAIRES u_k, v_k, w_k, z_k*

On considère un sous-réseau R avec les hypothèses et notations données ci-dessus. R comprend donc m stations; soit S une autre station de service, $\bar{R} = (R,S)$ le réseau fermé constitué de R et S, le nombre de clients dans $\bar{R}$ étant N et le nombre de clients de classe k : n_k pour k = 1, ..., K. Un état fondamental de $\bar{R}$ est noté $\bar{e} = (e, e_s)$ où e est un état de R et e_s un état de S (cf. A1).

Dans ce paragraphe on s'intéresse au réseau $\bar{R}$ en régime stationnaire et on note $p(\bar{e})$ la probabilité stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'être dans l'état $\bar{e}$. On peut noter qu'à chaque état $\bar{e}$ ne correspond qu'un seul état e et réciproquement, donc on pourra confondre $p(\bar{e})$ et p(e).

On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$\boxed{u_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} p(e-f_{ik}+f_{jk})\, d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})}$$

$u_k(e)$ est le taux de probabilité en régime stationnaire et pour $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e, e_s)$ par transfert d'un client de classe k à l'intérieur du sous-réseau R.

On notera $u(e) = \sum_{k=1}^{K} u_k(e)$

De même on définit :

$$\boxed{v_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e-f_{ik})\, c_{ik}(e-f_{ik})} \quad \text{et} \quad v(e) = \sum_{k=1}^{K} v_k(e)$$

$v_k(e)$ est la probabilité en régime stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e, e_s)$ si on sait qu'un client de classe k rentre dans le sous-réseau R.

On pose également :

$$\boxed{w_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e+f_{ik})\, b_{ik}(e+f_{ik})}$$

$w_k(e)$ est donc le taux de probabilité en régime stationnaire pour le réseau $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e, e_s)$ par départ d'un client de classe k du sous-réseau R vers la station S.

Si la station S n'est pas pure par classes, on considère aussi :

$$\boxed{z_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e-f_{ik})\, c_{ik}(e-f_{ik})\, g_k(e-f_{ik})}$$

$z_k(e)$ est le taux de probabilité, en régime stationnaire, et pour $\bar{R}$ d'atteindre l'état $\bar{e} = (e, e_s)$ par départ d'un client de classe k de la station S.

On notera $z(e) = \sum_{k=1}^{K} z_k(e)$

A5 - SOUS-RESEAU STANDARD PAR CLASSES

On dira qu'un réseau fermé $\bar{R}$ est *équilibré par classes* si, pour tout état e et toute classe k, le taux de probabilité de quitter l'état e par transfert d'un client de classe k est égale au taux de probabilité d'atteindre l'état e dans les mêmes conditions.

Pour simplifier les formules, nous noterons h_k le taux de service de la station S pour la classe k et s_k le nombre de clients de classe k dans cette station.

Soit R un sous-réseau propre. On dira que R est un *sous-réseau standard par classes* s'il existe une station S pure par classes telle que le réseau $\bar{R}$ = RUS est un réseau markovien ergodique équilibré par classes et telle que

A5.1 - $(\forall e \in E)\ (\forall k \in [1, K])$ $$\boxed{w_k(e) = h_k(s_k)\ p(e)}$$

avec $w_k(e)$ et p(e) définis en A4. Si $\forall k \in [1,K]$, $\bar{R}$ contient n_k clients de classe k, on dira que $\bar{R}$ est n-standards par classes (où $n = (n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_K)$).

Cette égalité signifie qu'en régime stationnaire le taux de probabilité d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du sous-réseau R est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par arrivée d'un client de la même classe k dans le sous-réseau R.

Le réseau $\bar{R}$ étant équilibré par classes, la condition A5.1 est équivalente à

A5.2 - $(\forall e\ E)(\forall k\ [1, K])$ $$\boxed{u_k(e)+h_k(s_k+1)v_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e)+b_{ik}(e))}$$

Cette égalité signifie que, en régime stationnaire, le taux de probabilité d'atteindre l'état e par arrivée ou par transfert d'un client de classe k dans le réseau R est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R ou par transfert d'un client de classe k dans le réseau R.

B - THEOREMES DE STABILITE

B1 - PREMIER THEOREME DE STABILITE

Soit R un réseau standard par classes. Soit S une station de service pure par classes telle que la condition A5.1 soit satisfaite, c'est-à-dire que

$$(\forall e \in E) \quad (\forall k \in [1,K]) \qquad w_k(e) = h_k(s_k)p(e)$$

On considère une autre station S' pure par classes de taux de service h'_k pour la classe k et on note $\bar{R}' = RUS'$ et p' la probabilité stationnaire pour que le réseau $\bar{R}'$ soit dans l'état (e, e_s).

On pose $$w'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e+f_{ik})\, b_{ik}(e+f_{ik})$$

On rappelle que $e_s = (s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_K)$ où s_k est le nombre de clients de classe k dans la station S quand son état est e_s.

On a alors

B1.1 - $$\boxed{p'(e) = C\, p(e) \prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)}}$$

où C est une constante de normalisation qui ne dépend pas de e.

De plus $(\forall e \in E)$ et $(\forall k \in [1,K])$ on a :

B1.2 - $w'_k(e) = h'_k(s_k)p'(e)$.

Autrement dit si la condition A5.1 est satisfaite relativement à une station de service S pour toute classe k, alors cette condition est satisfaite relativement à n'importe quelle station de service pour toute classe k.

DEMONSTRATION :

On suppose que la probabilité p satisfait à l'égalité

$$w_k(e) = h_k(s_k)\, p(e), \quad \forall e \in E \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, K]$$

On pose $$g_k(q) = \prod_{j=1}^{q} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)}$$

$$u'_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} p'(e-f_{ik}+f_{jk})\, d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})$$

$$u'_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} cp(e-f_{ik}+f_{jk})g(s_1)\ \dots\ g(s_k)\ \dots\ g(s_K)d_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})$$

$$v'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e-f_{ik})\, c_{ik}(e-f_{ik}) = \sum_{i=1}^{m} cp(e-f_{ik})g(s_1)\dots g(s_k+1)\dots$$

$$g(s_K)c_{ik}(e-f_{ik})$$

d'où d'après la définition de $u_k(e)$ et $v_k(e)$ on a

$$u'_k(e) = c\ u_k(e)g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k)\ \dots\ g_K(s_K)$$

$$v'_k(e) = c\ v_k(e)\ g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k+1)\ \dots\ g_K(s_K)$$

d'autre part :

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e+f_{ik})b_{ik}(e+f_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} cp(e+f_{ik})g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k-1)\ \dots\ g_K(s_K)b_{ik}(e+f_{ik})$$

d'où

$$w'_k(e) = c\ w_k(e)g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k-1)\ \dots\ g_K(s_K)$$

or

$w_k(e) = h_k(s_k)p(e),$ d'où :

$$w'_k(e) = c\ h_k(s_k)p(e)g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k-1)\ \dots\ g_K(s_K)$$

mais

$$h_k(s_k)g_k(s_k-1) = h_k(s_k) \prod_{j=1}^{s_k-1} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} = h'_k(s_k)\ g_k(s_k)$$

d'où

$$w'_k(e) = c\ h'_k(s_k)p(e)g_1(s_1)\ \dots\ g_k(s_k)\ \dots\ g_K(s_K)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{w'_k(e) = h'_k(s_k)p'(e)} \qquad \text{pour tout} \quad k \in [1,\ k] \quad \text{et pour tout} \quad e \in E$$

De plus on a :

$$p'(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e)+b_{ik}(e)) = c\ p(e)g_1(s_1)\dots g_k(s_k)\dots g_K(s_K) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e)+b_{ik}(e))$$

or d'après A5.2 on a :

$$p(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}+b_{ik})(e) = h_k(s_k+1)v_k(e)+u_k(e)$$

d'où

$$\begin{aligned} p'(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}+b_{ik})(e) &= c\ g_1(s_1)\dots g_k(s_k)\dots g_K(s_K)u_k(e) \\ &+ c\ g_1(s_1)\dots g_k(s_k)\dots g_K(s_K)h_k(s_k+1)v_k(e) \\ &= u'_k(e)+h'_k(s_k+1)v'_k(e) \end{aligned}$$

p' satisfait donc à la condition d'équilibre par classes en régime stationnaire, donc p' est bien la probabilité stationnaire du réseau markovien ergodique $\bar{R}'$

B2 - PROBABILITE NATURELLE ET RESEAU NATUREL PAR CLASSES

Soit $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$, N un entier et R un sous-réseau standard par classes. Soit S la station pure par classes telle que $h_k(j) = 1$ pour tout $j = 1, \dots, N$ et pour tout $k = 1, \dots, K$. Soit p(e) la probabilité stationnaire de l'état (e, e_s) du réseau $R = \bar{R}US$. Cette probabilité p est appelée *probabilité n-naturelle du sous-réseau R*. Le réseau $\bar{R}$ est appelé le réseau n-naturel par classes associé à R.

Si l'on considère alors une station pure par classes S' de taux de service $h'_k(s_k)$ pour la classe k, soit p'(e) la probabilité stationnaire de l'état $\bar{e}$ = (e, e_s) du réseau $\bar{R}'$= RUS', on a alors :

B21 - $$p'(e) = cp(e) \prod_{j=1}^{s_1} \frac{1}{h'_1(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{1}{h'_k(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{1}{h'_K(j)}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e

CAS PARTICULIER D'UNE STATION :

Soit R un sous-réseau réduit à une station S pure par classes de taux de service $h_k(s_k)$ pour la classe k quand il y a s_k clients de classe k dans cette station.

Alors R est n-standard par classes et sa probabilité n-naturelle vaut

B22 - $$p(s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_K) = C \frac{1}{(\prod_{j=1}^{s_1} h_1(j)) \cdots (\prod_{j=1}^{s_k} h_k(j)) \cdots (\prod_{j=1}^{s_K} h_K(j))}$$

DEMONSTRATION :

R est un sous-réseau propre parce que S est pure par classes. En considérant $\bar{R}$ = SUS' où S' est une station pure par classes de taux de service

$$h'_k(j) = 1, \forall k \in [1,K] \text{ et } \forall j \in [1,N]$$

Montrons d'abord que $\bar{R}$ est équilibré par classes

$$\forall k, \forall e, w_k(e) = p(s_1,\ldots,s_k+1,\ldots,s_K)\ h_k(s_k+1) = p(s_1,\ldots,s_k,\ldots,s_K)$$

donc $\qquad w_k(e) = h'_k(s'_k)\ p(e) \qquad$ (B23)

de même $\forall k, \forall e,\ u_k(e)+h'_k(s'_k+1)v_k(e) = p(s_1,\ldots, s_k-1,\ldots,s_K) = p(e)h_k(s_k)$

B.24

La formule B22 est telle que B23 et B24 soient vraies ce qui prouve que $\bar{R}$ est équilibré par classes et R est standard par classes.

L'unicité de p entraîne que la formule B22 annoncée est exacte.

B3 - *DEUXIEME THEOREME DE STABILITE*

Soit R un sous-réseau n-standard par classes. On suppose que R est couplé avec une station S pure par classes de taux de service h_k pour la classe k. RUS est un réseau fermé et on suppose qu'il y a N clients en circulation dans ce réseau. On rappelle que $n = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$ où n_k est le nombre total de clients de classe k.

Soit $(h^*_k(j))_{\substack{1 \leq k \leq K \\ 1 \leq j \leq n}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On pose $h^*_k(0) = 0$ pour tout k.

Soit R' le sous-réseau déduit de R de la façon suivante :

a - Les probabilités de répartition entre stations sont les mêmes dans R' que dans R.

b - Pour toute station S_i de R', les termes $a'_{ik}(e)$, $b'_{ik}(e)$ et $c'_{ik}(e)$ (cf A3) sont respectivement égaux à $a_{ik}(e)\, h^*_k(n_k - \hat{e}_k)$, $b_{ik}(e)\, h^*_k(n_k - \hat{e}_k)$ et $c_{ik}(e)\, h^*_k(n_k - \hat{e}_k)$.

On a donc aussi, si l'on désigne par $g'_{ik}(e)$ (resp $g_{ik}(e)$) le taux de service pour la classe k de S_i dans R' (resp R),

$$g'_{ik}(e) = g_{ik}(e)\, h^*_k(n_k - \hat{e}_k).$$

Alors on obtient les résultats suivants :

i - R' est un sous-réseau n-standard par classes, c'est-à-dire qu'il existe une station de service S' pure par classes, de taux de service h'_k telle que $\forall k$, $\forall e$, $w'_k(e) = h'_k(s_k)\, p'(e)$ avec $s_k = n_k - \hat{e}_k$

ii - $$\boxed{p'(e) = c\, p(e) \left(\prod_{i=1}^{\hat{e}_1} \frac{h'_1(n_1+1-i)}{h^*_1(n_1-i)} \right) \dots \left(\prod_{i=1}^{\hat{e}_k} \frac{h'_k(n_k+1-i)}{h^*_k(n_k-i)} \right) \dots \left(\prod_{i=1}^{\hat{e}_K} \frac{h'_K(n_K+1-i)}{h^*_K(n_K-i)} \right)}$$

où $\hat{e}_k$ est le nombre de clients de classe k dans R quand il est dans l'état e, p(e) est la probabilité naturelle de R et p'(e) la probabilité stationnaire de R'.

Les états e qui interviennent dans cette formule sont tels que $\forall k \quad \hat{e}_k \neq n_k$ et ainsi $h^*_k(n_k - i) \neq 0 \quad \forall k, \forall i$.

Dans le cas où $\hat{e}_k = n_k$ on peut remarquer que

$$p'(0, s_2, \dots s_K) = 1 - \sum_{i=1}^{n_1} p'(i, s_2, \dots, s_K)$$

Dans le cas d'un état comprenant plusieurs composantes nulles, on itère ce procédé.

On peut ainsi obtenir p'(e) pour tout état e de R.

DEMONSTRATION

Supposons que la probabilité p satisfait à l'égalité

$$\forall e \in E, \forall k \in [1,K] \quad w_k(e) = h_k(s_k).p(e) = p(e) \quad \text{car} \quad h_k(s_k) = 1$$

Posons $l_k(q) = \prod_{i=1}^{q} \dfrac{h'_k(n_k+1-i)}{h^*_k(n_k-i)}$

On a

$$w'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e+f_{ik})b'_{ik}(e+f_{ik}) = \sum_{i=1}^{m} cp(e+f_{ik})l_1(\hat{e}_1)\dots l_k(\hat{e}_k+1)\dots l_K(\hat{e}_K)$$
$$b_{ik}(e+f_{ik})h^*_k(n_k-\hat{e}_k-1)$$

d'où

$$w'_k(e) = c\, w_k(e)l_1(\hat{e}_1)\dots l_k(\hat{e}_k+1)\dots l_K(\hat{e}_K)h^*_k(n_k-\hat{e}_k-1)$$
$$= c\, p(e)l_1(\hat{e}_1)\dots l_k(\hat{e}_k).\frac{h'_k(n_k-\hat{e}_k)}{h^*_k(n_k-\hat{e}_k-1)}.\dots l_K(\hat{e}_K).h^*_k(n_k-\hat{e}_k-1)$$

$$w'_k(e) = p'(e).h'_k(n_k-\hat{e}_k)$$

d'où $\forall k \in [1,K]$ et $\forall e \in E$

$$\boxed{w'_k(e) = h'_k(s_k) \cdot p'(e)}$$

ce qui démontre (i).

De plus on a

$$\forall k \in [1,K] \text{ et } \forall e \in E$$

$$U'_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} p'(e-f_{ik}+f_{ik})d'_{ji,k}(e-f_{ik}+f_{jk})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} c\, p(e-f_{ik}+f_{ik})l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k)l_K(\hat{e}_K)\, d_{ji},k(e-f_{ik}+f_{ik})h^{*}_k(n_k-\hat{e}_k)$$

$$\underline{U'_k(e) = C\, U_k(e)l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k)\ldots l_K(\hat{e}_K)h^{*}_k(n_k-\hat{e}_k)}$$

de même

$$V'_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p'(e-f_{ik})C'_{ik}(e-f_{ik}) = \sum_{i=1} cp(e-f_{ik})l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k-1)\ldots$$

$$l_K(\hat{e}_K)C_{ik}(e-f_{ik})h^{*}_k(n_k+1-\hat{e}_k)$$

$$\underline{V'_k(e) = C\, V_k(e)l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k-1)\ldots l_K(\hat{e}_K)h^{*}_k(n_k+1-\hat{e}_k)}$$

donc :

$$p'(e)\sum_{i=1}^{m}(a'_{ik}(e)+b'_{ik})(e) = cp(e)l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k)\ldots l_K(\hat{e}_K)[\sum_{i=1}^{m}(a_{ik}+b_{ik})(e)]$$

$$h^{*}_k(n_k-\hat{e}_k)$$

$$=cU_k(e)l_1(\hat{e}_1)\ldots l_k(\hat{e}_k)\ldots l_K(\hat{e}_K)\; h^{*}_k(n_k-\hat{e}_k)+v'_k(e).\;\frac{h'(n_k+1-\hat{e}_k)}{h^{*}(n_k-\hat{e}_k}).$$

$$h^{*}_k(n_k-\hat{e}_k)$$

$$= U'_k(e)+v'_k(e)h'(n_k+1-\hat{e}_k)$$

ce qui prouve que p' satisfait à la condition d'équilibre par classes, donc p' est la probabilité stationnaire.

$\tilde{R}' = R'US'$ est donc équilibré par classes et R' est standard par classes.

B4 - FLUX DE SORTIE CONDITIONNEL DE CLIENTS D'UNE CLASSE k.

Soit R un sous-réseau propre et $\bar{R}$ le réseau fermé constitué de R et d'une station S dont le taux de service $g_k(e)$ pour la classe k peut dépendre de l'état e de R.

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble E des états de R. On définit le flux de sortie conditionnel $\nu_k(A)$ de clients de la classe k de R sachant que R est dans l'un des états de A par

B41 - $$\boxed{\nu_k(A) = \{\sum_{e\in A} p(e) \sum_{i=1}^{m} b_{ik}(e)\} \frac{1}{\sum_{e\in A} p(e)}}$$

Si S est une station pure par classes, si R est un sous réseau η-standard par classes et si

$$A = \{e\in E, \forall k, \sum_{i=1}^{m} e_{ik} = N_k\} \text{ où } (N_k)_{1 \leq k \leq K} \text{ est une famille}$$

d'entiers positifs fixes, alors le théorème de stabilité montre que $\nu_k(A)$ ne dépend pas du taux de service pour la classe k dans la station S.

PREUVE - Soit un autre taux de service $h'_k(j)$, alors le 2ème membre de B41 devient :

$$\{\sum_{e\in A} p'(e) \sum_{i=1}^{m} b_{ik}(e)\} \frac{1}{\sum_{e\in A} p'(e)} =$$

$$\frac{\sum_{e\in A} cp(e) \left[\prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_k} \frac{h_k(j)}{h'_k(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)}\right] \sum_{i=1}^{m} b_{ik}(e)}{\sum_{e\in A} cp(e) \left(\prod_{j=1}^{s_1} \frac{h_1(j)}{h'_1(j)} \cdots \prod_{j=1}^{s_K} \frac{h_K(j)}{h'_K(j)}\right)}$$

or chaque terme s_k vaut $n_k - N_k$ et est donc indépendant de $e\in A$, l'expression précédente vaut donc :

$$\frac{\sum_{e\in A} \left(cp(e) \sum_{i=1}^{m} b_{ik}(e)\right)}{\sum_{e\in A} cp(e)}$$

C - COMPOSITION DE RESEAUX

C1 - DEFINITION D'UNE STATION n-ECHANGEABLE PAR CLASSES

Soit R un réseau propre comprenant m stations. On note $\bar{R}$ le réseau fermé RUS, S étant une station dont le taux de service de la classe k est $g_k(e)$ où e désigne un état de R.

On suppose qu'il y a N clients en circulation dans $\bar{R}$ dont un état fondamental est noté $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m, e_s)$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ caractérise l'état de $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ et e_s est l'état de S.

On rappelle que $w_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e+f_{ik})b_{ik}(e+f_{ik})$ et on dit que S *est n-échangeable par classes* dans $\bar{R}$ si

C11 - $$\boxed{(\forall e \in E)\ (\forall k \in [1,K]),\ w_k(e) = g_k(e).p(e)}$$

Cette condition signifie que le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par arrivée d'un client de classe k dans le réseau R.

Dans le cas où le réseau $\bar{R}$ est équilibré par classes, on voit aisément que la condition C11 est équivalente à :

C12 - $$\boxed{(\forall e \in E)(\forall k \in [1,K]),\ u_k(e)+z_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e)+b_{ik}(e))}$$

C2 - THEOREME FONDAMENTAL

Soit R *un réseau fermé contenant* N *clients et composé de 2 sous réseaux propres* R' *et* R" *; on considère les réseaux fermés* $\bar{R}'$ = R'US' *et* $\bar{R}''$ = R"US" *où* S' *(resp.* S"*) est une station n-échangeable par classes dans le réseau* $\bar{R}'$ *(resp.* $\bar{R}''$*). On suppose que* $\bar{R}'$ *et* $\bar{R}''$ *sont équilibrés par classes (cf A5). On rappelle que* $n=(n_1,\dots,n_k,\dots,n_K)$ et $N = \sum_{k=1}^{K} n_k$. *On considère en outre les hypothèses suivantes :*

a - *Dans* R *le taux de service pour la classe* k *de la station* S_i *de* R' *(resp.* R"*) est égal au taux de service pour la classe* k *de* S_i *dans* R' *(resp.* R"*) multiplié par le taux de service de S" pour la classe* k.

Ce qui s'écrit encore : $g_{ik}(e) = g'_{ik}(e').g''_{k}(e'')$.

b - Dans R *les probabilités de répartition entre stations à l'intérieur de* R' *ou de* R" *sont les mêmes que dans les réseaux initiaux* R' *et* R".

c - Dans R, *la probabilité* $r_{ij,k}$ *, pour un client de classe* k *qui quitte une station* S_i *de* R' *(resp.* R"*), d'aller dans* S_j *de* R" *(resp.* R'*) est égale au produit de la probabilité pour ce client de classe* k *qui quitte* S_i *de quitter* R' *multipliée par la probabilité pour un client de classe* k *qui rentre dans* R" *d'aller dans la station* S_j *de* R",

ou encore : $r_{ij,k}(e) = b'_{ik}(e').c''_{jk}(e'')$.

Alors on a les résultats suivants :

1°) $p(e) = cp'(e')p''(e'')$
où p(e) *(resp.* p'(e'), p"(e") *) est la probabilité stationnaire, pour le réseau* R *(resp.* $\bar{R}'$, $\bar{R}''$*) d'être dans l'état* e = (e',e") *(resp*(e',n-e') (e", n-e")).

2°) Le réseau R *est équilibré par classes.*

3°) Si S_i *est une station échangeable par classes dans* $\bar{R}'$ *ou* $\bar{R}''$, *elle est encore échangeable par classes dans* R.

PREUVE -

Soit e = (e', e") un état de R. Dans R on note M' (resp. M") l'ensemble des indices des stations qui appartiennent à R' (resp R"). On suppose que R' (resp. R") comprend m' (resp. m") stations ; on a donc m' + m" = m.

Les termes a_{ik}, b_{ik} et c_{ik} définis en A3 seront notés a'_{ik}, b'_{ik}, c'_{ik} (resp. a''_{ik}, b''_{ik}, c''_{ik}) s'ils sont associés à R' (resp. R").

De même, on définit u', w', z', p' (resp. u", w", z", p") relativement à R' (resp. R") comme en A4.

On note $x_k(e)$ (resp. $y_k(e)$) le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre (resp. de quitter) l'état e par déplacement d'un client de classe k dans R.

On note x(e) (resp. y(e)) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état e par déplacement d'un client dans R.

On a donc $x(e) = \sum_{k=1}^{K} x_k(e)$ et $y(e) = \sum_{k=1}^{K} y_k(e)$.

Le réseau étant supposé markovien ergodique, la probabilité stationnaire p est la seule telle que $x(e) = y(e)$.

Montrons d'abord que si l'on pose $p(e) = cp'(e')p''(e'')$ on obtient $x_k(e) = y_k(e)$ pour tout k et pour tout e.

$$x_k(e) = x'_k(e)+x''_k(e)+cu'_k(e')g''_k(e'')p''(e'')+cu''_k(e'')g'_k(e')p'(e')$$

avec

$$x'_k(e) = \sum_{i\in M'} \sum_{j\in M''} cp'(e'+f'_{ik})p''(e''-f''_{jk})b'_{ik}(e'+f'_{ik})g''_k(e''-f''_{jk})c'_{jk}(e''-f''_{jk})$$

$$= c\Big(\sum_{i\in M'} p'(e'+f'_{ik})b'_{ik}(e'+f'_{ik})\Big)\Big(\sum_{j\in M''} p''(e''-f''_{jk})g''_k(e''-f''_{jk})$$
$$C''_{jk}(e''-f''_{jk})\Big)$$

d'où $x'_k(e) = c\, w'_k(e')\, z''_k(e'')$

de même

$$x''_k(e) = \sum_{i\in M'} \sum_{j\in M''} p(e-f_{ik}+f_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk})g'_k(e'-f'_{ik})c'_{ik}(e'-f'_{ik})$$

$$x''_k(e) = c\Big(\sum_{j\in M''} p''(e''+f''_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk})\Big)\Big(\sum_{i\in M'} p'(e'-f'_{ik})g'_k(e'-f'_{ik})$$
$$c'_{ik}(e'-f'_{ik})\Big)$$

soit $\qquad x''_k(e) = c\, w''_k(e'')z'_k(e')$

On décompose ensuite $y_k(e)$ sous la forme $y'_k(e)+y''_k(e)$

avec $\qquad y'_k(e) = p(e)g''_k(e'') \sum_{i\in M'} (a'_{ik}+b'_{ik})(e')$

et $\qquad y''_k(e) = p(e)g'_k(e') \sum_{j\in M''} (a''_{jk}+b''_{jk})(e'')$

Par ailleurs, puisque S' (resp. S") est échangeable par classes dans $\bar{R}'$ (resp. $\bar{R}''$) on a :

(C.2.1) $\qquad w'_k(e') = g'_k(e')p'(e')$

(C.2.2) $\qquad w''_k(e'') = g''_k(e'')p''(e'')$

et aussi, puisque $\bar{R}'$ et $\bar{R}''$ sont équilibrés par classes :

$$\text{(C.2.3)} \qquad u'_k(e')+z'_k(e') = p'(e') \sum_{i\in M'} (a'_{ik}+b'_{ik})(e')$$

$$\text{(C.2.4)} \qquad u''_k(e'')+z''_k(e'') = p''(e'') \sum_{j\in M''} (a''_{jk}+b''_{jk})(e'')$$

En reportant C.2.1 dans $x'_k(e)$ et C.2.2 dans $x''_k(e)$ puis les résultats obtenus dans $x_k(e)$, on obtient :

$$x_k(e) = c\ p'(e')g'_k(e)z''_k(e'')+p''(e'')g''_k(e'')z'_k(e')+p''(e'')g''_k(e'')u'_k(e')+ p'(e')g'_k(e')u''_k(e'')$$

de même en reportant C.2.3 et C.2.4 dans $y'_k(e)$ et $y''_k(e)$ on obtient :

$$y_k(e) = c\Big(p''(e'')g''_k(e'')[u'_k(e')+z'_k(e')]+p'(e')g'_k(e')[u''_k(e'')+z''_k(e'')]\Big)$$

d'où $\forall e$ et $\forall k$, $x_k(e) = y_k(e)$ et par suite $x(e) = y(e)$.

Ce qui démontre que la formule de p annoncée est la bonne puisqu'il y a unicité.

De plus on a obtenu que R est équilibré par classes.

Soit une station S_i du sous réseau R' qui est échangeable dans $\bar{R}'$ pour la classe k. Posons $M_1 = M'-\{i\}$, soit e un état de R ; dans R, pour la probabilité stationnaire $p(e) = c\ p'(e')\ p''(e'')$ le taux de probabilité $w_{ik}(e)$ d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k dans la station S_i est

$$\begin{aligned} w_{ik}(e) &= \sum_{i'\in M_1} p(e+f_{i'k}-f_{ik})g'_{i'k}(e'+f'_{i'k}-f'_{ik})g''_k(e'')r'_{i'i,k}(e'+f'_{i'k}-f'_{ik}) \\ &\quad + \sum_{j\in M''} p(e+f_{jk}-f_{ik})b''_{jk}(e''+f''_{jk})g'_k(e'-f'_{ik})c'_{ik}(e'-f'_{ik}) \\ &= c\ p''(e'')g''_k(e'') \sum_{i'\in M_1} (p'g'_{i'k}\ r'_{i'i,k})(e'+f'_{i'k}-f'_{ik}) \\ &\quad + c\big(p'g'_k c'_{ik}\big)(e'-f'_{ik}) \sum_{j\in M''} p''(e''+f''_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk}) \end{aligned}$$

S" étant échangeable pour la classe k dans $\bar{R}''$ on a :

$$w''_k(e'') = \sum_{j\in M''} p''(e''+f''_{jk})b''_{jk}(e''+f''_{jk}) = p''(e'')g''_k(e'')$$

d'où

$$w_{ik}(e) = c\ p''(e'')g''_k(e'')[\sum_{i' \in M_1} (p'g'_{ik}r'_{i'i,k})(e'+f'_{i'k}-f'_{ik})$$

$$+(p'g'_k c'_{ik})(e'-f'_{ik})]$$

$$= c\ p''(e'')g''_k(e'')w'_{ik}(e').$$

Mais la station S_i est échangeable pour la classe k dans $\bar{R}'$,

d'où $\qquad w'_{ik}(e') = p'(e')g'_{ik}(e')$

et on en déduit que

$$w_{ik}(e) = p(e)g''_k(e'')g'_{ik}(e') = p(e)g_{ik}(e)$$

ce qui signifie que la station S_i est échangeable pour la classe k dans R et achève la démonstration du théorème.

C3 - *THEOREME GENERAL*

Soit $\hat{R}$ un réseau fermé markovien ergodique.
On note $\{S_m\}_{m = 1,\ldots,M}$ l'ensemble des stations de service de ce réseau.
Soit {I, J, L} une partition de {1,...,M}.
On suppose que pour tout élément m de JUL, la station S_m est échangeable par classes dans $\hat{R}$.

On suppose que, pour tout j de J et pour tout k de [1,K], le taux de service $h_{jk}(e_{jk})$ de S_j pour la classe k ne dépend que du nombre e_{jk} de clients de classe k dans S_j, autrement dit S_j est pure par classes.

A cette suite $\{S_j\}_{j\in J}$ on associe une suite $\{R_j\}_{j\in J}$ de sous réseaux standards par classes et on note $p_j(\varepsilon_j)$ la probabilité naturelle pour le sous réseau R_j d'être dans l'état ε_j. Par ailleurs, on considère une suite $\{R_l\}_{l\in L}$ de sous réseaux propres et une suite associée $\{S'_l\}_{l\in L}$ de stations dont le taux de service $g'_{lk}(\varepsilon_l)$ pour la classe k peut dépendre de l'état du réseau R_l associé.

Pour tout l de L, on note $\bar{R}_l$ le réseau fermé constitué de R_l et de S'_l et comprenant N clients en circulation.

On suppose aussi que pour tout l de L, $\bar{R}_l$ est markovien ergodique, que S'_l est n-échangeable par classes dans $\bar{R}_l$ et que $\bar{R}_l$ est équilibré par classes.

On note $p'_l(\varepsilon_l)$ la probabilité stationnaire pour le réseau $\bar{R}_l$ d'être dans l'état (ε_l, e'_l).

On étudie alors le réseau R déduit de $\hat{R}$ de la façon suivante :

a - Il y a N clients dans le réseau fermé R

b - Dans $\hat{R}$ on remplace chaque station S_m, pour $m \in JUL$ par le sous-réseau R_m associé, un état e de R est alors caractérisé par les états $\{e_m\}_{m \in I}$ associés de S_m si $m \in I$ et $\{\varepsilon_m\}_{m \in JUL}$ de R_m si $m \in JUL$.

On note e_{mk} le nombre de clients de classe k dans S_m si $m \in I$ ou dans Rm si $m \in JUL$. Quand l'état de R_m est ε_m on pose $\hat{e} = (e_1, \ldots, e_M)$ où $e_m = (e_{m1}, \ldots, e_{mk}, \ldots, e_{mK})$

ê est donc un état de $\hat{R}$.

c - Les probabilités "de répartition" entre les diverses stations de R sont définies à partir de celles définies dans $\hat{R}$ et dans les sous-réseaux R_m

Par exemple, la probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station X du sous-réseau R_m, d'aller dans la station Y du sous-réseau R_q avec $m \neq q$, $m \in JUL$ et $q \in JUL$ est égale au produit $x_k(\varepsilon_m) y_k(\varepsilon_q) z_k(\hat{e})$ si l'état du réseau R est e.

Les termes $x_k(\varepsilon_m)$, $y_k(\varepsilon_q)$ et $z_k(\hat{e})$ sont définis par $x_k(\varepsilon_m)$ = probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station X de sortir du sous-réseau R_m quand celui-ci est dans l'état ε_m.

$y_k(\varepsilon_q)$ = probabilité, pour un client de classe k qui rentre dans le sous-réseau R_q d'aller dans la station Y si le sous-réseau R_q est dans l'état ε_q.

$z_k(\hat{e})$ = probabilité, dans le réseau $\hat{R}$ pour un client de classe k qui quitte la station S_m (de $\hat{R}$) d'aller dans la station S_q (de $\hat{R}$) si $\hat{R}$ est dans l'état ê.

d - Pour tout état e de R et pour toute station X de R, le taux de service $g_{xk}(e)$ de la classe k dans X quand R est dans l'état e est défini par :

⁎ si $X = S_i$ $(i \in I)$ $\quad g_{xk}(e) = \hat{g}_{ik}(\hat{e}) \prod_{l \in L} g'_{lk}(\varepsilon_l)$

où $\hat{g}_{ik}(\hat{e})$ est le taux de service de S_i pour la classe k dans le réseau $\hat{R}$ si celui-ci est dans l'état ê.

⁎⁎ si X appartient au sous-réseau R_j, avec $j \in J$

$$g_{xk}(e) = g^j{}_{xk}(\varepsilon_j)\hat{g}_{jk}(\hat{e}) \prod_{l \in L} g'_{lk}(\varepsilon_l)$$

où $g^j{}_{xk}(\varepsilon_j)$ est le taux de service pour la classe k de la station X dans le sous-réseau R_j si ce sous-réseau est dans l'état ε_j.

⁎⁎⁎ Si X appartient au sous-réseau R_l avec $l \in L$,

$$g_{xk}(e) = g^l{}_{xk}(\varepsilon_l)\hat{g}_{lk}(\hat{e}) \prod_{\substack{m \in L \\ m \neq l}} g'_{mk}(\varepsilon_m)$$

Soit p(e) (resp. $\hat{p}(\hat{e})$) la probabilité stationnaire pour le réseau R (resp. $\hat{R}$) d'être dans l'état e (resp. ê), on a alors :

$$\boxed{p(e) = c\ \hat{p}(\hat{e}) \prod_{j \in J} p_j(\varepsilon_j) \prod_{l \in L} p'_l(\varepsilon_l)}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e de R.

<u>DEMONSTRATION</u> : On applique le théorème C2.

On considère d'abord $l \in L$ et on remplace la station S_l de $\hat{R}$ par le sous-réseau R_l comme indiqué en C2 à partir de $\bar{R}_l$. Si $j \in J$ on fait de même en prenant comme réseau $\bar{R}_j$ le réseau n-naturel associé à R_J.

D - RESEAU PARFAIT PAR CLASSES

D1 - DEFINITION

Soit R un réseau markovien ergodique constitué de m stations pures par classes $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$.

On notera M l'ensemble $\{1,2, \ldots,m\}$.

$\forall i = 1, \ldots, m$ on note $h_{ik}(e_{ik})$ le taux de service de la station S_i pour la classe k quand il y a e_{ik} clients de classe k dans cette station.

Chaque état du réseau R est caractérisé par un m-uple $e = (e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$ où e_i représente l'état de la station S_i, donc e_i est un K-uple $(e_{i1}, \ldots, e_{ik}, \ldots, e_{iK})$, e_{ik} étant le nombre de clients de classe k dans la station i.

On note $r_{ij,k}(e)$ la probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station i, d'aller dans la station j si l'état du réseau R est e.

On dit que ce réseau est parfait par classes s'il satisfait à la condition : $(\forall j \in M)\ (\forall e \in E)(\forall k \in K)$

D11 - $$\boxed{h_{jk}(e_{jk}) = \sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e_{ik}+1) r_{ij,k}(e+f_{ik}-f_{jk})}$$

On dira que R est quasi-parfait par classes s'il existe des taux de service $(h_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq K}}$ tels que, pour ces taux de service R soit un réseau parfait par classes.

D2 - PROBABILITE STATIONNAIRE

La probabilité stationnaire d'un réseau parfait par classes est la probabilité équidistribuée.

DEMONSTRATION :

Considérons a priori la probabilité équidistribuée p.

Soit e un état de R; le taux de probabilité de quitter l'état e par déplacement d'un client de classe k est :

$$p(e) \sum_{j=1}^{m} h_{jk}(e_{jk})$$

Le taux de probabilité d'atteindre l'état e par déplacement d'un client de classe k est :

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} h_{ik}(e_{ik}+1) r_{ij,k}(e+f_{ik}-f_{jk}) p(e+f_{ik}-f_{jk})$$

L'égalité D11 entraîne que ces expressions sont égales si p est la probabilité équidistribuée.

En sommant ensuite sur k on obtient que le taux de probabilité de quitter un état e est égal au taux de probabilité d'atteindre cet état e.

Donc, d'après le théorème ergodique, la probabilité équidistribuée est bien la probabilité stationnaire.

D3 - INTERPRETATION "PHYSIQUE"

Un réseau R est parfait par classes si :

a - La proba. stationnaire de R est la proba. équidistribuée.

b - En régime stationnaire, chaque station S_i de R satisfait à la condition de "balance locale par classes", c'est-à-dire que pour chaque état e, pour chaque classe k de clients et pour chaque station S_i, le taux de proba. d'atteindre l'état e par arrivée d'un client de classe k dans la station S_i est égal au taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k de la station S_i.

Cette condition b signifie que pour chaque station S_i, le sous-réseau $R \setminus S_i$ est standard par classes.

D4 - EXEMPLE DE RESEAU PARFAIT PAR CLASSES

Soit R un réseau fermé. On suppose que les probabilités $r_{i\,j,k}$ de répartition entre stations *ne dépendent pas de l'état e* du réseau R. Alors R est quasi-parfait par classes.

Plus précisément soit, pour tout k de [1,K], $X_k = (x_{1k},\ldots,x_{qk})$ une matrice uni-ligne à termes positifs telle que $X_R \check{R}_k = X_k$ où $\check{R}_k$

désigne la matrice de terme général $r_{ij,k}$. Une telle matrice existe d'après le théorème ergodique.

$\forall i \in [1,M]$, on pose $h_{ik}(0) = 0$ et $h_{ik}(j) = x_{ik}$ si $j \geq 1$ et on suppose que la station S_i admet h_{ik} comme taux de service pour la classe k. Alors, pour ces taux de service, le réseau R_k est parfait par classes, comme on le voit aisément en utilisant D11.

D5 - *STATIONS DUALES PAR CLASSES*

Soient 2 stations pures par classes S et S' de taux de service respectifs $(h_k)_{k \in [1,K]}$ et $(h'_k)_{k \in [1,K]}$.

On dit que ces stations sont duales l'une de l'autre par classes si

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq N \quad \text{et} \quad \forall k,\ 1 \leq k \leq K$$

on a l'égalité $$h_k(j) = h'_k(n_k+1-j)$$

où n_k est le nombre total de clients de classe k dans le réseau R.

D6 - *THEOREME DE SUBSTITUTION*

Soient 2 réseaux ouverts R' et R" et 2 stations pures par classes S' et S" que l'on suppose duales l'une de l'autre par classes. On suppose que les réseaux fermés $\bar{R}' = (R', S')$ et $\bar{R}'' = (R'', S'')$ sont parfaits par classes. Alors le réseau fermé R = (R', R") est un réseau parfait par classes. Autrement dit, dans $\bar{R}'$ on peut remplacer S' par R" et obtenir encore un réseau parfait par classes.

DEMONSTRATION :

Ce théorème est en fait un corollaire des théorèmes B8 et C2 mais nous pouvons en donner une preuve directe pour le lecteur qui ne s'intéresse qu'à ce cas particulier. Chaque état e' de R' est caractérisé par un m'-uple $e' = (e'_1, \ldots, e'_{m'})$ où e'_i désigne l'état de la station S'_i de R'.

e'_i est un K-uple $(e'_{i1}, \ldots e'_{ik}, \ldots, e'_{iK})$ où e'_{ik} est le nombre de clients de classe k dans la station S'_i. Le nombre de stations de R' est m'.

On pose $n'_k = \sum_{i=1}^{m'} e'_{ik}$ et on note $h'_{ik}(e'_{ik})$ le taux de service de la station S'_i pour la classe k s'il y a e'_{ik} clients de classe k dans cette station.

On note $r'_{ij,k}(e')$ pour $1 \leq i \leq m'$ et $1 \leq j \leq m'$, la probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station i de R', d'aller dans la station j de R' si l'état de R' est e'.

On introduit exactement les mêmes notations h", e", r" pour S" et R". De plus, on note $r^{*}_{ik}(e')$ la probabilité pour un client de classe k qui rentre dans le sous-réseau R' d'aller dans la station i de ce sous-réseau, si ce sous-réseau est dans l'état e'.

On pose enfin $r^{**}_{jk}(e'')$ la probabilité, pour un client de classe k qui quitte la station j du sous-réseau R", de quitter ce sous-réseau R" si l'état de R" est e".

Soit S'_j une station de R'. Puisque (R',S') est parfait par classes, on a :

D61 - $(\forall e' \in E')(\forall k \in [1,K])$

$$h'_{jk}(e'_{jk}) = \sum_{\substack{i \in M' \\ i \neq j}} h'_{ik}(e'_{ik}+1)r'_{ij,k}(e'+f'_{ik}-f'_{jk}) + h'_k(n_k+1-n'_k)r^{*}_{jk}(e'-f'_{jk})$$

de même, puisque (R",S") est parfait par classes, on a :

D62 - $(\forall e'' \in E'')(\forall k \in [1,K])$

$$h''_k(n_k-n''_k) = \sum_{i \in M''} h''_{ik}(e''_{ik}+1)r^{**}_{ik}(e''+f''_{ik}).$$

Soit e un état de R = (R',R"), le nombre total de clients de classe k dans R est n_k ; soient e' et e" les états associés de e, on a $n_k = n'_k + n''_k$. Les stations S' et S" étant duales l'une de l'autre par classes on a $h''_k(n_k-n''_k) = h''_k(n'_k) = h'_k(n_k+1-n'_k)$ et en reportant dans D61 et D62 on obtient :

$$h'_{jk}(e'_{jk}) = \sum_{i \in M'} h'_{ik}(e'_{ik}+1)r'_{ij,k}(e'+f'_{ik}-f'_{jk})$$

$$+ \sum_{i \in M''} h''_k(e''_{ik}+1)r^{*}_{jk}(e'-f'_{jk})r^{**}_{ik}(e''+f''_{ik})$$

Cette égalité est exactement l'égalité D11 associée au réseau R dans l'état e = (e', e") et à la station S'_j de R'.

En raisonnant de façon analogue on obtient la même égalité pour toute station $S"_j$ de R", ce qui prouve que le réseau R est parfait par classes.

D7 - THEOREME DE DECOMPOSITION - CAS FERME

Soit R un réseau fermé markovien ergodique comprenant N clients, n_k étant le nombre total de clients de classe k.

On suppose que R peut être décomposé en q sous-réseaux propres $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$ disjoints, chaque état de R est caractérisé par un q-uple $e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_q)$ où ε_i désigne l'état du sous-réseau R_i.

On note $\hat{\varepsilon}_{ik}$ le nombre de clients de classe k dans le sous-réseau R_i.

On note $\hat{\varepsilon}$ le "vecteur" $(\hat{\varepsilon}_{1k}, \hat{\varepsilon}_{2k}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{qk})$

et $\hat{e} = (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \ldots, \hat{\varepsilon}_K)$

On suppose que les hypothèses suivantes sont réalisées :

a - Chaque sous-réseau $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$ est standard par classes.

b - Pour tout couple (i, j) de $[1,q]\times[1,q]$ et pour tout $k \in [1,K]$, quand un client de classe k quitte le sous-réseau R_i, la probabilité de "répartition entre sous-réseaux des clients de classe k" $r_{ij,k}$, pour ce client, d'aller dans le sous-réseau R_j ne dépend que de $\hat{\varepsilon}_k$.

c - Si on note $\hat{R}$ le réseau déduit de R en remplaçant chaque sous-réseau R_j par une station unique, avec les probabilités de répartition $r_{ij,k}(\hat{\varepsilon}_k)$, alors ce sous-réseau est quasi-parfait par classes (cf. D1).

Il suffit alors de connaître les probabilités stationnaires de $\hat{R}$ et les probabilités naturelles (cf B2) de chaque sous-réseau R_i pour connaître les probabilités stationnaires de R.

Plus précisément, soit $(\hat{S}_i)_{1 \leq i \leq q}$ un ensemble de stations de service pures par classes telles que le réseau $\hat{R}$ soit parfait par classes. Pour tout i, i = 1 ... q, on note $\hat{h}_{ik}$ le taux de service de la classe k dans la station $\hat{S}_i$ et p_i la probabilité n-naturelle de R_i.

On pose $l_{ik}(0) = 1$ et $l_{ik}(j) = \prod_{m=1}^{j} \hat{h}_{ik}(m)$ pour $1 \leq j \leq n_k$, soit p(e) la probabilité stationnaire, pour le réseau R, d'être dans l'état e, on a alors :

$$\boxed{p(e) = c \prod_{i=1}^{q} [p_i(\varepsilon_i)(\prod_{k=1}^{K} l_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}))]}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e.

DEMONSTRATION

Il suffit de montrer que cette probabilité p satisfait à la condition d'équilibre par classes.

Pour tout couple (i, j) d'entiers avec $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq n_k$ on pose $h_{ik}(j) = 1$, $\forall k \in [1,K]$; de plus pour tout i, $1 \leq i \leq q$ et pour tout k, $1 \leq k \leq K$ on pose $h_{ik}(0) = 0$ et on note S_i la station de taux de service h_{ik} pour la classe k et $\bar{R}_i = (R_i, S_i)$; on utilise également les notations a^i_{jk}, b^i_{jk}, c^i_{jk} et $d^i_{jl,k}$ relativement au sous-réseau R_i exactement comme étaient définis a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} et $d_{jl,k}$ relativement au sous-réseau R ; de même on définit p_i, u^i, v^i, w^i relativement au couple (R_i,S_i) exactement comme étaient définis p, u, v, w relativement au couple (R,S) ; p_i est alors bien la probabilité naturelle de R_i.

Pour tout j, $1 \leq j \leq q$, puisque le sous-réseau R_j est standard par classes on a

<u>*D71*</u> - $\forall k \in [1,K]$, $w^j_k(\varepsilon_j) = h_{jk}(n_k-\hat{\varepsilon}_{jk})p_j(\varepsilon_j)$

d'où aussi

<u>*D72*</u> - $\forall k \in [1,K] \sum_{i \in R_j} (a^j_{ik}+b^j_{ik})(\varepsilon_j) = \dfrac{1}{p_j(\varepsilon_j)} [u^j_k(\varepsilon_j)+h_{jk}(n_k+1-\hat{\varepsilon}_{jk})v^j_k(\varepsilon_j)]$

Etant donné un état e, soit x'(e) (resp. y'(e)) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état e pour la probabilité p.

Soit $x'_k(e)$ (resp. $y'_k(e)$) le taux de probabilité d'atteindre (resp. de quitter) l'état e pour la probabilité p par déplacement d'un client de la classe k.

Posons $x_k(e) = \dfrac{x'_k(e)}{cp(e)}$ et $y_k(e) = \dfrac{y'_k(e)}{cp(e)}$

Il suffit de montrer que $(\forall k \in [1,K])$ et $(\forall e \in E)$, $x_k(e) = y_k(e)$

$$x'_k(e) = \sum_{i,j} x'_{ij,k}(e) + \sum_j \left(u^i_k(\varepsilon_j) \prod_{k=1}^{K} f_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk}) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{q} [p_i(\varepsilon_i) \prod_{k=1}^{K} f_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik})] \right)$$

or

$$\sum_{i,j} x'_{ij,k}(e) = \sum_j \sum_i [\sum_{\substack{l \in R_i\\ l' \in R_j}} p(e+f^i_{lk}-f^j_{l'k}) b^i_{lk}(\varepsilon_i+f_{lk}) c^j_{l'k}(\varepsilon_j-f_{l'k})$$

$$r_{ij,k}(\hat{\varepsilon}_k+f_{ik}-f_{jk})]$$

. l'état $e+f^i_{lk}-f^j_{l'k}$ signifie qu'il y a un client de classe k de plus dans la station l du réseau R_i et un de moins dans la station l' de R_j.

Or

$$p(e+f^i_{lk}-f^j_{l'k}) = c[\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{q} p_r(\varepsilon_r)(\prod_{k=1}^{K} f_{rk}(\hat{\varepsilon}_{rk}))] \, p_i(\varepsilon_i+f^i_{lk}) \prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{K} f_{is}(\hat{\varepsilon}_{is}) f_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}+1)$$

$$p_j(\varepsilon_j-f^j_{lk}) \prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{K} f_{js}(\hat{\varepsilon}_{js}) f_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk}-1)$$

et

$$\sum_{l \in R_i} p_i(\varepsilon_i+f^i_{lk}) b^i_{lk}(\varepsilon_i+f_{lk}) = w^i_k(\varepsilon_i)$$

et

$$\sum_{l' \in R_j} p_j(\varepsilon_j-f^j_{l'k}) c^j_{l'k}(\varepsilon_j-f_{l'k}) = v^j_k(\varepsilon_j)$$

d'où

$$\sum_j \sum_i x'_{ij,k}(e) = \sum_j \sum_i (\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{q} p_r(\varepsilon_r)(\prod_{k=1}^{K} f_{rk}(\hat{\varepsilon}_{r,k})) \, w^i_k(\varepsilon_i)(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{K} f_{is}(\hat{\varepsilon}_{is})) f_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}+1)$$

$$v^j_k(\varepsilon_j)(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{K} f_{js}(\hat{\varepsilon}_{js})) f_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk}-1)$$

d'où, en divisant par cp(e), on obtient :

$$x_k(e) = \sum_j \frac{u_k^j(\varepsilon_j)}{p_j(\varepsilon_j)} + \sum_j \frac{v_k^j(\varepsilon_j)}{p_j(\varepsilon_j)\hat{h}_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk})} \left(\sum_i \frac{w_k^i(\varepsilon_i)}{p_i(\varepsilon_i)} \hat{h}_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}+1) r_{ij,k}(\hat{\varepsilon}_k+f_{ik}-f_{jk})\right)$$

de même :

$$\frac{y'_k(e)}{cp(e)} = \sum_i \{ \sum_j (a_{jk}^i(e) + b_{jk}^i(e)\}$$

En utilisant le fait que chaque sous-réseau R_i est standard par classes, on a :

$$w_k^i(\varepsilon_i) = h_{ik}(n_k-\hat{\varepsilon}_{ik})p_i(\varepsilon_i)$$

et

$$\sum_j (a_{jk}^i(e)+b_{jk}^i(e)) = \frac{1}{p_i(\varepsilon_i)} (u_k^i(\varepsilon_i)+h_{ik}(n_k+1-\hat{\varepsilon}_{ik})v_k^i(\varepsilon_i))$$

En reportant ces égalités dans $x_k(e)$ et $y_k(e)$ on obtient :

$$x_k(e)-y_k(e) = \sum_j \frac{1}{p_j(\varepsilon_j)} v_k^j(\varepsilon_j)\, z_{jk}(e)$$

où

$$z_{jk}(e) = \frac{1}{\hat{h}_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk})} \{ \sum_i h_{ik}(n_k-\hat{\varepsilon}_{ik})\hat{h}_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}+1) r_{ij,k}(\hat{\varepsilon}_k-f_i+f_j)\}$$

$$- h_{jk}(n_k+1-\hat{\varepsilon}_{ik})$$

Mais le réseau $\hat{R}_j$ est parfait par classes et $h_{jk}(i) = 1$ si $i \neq 0$

d'où $z_{jk}(e) = 0$ et $x_k(e)-y_k(e) = 0$, ce qui prouve que p est la probabilité stationnaire de $\mathcal{R}$.

D8 - CAS PARTICULIER OU LES ROUTAGES SONT FIXES

On se place ici dans la situation habituelle cf {2}, {8} où les routages sont fixes, c'est-à-dire que les termes $r_{ij,k}$ ne dépendent pas de l'état du réseau considéré.

Soit donc R un réseau fermé markovien contenant N clients dont $(n_k)_{1 \leq k \leq K}$ clients de classe k, les routages étant fixes.

On suppose, comme en D7 que R peut être décomposé en q sous-réseaux standards $(R_i)_{1 \leq i \leq q}$ disjoints.

Comme en D4 on note $\underset{\sim}{X}_k = (x_{1k}, \ldots, x_{qk})$ une matrice uni-ligne à termes positifs telle que $X_k R_k = X_k$ où R_k désigne la matrice de terme général $r_{ij,k}$, soit p(e) la probabilité stationnaire pour le réseau R d'être dans l'état e ; pour tout $i_{1 \leq i \leq q}$, soit $p_i(\varepsilon_i)$ la probabilité n-naturelle du sous-réseau R_i. On a alors :

D8.1 - $$\boxed{p(e) = c \prod_{i=1}^{q} \left(p_i(\varepsilon_i) \prod_{k=1}^{K} (x_{ik})^{\hat{\varepsilon}_{ik}}\right)}$$

où $\hat{\varepsilon}_{ik}$ est le nombre de clients de classe k dans le sous-réseau R_i quand il est dans l'état ε_i et c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e du réseau R.

PREUVE :

On obtient ce résultat directement à partir de D7 et D4.

D9 - THEOREME DE DECOMPOSITION : CAS OUVERT

Soit un réseau ouvert R (ou sous-réseau). Soit R' le réseau fermé constitué de R et d'une station de service S, le nombre total de clients de R' étant N. On suppose que R' admet une décomposition en sous-réseaux propres $(R_i)_{1 \leq i \leq q+1}$ disjoints, telle que $R_{q+1} = S$ et que toutes les conditions (a, b, c) du théorème D7 soient satisfaites. Alors R est standard par classes (cf B1). De plus, soit p(e) la probabilité naturelle (cf B2) pour le sous-réseau R d'être dans l'état e ; pour tout i, $1 \leq i \leq q$, soit $p_i(\varepsilon_i)$ la probabilité naturelle pour le sous-réseau R_i d'être dans l'état ε_i.

Soit $(\hat{h}_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq K}}$ une famille de taux de service qui rend $\hat{R}'$ parfait par classes (cf D1 et D7-c) $\hat{h}_{q+1,k}$ désignant le taux de service pour la classe k de la station S_{q+1} associée à "l'extérieur" $R_{q+1} = S$. Pour tout état e de R, on pose

$$e^*_k = \sum_{i=1}^{q} \hat{\varepsilon}_{ik}$$

On a alors :

$$\boxed{p(e) = c \prod_{i=1}^{q} [p_i(\varepsilon_i)(\prod_{k=1}^{K} l_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik}))] (\prod_{k=1}^{K} l_{q+1,k}(n_k - e^{*}_k))}$$

où c est une constante de normalisation qui ne dépend pas de l'état e et où $l_{ik}(j) = \prod_{m=1}^{j} \hat{h}_{ik}(m)$.

PREUVE :

Soit p'(e) la probabilité stationnaire, pour le réseau $R' = RUS_{q+1}$ d'être dans l'état $(e,N-e^{*})$, le taux de service de la station S_{q+1} pour la classe k étant $h_{q+1,k}$.

Le théorème D7 dit que

$$p'(e) = c' \prod_{i=1}^{q} [p_i(\varepsilon_i) \prod_{k=1}^{K} l_{ik}(\hat{\varepsilon}_{ik})]$$

puisque la probabilité n-naturelle $p_{q+1}(\varepsilon_{q+1}) = \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{K} l_{q+1,k}(\hat{\varepsilon}_{q+1,k})}$

Il reste à vérifier que l'égalité A51 est satisfaite relativement à la probabilité p' et pour tout état e.

$$w'_k(e) = \sum_{m=1}^{q} \sum_{i \in R_m} p'(e+f^m_{ik}) b^m_{ik}(e_m+f_{ik}) r_{m,q+1}(\hat{\varepsilon}_k+f_m-f_{q+1})$$

or

$$p'(e+f^m_{ik}) = c'[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{q} l_{jk}(\hat{\varepsilon}_{jk}) p_j(\varepsilon_j)] [p_m(\varepsilon_m+f^m_{ik})](\prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{K} l_{ms}(\hat{\varepsilon}_{ms})) l_{mk}(\hat{\varepsilon}_{mk}+1)$$

et $\sum_{i \in R_m} p_m(\varepsilon_m+f^m_{ik}) b^m_{ik}(\varepsilon_m+f_{ik}) = w^m_k(\varepsilon_m)$

d'où, en reportant dans $w'_k(e)$ on obtient :

$$w'_k(e) = p'(e) \sum_{m=1}^{q} \frac{1}{p_m(\varepsilon_m)} w^m_k(\varepsilon_m) \frac{l_{mk}(\hat{\varepsilon}_{mk}+1)}{l_{mk}(\hat{\varepsilon}_{mk})} r_{m,q+1,k}(\hat{\varepsilon}_k+f_m-f_{q+1})$$

or, puisque R_m est standard par classes on a $w^m_k(\varepsilon_m) = p_m(\varepsilon_m)$

d'où

$$w'_k(e) = p'(e) \sum_{m=1}^{q} \hat{h}_m(\hat{\varepsilon}_{mk}+1)\ r_{m,q+1,k}\ (\hat{\varepsilon}_k+f_m)$$

c'est-à-dire encore :

$w'_k(e) = p'(e)\ \hat{h}_{q+1}\ (n_k - e_K^{*})$ puisque $\hat{R}'$ est parfait par classes. Le réseau R' est alors standard par classes et on peut appliquer le théorème D7.

E - EXTENSION AU CAS DE LOIS NON EXPONENTIELLES.

E1 - ETUDE D'UN CAS AVEC UNE SEULE CLASSE DE CLIENTS.

Ce cas et le corollaire qui suit m'ont été signalés par J. Pellaumail.

Soit R un réseau fermé contenant N clients et composé de N+1 stations $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$. On se donne également une suite $(a_i)_{1 \leq i \leq N}$ de nombres réels strictement positifs.

Les stations S_i pour $1 \leq i \leq N$ sont toutes identiques. Un client qui quitte l'une de ces stations va nécessairement dans la station S_o, chaque station S_i reçoit au plus un client.

Un état du réseau sera déterminé par le nombre j de stations S_i occupées pour $1 \leq i \leq N$ ou ce qui revient au même par le nombre N-i de clients dans la station S_o. Un client qui quitte la station S_o va dans l'une des autres stations non occupées avec la probabilité équidistribuée c'est-à-dire que la probabilité d'aller dans la station S_i vaut $\frac{1}{N-j}$ si cette station est vide et s'il y a N-j clients dans S_o ; la probabilité d'aller dans une station déjà occupée est nulle.

Le taux de service de la station S_o est égal à 1 ; le taux de service d'une station S_i avec $1 \leq i \leq N$ vaut a_j s'il y a j stations S_i qui sont occupées (et si la station considérée est elle-même occupée). Les stations S_i pour $1 \leq i \leq N$ ne sont donc pas pures puisque leurs taux de service dépendent de l'état des autres stations.

Alors pour un tel réseau les stations sont échangeables, de plus si l'on note p(j) la probabilité stationnaire pour qu'il y ait N-j clients dans S_o et j stations S_i (pour $1 \leq i \leq N$) occupées, alors $p(j) = c\,\frac{(N-j)!}{N!}\ \frac{1}{f(j)}$ où $f(j) = \prod_{i=1}^{j} a_i$ et c est la constante de normalisation. La probabilité q(j) d'avoir N-j clients dans S_o vaut donc :

$$C_N^j \, p(j) = c \frac{1}{j!} \frac{1}{f(j)}$$

VERIFICATION

Soit e un état élémentaire tel que le nombre de stations S_i avec $1 \leq i \leq N$ occupées soit égal à j, c'est-à-dire que le nombre de clients dans S_0 vaut N-j; pour la probabilité p définie par la formule ci-dessus, le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de S_0 est égal au taux de probabilité de rentrer dans l'état e par arrivée dans S_0 ou encore

$$p(j) = p(j+1) \; (N-j) \; a(j+1)$$

De même si l'on considère $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$ occupée au lieu de S_0 on a :

$$p(j) \; a(j) = p(j-1) \frac{1}{N+1-j}$$

Enfin si S_i est une station vide les 2 taux sont nuls. Dans chaque cas l'expression annoncée de p vérifie les égalités donc p est bien la probabilité stationnaire.

De plus toutes les stations sont échangeables.

COROLLAIRE

Dans le réseau R considéré précédemment, chaque station S_i pour $1 \leq i \leq N$ est échangeable et ne peut pas recevoir plus d'un client ; on peut donc remplacer cette station par un sous-réseau de Cox, c'est-à-dire supposer que chaque station S_i a une loi de service quelconque à transformée de Laplace rationnelle ; le sous-réseau obtenu ainsi en remplaçant dans $R \setminus S_0$ chaque station S_i par un sous-réseau de Cox est un sous-réseau standard dont chaque station est échangeable.

Si on prend a(j) = b pour tout j, où b est une constante, on est dans le cas d'une 'infinité de serveurs". Si on prend $a(j) = \frac{b}{j}$ pour j > 0 où b est une constante, on est dans le cas "temps partagé". Enfin soit S une station échangeable dans un réseau R' à routages dépendant de l'état et dont on connait la probabilité stationnaire, ce qui précède montre notamment que l'on sait encore calculer la probabilité stationnaire du réseau R" déduit de R' en remplaçant S par une station à loi de service quelconque, mais fonctionnant en temps partagé ou avec une infinité de serveurs.

De plus, dans une telle transformation, toute station autre que S, échangeable dans R', l'est encore dans R".

E.2 - CAS OU IL Y A PLUSIEURS CLASSES DE CLIENTS

On considère encore un réseau fermé R contenant N clients répartis en K classes, le nombre total de clients d'une classe k est noté n_k. On suppose que R est composé de N+1 stations $(S_i)_{0 \leq i \leq N}$ et on se donne une suite $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$ de nombres réels strictement positifs.

Un état du réseau est déterminé par un K-uple $e = (e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_K)$ où e_k est le nombre de clients de classe k dans S_o.

On utilise également les notations $j_k = n_k - e_k$, $j = (j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_K)$ et $\hat{j} = \sum_{k=1}^{K} j_k$.

Un client de classe k qui quitte la station S_o va dans l'une des autres stations non occupées S_i avec la probabilité $\frac{1}{(N-\hat{j})}$ si S_i est vide et s'il y a $N-\hat{j}$ clients dans S_o.

Le taux de service de la station S_o pour un client de classe k vaut 1, le taux de service d'une station S_i $(1 \leq i \leq N)$ pour un client de classe k vaut a_{jk} s'il y a j stations occupées par des clients de classe k.

Nous pouvons noter que les stations S_i ne sont pas pures par classes mais nous allons démontrer que pour un tel réseau toutes les stations sont échangeables par classes.

De plus si l'on note q(e) la probabilité stationnaire pour que S_o soit dans l'état e on a :

$$\boxed{q(e) = c\, c_N^{j_1}\, c_{N-j_1}^{j_2} \cdots c_{N-\sum_{k=1}^{K-1} j_k}^{j_K}\, \frac{(N-\hat{j})!}{f(j)}}$$

où $f(j) = \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{i=1}^{j_k} a_{ik} \right)$

et où c est la constante de normalisation.

DEMONSTRATION

Posons $$p(e') = \frac{q(e)}{c_N^{j_1}\, c_{N-j_1}^{j_2} \cdots c^{j_K}_{N-\sum_{k=1}^{K-1} j_k}}$$

où e' est l'une des façons d'obtenir e.

Il suffit de vérifier que pour la probabilité p, la probabilité d'échangeabilité par classes est vérifiée pour chaque station.

Le taux de probabilité de quitter l'état e' par départ d'un client de classe k de S_o vaut $p(e') = c\,\frac{(N-\bar{j})!}{f(j)}$.

Le taux de probabilité d'atteindre l'état e' par arrivée d'un client de classe k dans S_o vaut $p(e'-f_k)(N-\bar{j})\, a_{j_k+1,k}$

$$= \frac{c(N-\bar{j}-1)!\;(N-\bar{j})}{f(j)\; a_{j_k+1,k}}\; a_{j_k+1,k} = c\,\frac{(N-\bar{j})!}{f(j)}$$

d'où l'égalité des 2 taux.

Considérons ensuite une autre station S_i $(1 \leq i \leq N)$ que l'on suppose d'abord occupée par un client de classe k.

Le taux de probabilité de quitter l'état e' par départ d'un client de classe k de S_i vaut $p(e')\, a_{j_k,k}$ c'est-à-dire encore $c\,\frac{(N-\bar{j})!}{f(j)}\, a_{j_k,k}$

Le taux de probabilité d'atteindre l'état e' par arrivée d'un client de classe k dans S_i vaut :

$$p(e'+f_k)\,\frac{1}{N+1-\bar{j}} = \frac{c\;(N-\bar{j}+1)!\; a_{j_k,k}}{f(j)}\;\frac{1}{(N+1-\bar{j})!} = \frac{c(N-\bar{j})!}{f(j)}\, a_{j_k,k}$$

Les 2 taux sont encore égaux.

Si l'on considère une station S_i non occupée, les 2 taux sont nuls. Connaissant p(e') on obtient q(e) à l'aide de la relation donnée au début de cette démonstration.

F - CAS OU LES CLIENTS PEUVENT CHANGER DE CLASSE

F1 - NOTATIONS

Soit $\bar{R}$ le réseau fermé constitué d'un sous-réseau R propre comprenant m stations et d'une station S dont le taux de service de la classe k est $g_k(e)$.

On pose $$w_k(e) = \sum_{i=1}^{m} p(e+f_{ik})b_{ik}(e+f_{ik})$$

$w_k(e)$ est donc le taux de probabilité d'atteindre l'état e par départ d'un client de classe k du réseau R.

On note s_{kl} la probabilité pour un client de classe k qui quitte une station de passer dans la classe l.

On dira que S est échangeable par classes si

F11 - $\forall e, \forall k \qquad w_k(e) = g_k(e)\, p(e)$

Le 2ème membre est le taux de probabilité de quitter l'état e par départ d'un client de classe k de S.

Dans le cas où $\bar{R}$ est équilibré par classes, la condition F11 est équivalente à :

F12 - $\forall e, \forall k \qquad u_k(e)+z_k(e) = p(e) \sum_{i=1}^{m} (a_{ik}(e) + b_{ik}(e))$

avec $$u_k(e) = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{l=1}^{K} (p\, d_{ji,k})(e-f_{il}+f_{jk})s_{kl}$$

et $$z_k(e) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{K} (p\, c_{il}\, g_k)(e-f_{il})s_{kl}$$

F2 - THEOREME

Soit R un réseau fermé contenant N clients et composé de 2 sous-réseaux propres R' et R" ; on considère les réseaux fermés $\bar{R}'$ = R'US' et $\bar{R}''$ = R"US" où S' (resp. S") est une station échangeable par classes dans $\bar{R}'$ (resp $\bar{R}''$)On suppose R' et R" équilibrés par classes et on considère en outre les hypothèses suivantes :

a - Dans R, le taux de service pour la classe k de la station S_i de R' (resp. R") est égal au taux de service pour la classe k de S_i dans R' (resp R") multiplié par le taux de service de S" pour la classe k, c'est-à-dire que :

$$\forall e, \forall k \qquad g_{ik}(e) = g'_{ik}(e').g''_k(e'') \text{ (pour } S_i \in R')$$

$$\forall e, \forall k \quad g_{jk}(e) = g''_{jk}(e'').\ g'_k(e') \text{ pour } S_j \in R'')$$

b - Dans R les probabilités de répartition entre stations à l'intérieur de R' ou de R" sont les mêmes que dans les réseaux initiaux R' et R".

c - Dans R la probabilité $r_{ij,kl}$ pour un client de classe k qui quitte une station S_i de R' (resp R") d'aller dans S_j de R" (resp. R') en passant dans la classe l est égale à $b'_{ik}(e')\ s_{kl}\ c''_{jl}(e'')$

où s_{kl} est la probabilité pour un client de classe k de passer dans la classe l.

$b'_{ik}(e')$ et $c''_{jl}(e'')$ ont été définis en A3.

On a alors les résultats suivants :

1°) $\qquad p(e) = c\ p'(e')\ p''(e'')$

où p(e) est la probabilité stationnaire, pour le réseau R, d'être dans l'état e = (e', e").

2°) R est équilibré par classes.

3°) Toute station S_i, échangeable par classes dans $\bar{R}'$ ou $\bar{R}''$ est encore échangeable dans R.

DEMONSTRATION

Elle n'est pas très différente de celle du théorème C2, nous n'indiquerons ici que les modifications à apporter aux démonstrations des équations 1°) et 2°), l'assertion 3°) sera démontrée en détail.

Avec les mêmes notations que dans C2, on a :

$$x'_k(e) = \sum_{i \in M'} \sum_{j \in M''} \sum_{l=1}^{K} c\ p'(e'+f'_{ik})p''(e''-f''_{jl})b'_{ik}(e'+f'_{ik})s_{kl}g''_k(e''-f''_{il})\ c''_{jl}(e''-f''_{jl})$$

d'où :

$$x'_k(e) = [\sum_{i \in M'} c\, p'(e'+f'_{ik})b'_{ik}(e'+f'_{ik})][\sum_{j \in M'} \sum_{l=1} (p"g"_k c"_{jl})(e"-f"_{jl})s_{kl}]$$

soit :

$$x'_k(e) = c\, w'_k(e')\, z"_k(e")$$

De la même façon, on montre que :

$$x"_k(e) = c\, w"_k(e")\, z'_k(e')$$

la suite de la démonstration est identique à celle du théorème C2.

3°) Il s'agit de montrer que $\forall S_i, \forall e, \forall k,\ w_{ik}(e) = p(e)\, g_{ik}(e)$

$$w_{ik}(e) = \sum_{i' \in M_1} \sum_{l=1}^{K} (p\, g_{i'k}\, r'_{i'i,k})(e+f_{i'k}-f_{il})\, s_{kl}$$

$$+ \sum_{j \in M"} \sum_{l=1}^{K} p(e+f_{jk}-f_{il})b"_{jk}(e"+f"_{jk})(g'_k c'_{il})(e'-f'_{ik})s_{kl}$$

or $\quad g_{i'k}(e+f_{i'k}-f_{il}) = g'_{i'k}(e'+f'_{i'k}-f'_{il})g"_k(e")$

d'où

$$w_{ik}(e) = c\, p"(e")g"_k(e") \sum_{i' \in M_1} \sum_{l=1}^{K} p'(e'+f'_{i'k}-f'_{il})s_{kl}(g'_{i'k}r'_{i'i,k})$$

$$(e'+f'_{i'k}-f'_{il}) \quad + \sum_{l=1}^{K} p'(e'-f'_{il})g'_k(e'-f'_{il})s_{kl}\ c'_{il}(e'-f'_{il})$$

$$\sum_{j \in M"} (p"b"_{jk})(e"+f"_{jk})$$

or S" étant échangeable par classes, on a :

$$\sum_{j \in M"} (p"b"_{jk})(e"+f"_{jk}) = p"(e")g"_k(e")$$

d'où $\quad w_{ik}(e) = c\, p"(e")g"_k(e")w'_{ik}(e')$

Mais $\quad w'_{ik}(e') = g'_{ik}(e')p'(e')$

d'où $\quad w_{ik}(e) = c\, p'(e')p"(e")g'_{ik}(e')g"_k(e")$

$$w_{ik}(e) = p(e)g_{ik}(e)$$

ce qui démontre le résultat pour S_i dans R' ; on fait de même si S_i est dans R".

F3 - PROPOSITION

Soient R' et R" 2 sous-réseaux propres couplés avec les stations S' et S" tels que $\bar{R}'$ = R'US' et $\bar{R}''$ = R"US" soient des réseaux fermés, non nécessairement équilibrés par classes. S' et S" sont supposées échangeables par classes.

On suppose que les taux de service de S' (resp. S") ne dépendent pas de la classe considérée.

On notera g'(e) (resp. g"(e)) le taux de service de S' (resp. S").

On suppose encore, comme dans F2, que les clients peuvent changer de classe.

Alors 1°) on a encore p(e) = c p'(e')p"(e") avec les notations habituelles.

2°) De plus si S_i est échangeable par classes dans R', elle est encore échangeable par classes dans R = R'UR".

DEMONSTRATION

1°) Soit x(e) le taux de probabilité pour la probabilité p d'atteindre l'état e et y(e) le taux de probabilité de quitter l'état e.

Il s'agit de montrer que x(e) = y(e).

$$x(e) = \sum_{k=1}^{K} x_k(e) \qquad \text{et} \qquad y(e) = \sum_{k=1}^{K} y_k(e)$$

$$x_k(e) = x'_k(e)+x''_k(e)+ c\, u'_k(e')g''(e'')p''(e'')+ c\, u''_k(e'')g'(e')p'(e')$$

d'après la démonstration de C2, on a :

$$x'_k(e) = c\, w'_k(e')z''_k(e'') \qquad \text{et} \qquad x''_k(e) = c\, w''_k(e'')z'_k(e')$$

or par hypothèses $w'_k(e') = g'(e')p'(e')$ et $w''_k(e'') = g''(e'')p''(e'')$

d'où

$$x_k(e) = c\ g'(e')p'(e')z''_k(e'')+c\ g''(e'')p''(e'')z'_k(e')+c\ u'_k(e')g''(e'')$$

$$p''(e'')+ c\ u''_k(e'')g'(e')p'(e')$$

$$x_k(e) = c\ g'(e')p'(e')[u''_k(e'')+z''_k(e'')]+c\ g''(e'')p''(e'')[u'_k(e')+z'_k(e')]$$

d'où en posant $u(e) = \sum_{k=1}^{K} u_k(e)$ et $z(e) = \sum_{k=1}^{K} z_k(e)$,

on obtient

$$x(e) = c\ g'(e')p'(e')[u''(e'')+z''(e'')]+c\ g''(e'')[u'(e')+z'(e')]$$

Considérons maintenant $y(e) = y'(e) + y''(e)$

On a $y'_k(e) = p(e)g''(e'') \sum_{i \in M'} (a'_{ik}+b'_{ik})(e')$

et $y''_k(e) = p(e)g'(e') \sum_{j \in M''} (a''_{jk}+b''_{jk})(e'')$

en posant : $a'_i(e') = \sum_{k=1}^{K} a'_{ik}(e')$, $a''_i(e'') = \sum_{k=1}^{K} a''_{ik}(e'')$

$b'_i(e') = \sum_{k=1}^{K} b'_{ik}(e')$ et $b''_i(e'') = \sum_{k=1}^{K} b''_{ik}(e'')$

On obtient :

$$y'(e) = \sum_{k=1}^{K} y'_k(e) = p(e)g''(e'') \sum_{i \in M'} [a'_i(e')+b'_i(e')]$$

et

$$y''(e) = \sum_{k=1}^{K} y''_k(e) = p(e)g'(e') \sum_{j \in M''} (a''_j(e'')+b''_j(e''))$$

or, en régime stationnaire, on a

$$\sum_{i \in M'} (a'_i(e')+b'_i(e')) = \frac{1}{p'(e')} (u'(e')+z'(e'))$$

et $$\sum_{j \in M''} [a''_j(e'')+b''_j(e'')] = \frac{1}{p''(e'')} (u''(e'')+z''(e'')),$$

p' et p" étant les probabilités stationnaires de R' et R".

On obtient donc

$$y(e) = c\, p''(e'')g''(e'')[u'(e')+z'(e')] + c\, p'(e')g'(e')[u''(e'')+z''(e'')]$$

d'où $x(e) = y(e)$, ce qui démontre 1.

2°) La démonstration est identique à F2 3°).

B I B L I O G R A P H I E

1 - J. PELLAUMAIL
Régime stationnaire quand les routages dépendent de l'état
Actes du 1er Colloque AFCET-SMF de Mathématiques Appliquées
4-8 Septembre 1978 Palaiseau et Rapport IRISA n° 102 Juin 1978.

2 - F. BASKETT, M. CHANDY, R. MUNTZ, J. PALACIOS
Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers.
J. A. C. M. 22, 248-260 (1975).

3 - K. M. CHANDY, J. H. HOWARD AND D. F. TOWSLEY
Product form and local balance in queuing networks
J. A. C. M. 24, n° 2, April 77, pp 250-263.

4 - D. R. COX
A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes
Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 313-319 (1955).

5 - D. R. COX
The analysis of non-markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables.
Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 433 - 441 (1955)

6 - P. Y. GLORENNEC, G. HAINRY, R. MARIE, J. PELLAUMAIL
Quelques résultats en théorie des files d'attente
Séminaire de Rennes 1975. Rapport IRISA n° 33.

7 - R. MARIE
Quelques résultats relatifs aux réseaux de files d'attente.
Actes du 1er Colloque AFCET-SMF de Mathématiques Appliquées
4-8 Septembre 1978 - Palaiseau France.

8 - E. GELENBE, R. R. MUNTZ
Probabilistic Models of Computer Systems (Exact Results)
Acta Informatica 7, 35-60 (1976).

9 - E. GELENBE AND G. PUJOLLE
The behaviour of a single queue in a General Queuing Network
Acta Informatica 7, 125-150 (1976).

10 - J. R. JACKSON
Jobshop-like Queuing systems
Management Science Vol. 10, n° 1, Oct. 1963.

11 - D. MERLE
Algorithmes de calcul des probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente.
Rapport IRIA-Laboria n° 279, mars 1978.

12 - L. KLEINROCK
Queuing systems vol. I et II
John Wiley et Sons (1976).