GÖRAN HÖGNÄS

Marche aléatoire sur un demi-groupe de matrices n x n

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A5_0>

Marche aléatoire sur un demi-groupe de matrices n x n

Göran Högnäs

0. INTRODUCTION

Regardons un produit (aléatoire)

$$s_k = x_k \, x_{k-1} \cdots x_2 \, x_1,$$

de matrices $n \times n$ non forcément régulières, c'est-à-dire un produit d'opérateurs linéaires de R^n dans lui-même. Alors le rang de s_k est décroissant, et il va "vraisemblablement" atteindre une limite. Soit maintenant S le sous-demi-groupe de M(n,n) engendré par les x_k M(n,n) étant le demi-groupe multiplicatif de matrices réelles **n x n**. Si l'on s'intéresse au comportement asymptotique de s_k, il convient d'étudier :

$$T_b = \{ x \in S \mid \text{rang}(x) \leq b \}$$

où $b = \min \{\text{rang } (x) \mid x \in S\}$.

T_b est un idéal, c'est-à-dire ST_b, $T_bS \subset T_b$; en particulier, T_b est un sous-demi-groupe de S.

<u>Déf</u>.: Pour $x \in S$ on notera N(x) le sous-espace $\{ N \in R^n \mid x(N) = 0\}$ et R(x) pour $x(R^n)$.

Si $x,y, \in T_b$ on a $xy, yx \in T_b$ d'où $\forall x,y \in T_b$:
$N(x) \cap R(y) = \{0\}$

Autrement dit, R^n est somme directe des sous-espaces $N(x)$ et $R(y)$ de dimensions n-b et b, respectivement. Or, si N_o et R_o sont de tels sous-espaces, l'ensemble

$$G(R_o,N_o) = \{x \in M(n,n) \mid R(x) = R_o,\ N(x) = N_o\}$$

est un groupe ! (= GL(b,R)). T_b est alors un sous-ensemble d'une réunion de groupes (isomorphes)

$$T_b \subseteq \bigcup_R \bigcup_N G(R,N) \stackrel{\text{déf}}{=\!=} T'_b$$

En fait, on peut dire plus :

Soient $x \in G(R_i, N_j) \stackrel{\text{déf.}}{=\!=} G_{ij}$ et e_{ij} l'élément neutre de ce groupe. Alors

$$x = e_{io}\, e_{oo}\, x\, e_{oo}\, e_{oj} = e_{io}\, \bar{x}\, e_{oj}$$

où $\bar{x} = e_{oo}\, x\, e_{oo} \in G_{oo}$.

On pose $E = \{e_{io}\}$, $F = \{e_{oj}\}$, $G = G_{oo}$. Alors

$T'_b = EGF \quad (\simeq E \times G \times F)$

La multiplication s'écrit de la manière suivante :

$x = e_{io}\, \bar{x}\, e_{oj}$, $\quad y = e_{i'o}\, \bar{y}\, e_{oj'}$

$$xy = \underbrace{e_{io}\, \bar{x}\, \underbrace{e_{oj}\, e_{i'o}}_{EG}\, \bar{y}}_{EG}\, e_{oj'}$$

T'_b est un demi-groupe dit <u>complètement simple</u> (sans zéro)

<u>Exemple</u> 1 Un demi-groupe de matrices 2x2 de rang ≤ 1.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\mu \\ \lambda c & \lambda c\mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu, c \in R \right\}$$

S contient "la plupart" des matrices de rang 1.

$$x = \begin{pmatrix} c & c\mu \\ \lambda c & \lambda c\mu \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} c' & c'\mu' \\ \lambda' c' & \lambda' c'\mu' \end{pmatrix}$$

$$xy = \begin{pmatrix} c(1+\mu\lambda')c' & c(1+\mu\lambda')c'\mu' \\ \lambda c(1+\mu\lambda')c' & \lambda c(1+\mu\lambda')c'\mu' \end{pmatrix}$$

$xy \neq 0 \iff cc' \neq 0$ et $1+\mu\lambda' \neq 0$

Si $x \neq 0$ alors $N(x) = \{(t_1,t_2) \in R^2 \mid t_1 + \mu t_2 = 0\}$
et
$R(x) = \{(t_1,t_2) \in R^2 \mid t_2 = \lambda t_1\}$

$R(x) \cap N(x) \neq \{0\}$ $(\iff R(x) = N(x)) \iff 1+\mu\lambda = 0$

Si $x^2 \neq 0$ alors x appartient à un groupe, d'élément neutre :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\mu\lambda} & \frac{\mu}{1+\mu\lambda} \\ \frac{\lambda}{1+\mu\lambda} & \frac{\mu\lambda}{1+\mu\lambda} \end{pmatrix}$$

<u>Remarques</u>

. Notre description de T_b ne servira pas à grand-chose si s_k n'atteint "presque jamais" T_b, c'est-à-dire

$$\sum_{k \geq 1} \Pr\{ s_k \in T_b \} = 0$$

Alors on regarde T_a $(b < a \leq n)$ où

$a = \min \{ r \mid \sum \Pr \{ s_k \in T_r \} > 0 \}$. Mais les éléments de T_a ne sont pas aussi faciles à décrire que ceux de T_b. Dans le cas discret $T_a = T_b$ et dans le cas compact on sait aussi utiliser T_b même si T_b n'est pas atteint.

.. Si dans le cas S discret on ajoute une condition de récurrence (à préciser) T_b est lui-même de la forme EG'F avec G' sous-groupe de G (MARTIN-LÖF). En outre G' est un groupe récurrent (LARISSE).

Dans le cas général (avec des conditions supplémentaires) on peut démontrer que T_a est "p.s." un demi-groupe complètement <u>0-simple</u> (avec une représentation analogue à celle vue plus haut, à ceci près que $e_{oi}\, e_{jo} \in G \; \{0\}$). Le demi-groupe S de l'exemple 1 est complètement 0-simple.

I DEFINITIONS ET NOTATIONS

M(n,n), muni de la topologie de R^{n^2} (qui est localement compact à base dénombrable), est un demi-groupe topologique, c'est-à -dire, la multiplication est une application continue de M(n,n) x M(n,n) dans M(n,n).

Soit S un sous-demi-groupe localement compact de M(n,n), engendré en tant que demi-groupe par une probabilité régulière sur S :

$$S = \overline{\bigcup_{k\geq 1} S_\mu^k}$$

où S_μ est le support de μ . Si l'on pose $\upsilon = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mu^k$, $S_\upsilon = S$.

[Si on suppose S fermé dans M(n,n) les calculs se simplifient. On ne le supposera pas dans cet exposé. (GL(n,R) n'est pas fermé dans M(n,n))]

Soit

$$T_r = \{x \in S \mid \text{rang } (x) \leq r\} \qquad (0\leq r\leq n)$$

T_r est un idéal fermé de S. De plus, $\upsilon(T_r) > 0$ implique $\mu^k (T_r^c) \leq d^k$ (d <1, k assez grand.)

[On a

$T_r = \{ x \in S \mid$ tous les mineurs de x d'ordre $\geq r+1$ sont $= 0\}$

donc T_r est fermé.

Pour $B \in S$, $x \in S$, $x^{-1}B \overset{\text{déf}}{=} \{ s \in S \mid x s \in B\}$.

Maintenant $x^{-1} T_r^c = \emptyset$ si $x \in T_r$

$\subseteq T_r^c$ si $x \in T_r^c$

On en déduit que

$$\mu^{k_1+k_2}(T_r^c) \leq \int_{T_r^c} \mu^{k}(x^{-1} T_r^c)\, \mu^{k_2}(dx) \leq \mu^{k_2}(T_r^c)\quad \mu^{k_2}(T_r^c)$$
]

Soit $a = \min \{r \mid \upsilon(T_r) > 0\}$. υ-presque tous $x \in T_a \setminus T_{a-1}$ satisfait à la condition suivante :

$$\upsilon \{y \mid xy \text{ ou } yx \in T_{a-1}\} = 0$$

On va introduire maintenant la condition de récurrence suivante pour $x \in S$:

(*) Pour tout voisinage V_x de x : $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k(V_x) = \infty$

On désignera par H l'ensemble des points satisfaisant à (*)

DANS CE QUI SUIT ON SUPPOSERA TOUJOURS QU'ON A : $H \neq \emptyset$

La condition de récurrence positive s'écrit :

(**) Pour tout V_x : $\limsup \mu^n(V_x) > 0$

On désignera par H' les points qui satisfont à (**).

<u>Exemple 2</u> Dans le cas du demi-groupe multiplicatif $S=[0,\infty)$ on peut facilement trouver des probabilités μ_1, μ_2, μ_3, t.q.

$H = \emptyset$ si $\mu = \mu_1$

$H' = \{0\}$, $H = S$ si $\mu = \mu_2$

$H = H' = \{0\}$ si $\mu = \mu_3$

On montre assez facilement que H est un idéal fermé de S, contenu dans T_a.

[S discret : $H = T_b$ complètement simple sans zéro]

2. CAS ABELIEN

Dans cette section S est donc commutatif. Notons qu'un demi-groupe abélien complètement simple est nécessairement un groupe. Dans le cas discret $H = T_b$ est un groupe abélien de matrices de rang b.

<u>Exemple 1a</u> : Dans le demi-groupe S de Ex.1 on a

$$0 \neq xy = yx \iff \mu=\mu', \ \lambda=\lambda'$$

Les sous-groupes abéliens les plus grands sont alors de la forme :

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & c\mu \\ \lambda c & \lambda c\mu \end{pmatrix} \middle| \ c \in R \setminus \{0\} \right\} \qquad \text{avec } 1 + \lambda\mu \neq 0$$

Si $x_o \in T_a$ tel que $\upsilon\,\{y|\ x_o y \in T_{a-1}\} = 0$ (cette condition-là vaut pour p.tt $x_o \in T_a$) alors on définit

$$C = \{y \in T_a|\ \ x_o\, y \in T_a \setminus T_{a-1}\}$$

<u>Théorème</u> : ou $H \subseteq T_{a-1}$ ou $H = T_a = C \cup T_{a-1}$, et C est un groupe abélien localement compact. En particulier, celà est le cas quand $\upsilon(H) > 0$.

[T_{a-1} peut très bien être vide]

<u>Démonstration</u> (en gros) : La commutativité entraîne que les matrices de C ont toutes même noyau et même image. C est un demi-groupe, donc un sous-demi-groupe abélien d'un groupe G localement compact. D'autre part, C est fermé et dense, dans $T_a \setminus T_{a-1}$, donc égal à $T_a \setminus T_{a-1}$.

Si $H \subseteq T_{a-1}$ il n'y a rien à prouver.

Soit alors $x \in H \cap C$. Si V_x est un voisinage de x, écrivons : $V_{1x} = V_x \cap C$. $\sum_{k \geq 1} \mu^n(V_{1x}) = \infty$ puisque $\sum_{k \geq 1} \mu^n(T_a^c) < \infty$

Soit maintenant $S_k = X_k X_{k-1} \ldots, X_2 X_1$, une marche aléatoire sur S de loi μ. On peut démontrer que :

$P(S_k \in V_{1x} V_{1x}^{-1} \cap C$ infiniment souvent(i.s.))= 1

$[AB^{-1} = \bigcup_{b \in B} Ab^{-1}]$. Il s'ensuit que $\overline{C}x$ -fermeture dans le groupe G - est un idéal minimal de $\overline{C}$ [la démonstration fait appel d'une manière essentielle à l'indépendance des v.a $\{X_k\}$ et au fait que G est un groupe topologique] . La théorie des demi-groupes nous dit qu'alors $\overline{C}$ contient un groupe abélien qui, en fait, est égal à $\overline{C}$. C est localement compact et dense dans $\overline{C}$, donc ouvert dans $\overline{C}$. Un demi-groupe ouvert et dense d'un groupe est lui-même un groupe. C'est un groupe topologique puisque la topologie est localement compacte [théorème d'ELLIS] : La mesure $\mu(.e^{-1})$ restreinte à C engendre, en fait, la marche aléatoire sur C.

La théorie des marches aléatoires sur les groupes donne, pour tout $x \in C$, P_x ($S_k \in V_x$ infiniment souvent) = 1 (on note cela : $x \to x$ i.s.) . C étant dense dans T_a on a $xe = x$ pour tout $x \in T_a$, ce qui entraîne le

<u>Corollaire</u> : Si $H = T_a$ alors $x \to x$ i.s. pour tout $x \in T_a$.

<u>Remarque</u> : Sous l'hypothèse que le noyau de transition pour la marche aléatoire ait une <u>composante continue</u> non-triviale au point $x \in H$ [notion introduite par TUOMINEN-TWEEDIE équivalente à l'étalement de μ dans le cas d'un groupe] on obtient que $H = T_a$ et que C est un groupe ($H \subseteq T_{a-1}$ ne s'applique pas).

Quant à la récurrence positive, on a le résultat suivant:

<u>Théorème</u> : ou $H' \subseteq T_{a-1}$

ou $H' = C$ qui est alors compact et égal à T_a, c'est-à-dire $T_{a-1} = \emptyset$.

3. CAS NON-ABELIEN

On revient à la situation de la 1ère section, c'est-à-dire S n'est plus forcément abélien. Regardons les matrices de rang a d'un peu plus près. Soit $T'_r = \{ x \in M(n,n) \mid \text{rang}(x) \leq r \}$

On définit alors [quotient de REES] le demi-groupe T'_a / T'_{a-1} (que l'on appelera S') de la façon suivante :

$S' = (T'_a \setminus T'_{a-1}) \cup \{0\}$ et la multiplication devient : xy (dans S') $= \begin{cases} 0 & \text{si } xy \text{ (dans } T'_a) \in T'_{a-1} \\ xy & \text{sinon} \end{cases}$

Autrement dit, on identifie T'_{a-1} avec 0. S' est un demi-groupe algébrique mais la multiplication n'est plus nécessairement continue au point (x,y) si x ou $y = 0$ [sauf si T_{a-1} est compact] . La topologie de S' est celle induite par $M(n,n)$. T_a sera considéré comme un sous-espace de S'.

Soit $e= e^2$ un idempotent $\neq 0$ de S'. Alors on peut montrer que $eS'e \setminus \{0\}$ est un groupe G_e. Désignons par E_e les idempotents $\neq 0$ de S'e et par F_e les idempotents $\neq 0$ de eS'. Le demi-groupe

$$E_e\ G_e\ F_e \cup \{0\}$$

est alors un demi-groupe complètement 0-simple. Malheureusement, $E_e\ G_e\ F_e$ dépend fortement du choix de e et, en général, n'épuise pas S' [En effet, $E_e\ G_e\ F_e = \{ x \in S' \mid xe, ex \neq 0\}$.]

Cette représentation de "la plupart" des éléments de T_a nous permet toutefois de démontrer [preuve assez technique avec 8 lemmes] le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Si $\upsilon(H) > 0$ alors $H = T_a$. Il existe un idempotent $e \neq 0$ tel que

$$(T_a \cap E_e\ G_e\ F_e) \cup \{0\}$$

soit un demi-groupe complètement 0-simple dont le complément dans T_a est de υ-mesure nulle.

L'ensemble des $x \in T_a$, tels que $x \to x$ i.s. dans la marche à droite <u>et</u> la marche à gauche, contient $T_a \cap E_e \, G_e \, F_e$ et est donc dense dans T_a.

o o

o

Cet exposé contient les résultats sur les marches aléatoires de Högnäs-Mukherjea : "r^* - invariant measures and recurrent random walks : two problems on matrix semigroups" ; 25 pp, manuscrit soumis au Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie.