PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE CREPEL

Lois des grands écarts pour les marches aléatoires sur R

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A4_0>

LOIS DES GRANDS ECARTS POUR LES MARCHES ALEATOIRES SUR R

(Pierre CREPEL)

Cet exposé ne prétend ni être original, ni faire le tour complet de la question: il a simplement un caractère introductif. Son but est de donner quelques résultats (anciens) et démonstrations, relatifs aux lois des grands écarts pour les marches aléatoires sur R, en général peu dégagés dans la littérature.

(X_n) désigne une suite de variables indépendantes et de même loi μ centrée $(EX_1=0)$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le problème que nous examinons tourne autour de la vitesse de convergence dans la loi (faible) des grands nombres:

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$, ... mais à quelle vitesse? Cette vitesse est différente selon l'existence de moments pour X_1.

1°) GRANDS ECARTS SOUS DES HYPOTHESES DE MOMENTS CLASSIQUES

Théorème 1 Soit $a > 0$, alors:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = o\left(\frac{1}{n^a}\right) \iff P(|X_1| > n) = o\left(\frac{1}{n^{a+1}}\right)$$

Remarques: - Cette condition est un peu plus forte que l'existence d'un moment d'ordre a; il existe d'ailleurs d'autres résultats voisins exprimant la même idée.

- La démonstration est assez simple, comme nous allons le voir.

Démonstration du théorème 1:

Pour mieux dégager l'idée de la démonstration, nous nous limiterons au cas des v.a. symétriques (le cas général s'en déduit assez simplement: voir [P] p. 283-6)

CN Le résultat sera obtenu si l'on montre que

$$P(S_n \geq n\varepsilon) \geq n\, b\, P(X_1 \geq n\varepsilon)$$ pour un $b > 0$, dès que n est assez grand.

Or ceci n'est pas difficile, en effet:

$$P(S_n \geq n\varepsilon) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \quad \text{où } A_i = (X_i \geq n\varepsilon) \cap (S_n - X_i \geq 0).$$

Comme il est clair que $P(A_i) = \frac{1}{2} P(X_1 \geq n\varepsilon)$, en raison de l'indépendance, de la symétrie et de l'égalité des lois, et que:

$P(A_i \cap A_j) \leq P[(X_i \geq n\varepsilon) \cap (X_j \geq n\varepsilon)] = [P(X_1 \geq n\varepsilon)]^2$ pour $i \neq j$,

l'inégalité classique et évidente:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum P(A_i \cap A_j)$$

donne ici:

$$P(S_n \geqslant n\varepsilon) \geqslant n.\frac{1}{2}P(X_1 \geqslant n\varepsilon) - \frac{n(n-1)}{2}\left[P(X_1 \geqslant n\varepsilon)\right]^2$$

$$= \frac{n}{2}P(X_1 \geqslant n\varepsilon)\left[1 - (n-1)P(X_1 \geqslant n\varepsilon)\right]$$

Comme X_1 a une espérance finie, le crochet est minoré et la CN est démontrée .

CS ⁎ La première étape consiste à tronquer les v.a. X_i :

Posons: $X_i^{(n)} = X_i . 1_{\{|X_i| < n\}}$

$$S_n^{(n)} = \sum_{i=1} X_i^{(n)} \quad .$$

On a immédiatement:

$$n^a\, P\,(\,|S_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant n^{a+1}\, P\,(\,|X_1| \geqslant n) \; + \; n^a\, P(\,|S_n^{(n)}| \geqslant n\varepsilon)\;,$$

il suffit donc de démontrer, puisque par hypothèse $n^{a+1}P(\,|X_1| \geqslant n) \to 0$,

que: $$P(\,|S_n^{(n)}| \geqslant n\varepsilon\,) = o(\frac{1}{n^a})$$

⁎ La seconde étape consiste à appliquer l'inégalité de Tchebycheff pour un exposant pair $2r > 2a+1$:

$$P(\,|S_n^{(n)}| \geqslant n\varepsilon\,) \leqslant \frac{E\left[S_n^{(n)}\right]^{2r}}{n^{2r}\,\varepsilon^{2r}} \quad ,$$

et à développer : $E\left[S_n^{(n)}\right]^{2r} = E\left[X_1^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}\right]^{2r}$

$$= n\; E\left[X_1^{(n)}\right]^{2r} + n(n-1)\; E\left[X_1^{(n)}\right]^{2r-2} E\left[X_1^{(n)}\right]^{2} + \ldots$$

(grâce à la symétrie).

Il suffit donc de montrer que chacun des (r+1) termes de cette somme est un $o(n^{2r-a})$: c'est un calcul sans surprise :

Chaque terme a un ordre du type $n^m\, E\left[X_1^{(n)}\right]^{2i_1} \ldots E\left[X_1^{(n)}\right]^{2i_m}$ où la suite finie $i_1 , \ldots , i_m$ est fixée et telle que $2r = 2i_1 + \ldots + 2i_m$; comme par hypothèse $P(\,|X_1| > n) = o(\frac{1}{n^{a+1}})$,

il n'est pas difficile de voir en intégrant par parties que:

$$E\left[X_1^{(n)}\right]^{2i} = \begin{cases} O(1) & \text{si } 2i < a+1 \\ o(\log n) & \text{si } 2i = a+1 \\ o(n^{2i-a-1}) & \text{si } 2i > a+1 \end{cases}$$

Il suffit de ranger alors les entiers $i_1, \dots, i_m$ selon ces trois catégories pour s'apercevoir que dans tous les cas:

$$n^m \, E\left[X_1^{(n)}\right]^{2i_1} \dots E\left[X_1^{(n)}\right]^{2i_m} = o(n^{2r-a}) \qquad \blacksquare$$

Pour toutes précisions, variantes ..., voir [P] p. 283 sqq.

2°) GRANDS ECARTS SOUS L'HYPOTHESE D'EXISTENCE D'UNE TRANSFORMEE DE LAPLACE

L'essentiel de ce chapitre tient en quelques lignes:

Si μ admet une transformée de Laplace, alors $P(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon)$ tend vers 0 exponentiellement. Et ceci se démontre simplement en appliquant un théorème limite classique (loi faible des grands nombres, ou théorème de la limite locale si l'on veut être plus précis) à la marche aléatoire S_n relativisée par une exponentielle convenable.

C'est ce que nous allons préciser dans la suite:

Nous supposons dans tout ce qui suit qu'il existe $t_o > 0$, tel que $E(e^{t_o|X_1|}) < \infty$. Nous dirons alors que μ admet une transformée de Laplace (ou qu'elle a un moment exponentiel). La transformée de Laplace de μ sera par définition la fonction: $t \longmapsto \tilde{\mu}(t) = E(e^{tX_1})$:
elle est définie au moins sur $[-t_o, t_o]$.

Il est clair , d'après le théorème 1, que $P(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon)$ tend vers 0 à une vitesse plus rapide que toute puissance de $1/n$; mais peut-on dire mieux?

A. Cas des v.a. gaussiennes $N(0,\sigma^2)$

Ce cas est tout à fait élémentaire: $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ayant même loi que X_1 , il est clair qu'on a:

$$P(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon) = P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant \varepsilon\sqrt{n}) = P(X_1 \geqslant \varepsilon\sqrt{n}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} \, dx,$$

et il est facile de calculer l'ordre de cette suite numérique: c'est

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \, e^{-n\varepsilon^2/2\sigma^2}$$

On obtient donc une décroissance exponentielle.

Deux questions se posent alors naturellement:

a) Si μ admet une transformée de Laplace, sans être nécessairement gaussienne, conserve-t-on quand même une vitesse de convergence exponentielle dans la loi des grands nombres? La réponse est oui, et on calculera les coefficients en fonction de $\tilde{\mu}$. C'est l'objet du théo ème 2.

b) Sous la même hypothèse, en notant toujours $\sigma^2 = EX_1^2$, on peut évidemment toujours écrire: $P(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon) = P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant \varepsilon\sqrt{n}) = P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x)$

où $x = \varepsilon\sqrt{n}$.

Et le théorème de la limite centrale (TLC) nous dit que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ est "presque" une v.a. Γ_σ de loi gaussienne $N(0,\sigma^2)$: plus précisément,

$$\sup_{y \in R} \left| P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant y) - P(\Gamma_\sigma \geqslant y) \right| \longrightarrow 0$$

Mais un tel résultat ne nous donne guère de renseignements sur $P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x)$ lorsque x tend vers l'infini avec n : si l'on veut "remplacer" $S_n/\sqrt{n}$ par Γ_σ , il faut avoir un résultat plus fin que le TLC, par exemple étudier le rapport $P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x) \,/\, P(\Gamma_\sigma \geqslant x)$ lorsque n et x tendent vers l'infini de manières diverses, et en particulier essayer de savoir quand il tend vers 1.

On verra qu'il résulte facilement du théorème 2 que pour $x = \varepsilon\sqrt{n}$, le rapport précédent ne tend jamais vers 1 si X_1 n'est pas gaussienne.

Par contre, lorsque $x = o(\sqrt{n})$, ce rapport peut tendre vers 1, comme il est indiqué au théorème 3.

B. Enoncé précis des théorèmes 2 et 3 (qu'on appellera lois de grands écarts)

Nous supposons donc que (X_n) est une suite de v.a. indépendantes, centrées , de même loi μ admettant un moment exponentiel. Nous notons $\tilde{\mu}$ la transformée de Laplace de μ , et $\psi = \log \tilde{\mu}$; il est facile de voir que ces fonctions sont analytiques sur $[-t_o, t_o]$.

[Si l'on développe ψ en série entière : $\psi(t) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\psi_k}{k!} t^k$, on a coutume d'appeler les coefficients ψ_k les cumulants (ou semi-invariants) de μ]

Nous ferons $\sigma^2=1$, afin de simplifier l'écriture.

Théorème 2 (Supposons que μ n'est pas portée par un ensemble arithmétique)

$$\boxed{P(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon) \sim \frac{e^{-n\lambda(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n}\; a(\varepsilon)}}$$

où $\lambda(\varepsilon) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(t\varepsilon - \log \tilde{\mu}(t) \right)$

[on vérifie immédiatement que cette quantité s'écrit aussi :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(t\varepsilon - \psi(t) \right) = s\psi'(s) - \psi(s), \text{ si } s \text{ est la solution de } \psi'(s) = \varepsilon;$$

d'autre part, la fonction λ est positive ou nulle, on l'appelle la transformée de Cramér de μ; elle est strictement positive pour $\varepsilon>0$]

et où $a(\varepsilon)$ s'exprime également en fonction de $\tilde{\mu}$, à savoir par:

$$a(\varepsilon) = s\sqrt{\psi''(s)}, \quad \text{avec toujours } s \text{ solution de } \psi'(s) = \varepsilon.$$

N.B. * Comme on a, lorsque μ est gaussienne: $\log \tilde{\mu}(t) = \frac{t^2}{2}$,

il est immédiat qu'on retrouve le résultat du cas gaussien.

* Si μ est portée par un ensemble arithmétique, on a un théorème analogue, avec un $a(\varepsilon)$ un peu différent.

* Corollaire (évident):

$$\boxed{\text{Si } \mu \text{ admet un moment exponentiel, alors: } \frac{1}{n}\log P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \longrightarrow -\lambda(\varepsilon)}$$

Ce résultat, évidemment moins précis, est tout de même d'un grand intérêt et ses généralisations à des v.a. à valeurs dans divers espaces fonctionnels a de nombreuses applications à l'étude des trajectoires des processus et aux perturbations des systèmes dynamiques ... cf [A].

Théorème 3

Si μ admet un moment exponentiel:

$$R =: \frac{P(S_n/\sqrt{n} \geq x)}{P(\Gamma \geq x)} = e^{x^2 \rho(x/\sqrt{n})} \left[1 + O(x/\sqrt{n})\right],$$

où ρ est la série de Cramér $\sum_{k\geq 1} \rho_k z^k$ de μ.

- En particulier, si $x = o(n^{1/6})$, le rapport tend vers 1
- si $x = o(n^{1/4})$, alors $R \sim e^{\rho_1 \cdot x^3/\sqrt{n}}$
- si $x = o(n^{3/10})$, alors $R \sim e^{\rho_1 \cdot x^3/\sqrt{n} + \rho_2 \cdot x^4/n}$ etc.

Explications:

+ lemme (élémentaire, admis) et définition:

- La fonction analytique $\theta(t) = \psi(t) - t\,\psi'(t) + \frac{1}{2}\left[\psi'(t)\right]^2$ a un développement de la forme $\sum_{k\geq 3} \theta_k t^k$. Elle ne s'annule jamais pour $t \neq 0$ si μ n'est pas gaussienne [à vérifier]

-L'équation $\psi'(t) = u$ définit au voisinage de 0 une fonction analytique de la variable u : $t=\psi'^{-1}(u)$. La fonction analytique $\theta[\psi'^{-1}(u)]$ admet encore un développememt commençant à l'ordre 3: on peut donc écrire $\theta[\psi'^{-1}(u)] = u^2\rho(u)$

avec $\rho(u) = \sum_{k\geq 1} \rho_k u^k$

- ρ est appelée la série de Cramér de μ

-Les coefficients ρ_k peuvent se calculer (ex: $\rho_1 = \frac{EX_1^3}{6}$, $\rho_2 = \frac{\Psi_4 - 3\Psi_3^2}{24}$, etc.)

+ Grâce au théorème 3,si $x= o(n^a)$, avec $\frac{1}{2}\frac{m}{m+2} \leqslant a < \frac{1}{2}\frac{m+1}{m+3} \left(<\frac{1}{2}\right)$,

alors un équivalent du quotient R se définit au moyen d'un nombre fini de réels à savoir $\rho_1,\ldots,\rho_m$. Et il est alors facile de voir que si une probabilité (ayant une transformée de Laplace) a mêmes moments que N(0,1) jusqu' à l'ordre m+3 , alors $R \to 1$.

(Pour plus de précisions, voir [IL] chapitres 6 à 14)

Avant de passer à la démonstration des théorèmes 2 et 3, il nous faut faire quelques rappels sur la relativisation des marches aléatoires.

C. Relativisation des marches aléatoires

- Lorsque $\tilde{\mu}(t) < \infty$, on peut définir une nouvelle probabilité ${}^t\mu$ de la manière suivante:

$$d\,{}^t\mu(x) = \frac{e^{tx}\, d\mu(x)}{\int e^{tx}\, d\mu(x)} = \frac{e^{tx}\, d\mu(x)}{\tilde{\mu}(t)} = e^{-\Psi(t)}\, e^{tx}\, d\mu(x)$$

Les égalités suivantes sont évidentes:

$${}^t(\mu^{*n}) = ({}^t\mu)^{*n}$$

$$d\mu(x) = \tilde{\mu}(t)\, e^{-tx}\, d\,{}^t\mu(x) = e^{\Psi(t)}\, e^{-tx}\, d\,{}^t\mu(x)$$

$$\text{(1)} \qquad \boxed{d\mu^{*n}(x) = [\tilde{\mu}(t)]^n\, e^{-tx}\, d\,{}^t\mu^{*n}(x) = e^{n\Psi(t)}\, e^{-tx}\, d\,{}^t\mu^{*n}(x)}$$

- Remarques simples:

$\sim$ La transformée de Laplace de ${}^t\mu$ s'écrit : ${}^t\tilde{\mu}(u) = \frac{\tilde{\mu}(u+t)}{\tilde{\mu}(t)}$

${}^t\mu$ a pour espérance $\psi'(t)$ et pour variance $\psi''(t)$

(donc ${}^t\mu^{*n}$ a pour espérance $n\psi'(t)$ et pour variance $n\psi''(t)$)

$\sim$ Les exponentielles sont toujours des fonctions propres pour la marche aléatoire considérée, i.e. si $f : x \mapsto e^{tx}$, alors :

$$(\check{\mu}*f)(x) = \int f(x-y)\, d\mu(y) = \int e^{tx-ty}\, d\mu(y) = \int e^{ty}\, d\mu(y).e^{tx} = \tilde{\mu}(t)\, f(x).$$

Le noyau de transition $\varepsilon_x * {}^t\mu$ apparaît donc comme le noyau relativisé (au sens classique pour les chaînes de Markov) de $\varepsilon_x * \mu$ par la fonction propre $e^{t.}$.

[Rappelons que si $P(x,dy)$ est une probabilité de transition et h une fonction propre positive de valeur propre λ, i.e. $Ph = \lambda h$, alors le noyau relativisé ${}^hP$ est défini par:

$${}^hP(x,dy) = \frac{h(y)\ P(x,dy)}{\int h(y)\ P(x,dy)} = \frac{h(y)\ P(x,dy)}{\lambda\, h(x)} \qquad]$$

- Intérêt de cette relativisation:

L'intérêt de cette notion est que, grâce à la formule ${}^t(\mu^{*n}) = ({}^t\mu)^{*n}$, les propriétés en loi d'une marche aléatoire S_n de loi μ se transposent à une marche aléatoire ${}^tS_n$ de loi ${}^t\mu$, et réciproquement.

L'idée que nous allons utiliser pour obtenir les lois des grands écarts est la suivante: appliquer à ${}^tS_n$ le théorème de la limite locale (cas du théorème 2), ou le théorème de la limite centrale avec vitesse de convergence (cas du théorème 3) et traduire le résultat obtenu sur la marche S_n .

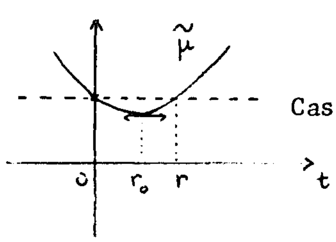
Autres utilisations classiques de la relativisation:

On peut se poser systématiquement la question de la traduction des théorèmes connus pour une marche S_n (centrée ou non), en termes de ${}^tS_n$ suivant les valeurs de t choisies.

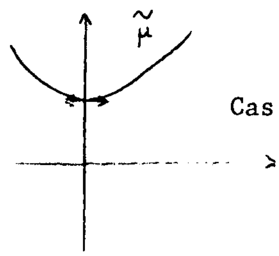
Parmi les valeurs de t intéressantes, il y a ,dans le cas non centré, la valeur r_0 pour laquelle $\psi'(r_0) = 0$ (c'est un certain "recentrage"); il y a aussi la valeur r pour laquelle $\tilde{\mu}(r) = 1$, c'est-à-dire pour laquelle la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est harmonique (cf figures ci-dessous)

Ces considérations sont notamment utilisées pour:

- l'étude des fonctions harmoniques positives (frontière de Martin...) (cf [D])
- le théorème de renouvellement (cf [F], XI.6, p.362)
- l'étude des fluctuations (cf [F], XII.4, p. 388-9)
- les théorèmes quotients ... (cf [S])
- les problèmes des grands écarts (explicité ci-dessous)



Cas $EX_1 < 0$



Cas $EX_1 = 0$

D. Rappels: théorème de la limite locale (TLL)

vitesse de convergence dans le théorème de la limite centrale (VCTLC)

TLL

Soit $\bar{\mu}$ une probabilité centrée sur R , de variance $\bar{\sigma}^2 < \infty$, non portée par un ensemble arithmétique (i.e. de la forme a + bZ), alors $\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}\ \bar{\mu}^{*n}$ converge vaguement vers la mesure de Lebesgue m.

En d'autres termes, si $\bar{X}_n$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi $\bar{\mu}$ comme ci-dessus, on a , en posant $\bar{S}_n = \bar{X}_1 + \ldots + \bar{X}_n$:

$$P(\bar{S}_n \in I) \sim \frac{m(I)}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi n}} \qquad \text{pour tout intervalle compact I}$$

N.B. - Si $\bar{\mu}$ est portée par un ensemble arithmétique, il existe un théorème analogue, un peu modifié.

- La démonstration de ce théorème n'est pas très difficile: voir [B],p. ou [S] .

VCTLC (ou estimation de Berry-Esséen) cf [F],p. 515 ou [IL], p.94 sqq

Si $\check{X}_n$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi, t.q. $E\check{X}_1=0$, $E\,\check{X}_1^2 = \check{\sigma}^2 < \infty$, $E|\check{X}_1|^3 < \infty$, alors en notant $\check{S}_n = \check{X}_1 + \ldots + \check{X}_n$, il existe une constante universelle $\check{K}$ t.q.:

$$\left| P(\check{S}_n/\check{\sigma}\sqrt{n} \geq y) - P(\Gamma \geq y) \right| \leq \frac{\check{K}\, E|\check{X}_1|^3}{\check{\sigma}^3\sqrt{n}} \qquad \forall\, y \in R$$

ou en notant N et $\check{F}_n$ les fonctions de répartition de Γ et $\check{S}_n/\check{\sigma}\sqrt{n}$:

$$\sup_y \left| F_n(y) - N(y) \right| \leq \frac{\check{K}\, E|\check{X}_1|^3}{\check{\sigma}^3\sqrt{n}} .$$

Remarquons qu'une intégration par parties donne pour toute fonction u définie sur$(0,\infty)$:

$$\int_0^\infty u(t)\left[d\check{F}_n(t) - dN(t)\right] = \left\{ u(t)\left[\check{F}_n(t) - N(t)\right]\right\}_0^\infty - \int_0^\infty u'(t)\left[\check{F}_n(t) - N(t)\right] dt \ ;$$

ceci est inférieur ou égal à:

$$\left[\, |u(0)| + \int_0^\infty |u'(t)|\, dt \,\right] . \frac{\check{K}\, E|\check{X}_1|^3}{\check{\sigma}^3\sqrt{n}}$$

E. Démonstration du théorème 2

Appliquons la formule de relativisation (1) à un t bien choisi, à savoir au s solution de l'équation $\psi'(s) = \varepsilon$

$$P(S_n/n \geq \varepsilon) = P(S_n \geq n\psi'(s)) = e^{n\psi'(s)} E(e^{-s\, {}^sS_n} 1_{\{{}^sS_n \geq n\psi'(s)\}})$$

$$= e^{n[\psi(s) - s\psi'(s)]} E(e^{-s\, {}^sS'_n} \cdot 1_{\{{}^sS'_n \geq 0\}})$$

où ${}^sS_n$ est une marche aléatoire de loi ${}^s\mu$, et où ${}^sS'_n = {}^sS_n - n\psi'(s)$ est la marche aléatoire recentrée (de variance $\psi''(s)$).

L'application du TLL à la marche ${}^sS'_n$ donne alors immédiatement le théorème 2 . ■

Remarque:

Si l'on se contente de vouloir démontrer le résultat du corollaire, à savoir $\frac{1}{n}\log P(S_n/n \geq \varepsilon) \to -\lambda(\varepsilon) = \psi(s) - s\,\psi'(s)$, il suffit, au lieu d'appliquer le TLL, d'utiliser simplement la loi faible des grands nombres pour la marche ${}^sS'_n$ (vérification immédiate).

F. Démonstration du théorème 3 cf [F] ,p. 517-20

Les idées sont tout à fait analogues, et les difficultés techniques ont un caractère élémentaire (quoiqu'un peu compliqué).

Désignons ici par s la solution de $\psi'(s) = x/\sqrt{n}$ (N.B.: $s \sim x/\sqrt{n}$), et notons :

$$A =: P(S_n/\sqrt{n} \geq x) = e^{n[\psi(s) - s\,\psi'(s)]} E(e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\cdot\frac{{}^sS'_n}{\sqrt{n\psi''(s)}}} 1_{\{{}^sS'_n \geq 0\}}).$$

L'idée est alors la suivante: on montre qu'on peut remplacer ${}^sS'_n/\sqrt{n\,\psi''(s)}$ par Γ et au moyen de développements de ψ et de la densité gaussienne, on estime A. Les calculs sont un peu laborieux, mais sans difficulté majeure:

En gros: $n[\psi(s) - s\,\psi'(s)] \sim -n\,s^2/2! \sim -x^2/2$,
et l'espérance est à peu près de l'ordre de $1/\sqrt{2\pi}\, s\sqrt{n} \sim 1/\sqrt{2\pi}\,x$
A est "donc" en gros de l'ordre de $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}\,x \sim P(\Gamma \geq x)$. En fait, c'est un peu plus compliqué que cela:

Posons:

$$B =: e^{n[\psi(s) - s\,\psi'(s)]} E(e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\,\Gamma} \cdot 1_{\{\Gamma \geq 0\}})$$

$$C =: e^{n[\psi(s) - s\,\psi'(s) + \frac{1}{2}(\psi'(s))^2]} P(\Gamma \geq x)$$

$$= e^{x^2 \rho(x/\sqrt{n})} P(\Gamma \geq x) \quad \text{par définition de s et de } \rho .$$

Il s'agit de montrer que $\frac{A}{C} = 1 + O(\frac{x}{\sqrt{n}})$ et pour cela nous procéderons en deux temps:

* Montrons d'abord qu'il existe une constante K t.q.

$$|A - B| \leq \frac{2K}{\sqrt{n}} e^{n[\psi(s) - s\,\psi'(s)]} = O(\frac{x}{\sqrt{n}} B)$$

(ceci signifiera que $\frac{A}{B} = 1 + O(\frac{x}{\sqrt{n}})$)

Or ceci résulte aisément de l'inégalité obtenue par intégration par parties à la suite du VCTLC, appliquée à la marche aléatoire ${}^{s}S'_n$ et à la fonction $u(t) = e^{-st}$: Comme ,ici, s varie dans un petit intervalle, on a, avec les notations du VCTLC: $\frac{\check{K}.E|\check{X}_1|^3}{\check{\sigma}^3} \leqslant K$ (constante fixée et indépendante de s),

par suite:

$$\left| E(e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\,.\,{}^{s}S'_n/\sqrt{n\,\psi''(s)}} . 1_{\{{}^{s}S'_n \geqslant 0\}}) - E(e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\,\Gamma} . 1_{\{\Gamma \geqslant 0\}}) \right| \leqslant 2\frac{K}{\sqrt{n}} ,$$

ce qui donne l'inégalité cherchée.

* Comparons maintenant B à C :

Il s'agit de démontrer que $\frac{B}{C} = 1 + O(\frac{x}{\sqrt{n}})$, c'est-à-dire que:

$$\frac{E(e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\,\Gamma} . 1_{\{\Gamma \geqslant 0\}})}{e^{\frac{1}{2} n[\psi'(s)]^2} . P(\Gamma \geqslant x)} = 1 + O(\frac{x}{\sqrt{n}}) ,$$

ou encore que:

$$\frac{\int_0^\infty e^{-s\sqrt{n\psi''(s)}\; t} \, dN(t)}{e^{\frac{1}{2} n[\psi'(s)]^2} [1-N(x)]} = 1 + O(\frac{x}{\sqrt{n}});$$

or ceci est un calcul élémentaire sur la fonction $t \longmapsto e^{-t^2/2}$, il est facile de voir que le numérateur et le dénominateur sont de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$ et un développement un peu plus poussé de ψ et de N donne le résultat. ∎

N.B. Aussi bien pour le théorème 2 que pour le théorème 3 , on trouvera des approfondissements dans [S] et les références qui s'y trouvent. Voir aussi les chapitres 6 à 14 de [IL].

Bibliographie

[A] R. AZENCOTT "Grandes déviations..." Ecole d'été de Calcul des Probabilités de Saint-Flour (cours), à paraître : Lect. Notes (Springer)

[B] L. BREIMAN "Probability" Addison Wesley (1968)

[D] J. DENY "Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$" Séminaire de Théorie du Potentiel 4e année, Paris (1959-60) n°5

[F] W. FELLER "An introduction to probability theory and its applications" vol. II . Wiley (1966)

[IL] I.A. IBRAGIMOV - Yu.V. LINNIK "Independent dand stationary sequences of random variables " Wolters Noordhoff (1971)

[P] V. PETROV "Sums of independent random variables" Ergebnisse (Springer) (1972)

[S] C. STONE "On local and ratio limit theorems" Proc. 5th Berk. Symp. vol.II, part.I (1972) , p.217-24