JEAN-PIERRE CONZE

Approximations périodiques, automorphismes spéciaux et produits gauches

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A3_0>

APPROXIMATIONS PERIODIQUES , AUTOMORPHISMES SPECIAUX ET PRODUITS GAUCHES .

Jean Pierre CONZE

INTRODUCTION .

Considérons un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et un automorphisme T de cet espace . A cet automorphisme est associé un opérateur unitaire , noté encore T , défini sur $L^2(\mu)$ par $(Tf)(x) = f(Tx)$, $f \in L^2(\mu)$.

L'étude des propriétés spectrales (multiplicité , singularité du spectre , mélange ,...) de l'opérateur ainsi associé à un automorphisme d'espace mesuré tient une place importante en théorie ergodique .

Dans [7] KATOK et STEPIN ont introduit la méthode des approximations périodiques , qui permet d'étudier les propriétés spectrales de certains automorphismes , les automorphismes bien approchés par les automorphismes périodiques , dont les rotations sont des exemples typiques.

A la suite de [7] , de nombreux auteurs ont développé cette méthode , l'appliquant , en particulier , aux automorphismes obtenus par extension d'automorphismes donnés , ou comme automorphismes spéciaux .

Dans cet article , qui est , pour l'essentiel , un article d'exposition , nous nous proposons de rassembler , et dans certains cas d'étendre , quelques uns de ces résultats .

NOTATIONS:

On note $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\ \|$ le produit scalaire et la norme d'éléments de $L^2(\mu)$. Pour $w \in L^2(\mu)$ et U un opérateur unitaire dans $L^2(\mu)$, on désigne par $H_U(w)$ le sous espace engendré dans $L^2(\mu)$ par w et ses images $U^k w, k=\pm 1, \pm 2, \dots$

On appelle <u>partition</u> dans X toute famille ordonnée $\zeta = (C_i, i=1,2,\ldots)$ d'ensembles mesurables disjoints de X (dont la réunion n'est pas nécessairement X). Etant donnée une suite (ζ_n) de partitions dans X , on note $\zeta_n \to \varepsilon_X$ la condition :

pour tout ensemble mesurable A , il existe des ensembles $A(n)$, ζ_n-mesurables (c'est à dire formés d'éléments de ζ_n) tels que $\lim_n \mu(A \Delta A(n)) = 0$.

I . APPROXIMATIONS PERIODIQUES ET PROPRIETES SPECTRALES .

MULTIPLICITE SPECTRALE .

(pour la notion de multiplicité spectrale , voir par exemple HALMOS [6])

<u>Lemme</u> 1. [KATOK - STEPIN [7] , CHACON [2]] . Si la multiplicité spectrale d'un opérateur unitaire U est $> m$, il existe $m+1$ vecteurs unitaires $u_1,\ldots,u_{m+1}$, tels que , pour tout vecteur w , on ait :

$$\sum_{i=1,\ldots,m+1} d^2(u_i, H_U(w)) \geq m .$$

<u>Lemme</u> 2 . Soit $\zeta = (C_i, i=1,\ldots,q)$ une partition dans X . Pour toute fonction v de la forme $v = \sum_i a_i 1_{C_i}$, les a_i étant des constantes , on a :

$$\| v - v' \|^2 \leq \| v \|^2 (1 - \mu(B)/\sup_i \mu(C_i)) ,$$

où $B = \bigcap_{j=1}^{q} T^{-j+1} C_j$, et $v' = \sum_i a_i 1_{T^i B}$.

<u>Preuve</u> : On a $T^i B \subset C_i$, $i=1,\ldots,q$; d'où il résulte :

$$\| \sum a_i 1_{C_i} - \sum a_i 1_{T^i B} \|^2 = \| \sum a_i 1_{C_i - T^i B} \|^2 = \sum |a_i|^2 \mu(C_i - T^i B)$$

$$\leq (\sum |a_i|^2 \mu(C_i)) \sup_i [\mu(C_i - T^i B)/\mu(C_i)] = \| v \|^2 (1 - \mu(B)/\sup_i \mu(C_i)) .$$

Proposition 1 . Soit (ξ_n) , $\xi_n=(C_i(n),i=1,\dots,q_n)$, une suite de partitions de X telle que $\xi_n \to \varepsilon_X$. S'il existe un entier m et une constante $\alpha < m+1$ tels que

$$\sup_i \mu(C_i(n)) \leq \alpha\, \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)\Big) \quad , \text{ pour tout } n ,$$

la multiplicité spectrale de T est au plus m .

Preuve : Posons $B_n = \bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)$, et $w_n=1_{B_n}$.

Pour toute fonction v dans $L^2(\mu)$, ξ_n-mesurable , on a , d'après le lemme 2 ,

$$d^2(v,H_T(w_n)) \leq \|v\|^2(1 - \mu(B_n)/\sup_i \mu(C_i(n))$$
$$\leq \|v\|^2(1 -1/\alpha) .$$

Etant donnée u dans $L^2(\mu)$, on peut écrire : $u=v_n+h_n$,avec v_n ξ_n-mesurable et $\lim_n \|h_n\| = 0$. On a donc :

$$d^2(u,H_T(w_n)) \leq \|u_n\|^2(1 -1/\alpha) + \|h_n\|\,\|u\|$$

d'où : $\limsup_n d^2(u,H_T(w_n)) \leq \|u\|^2(1 -1/\alpha) < \|u\|^2 m/m+1$, si $u \neq 0$

Si la multiplicité spectrale de T était $> m$, on pourrait , d'après le lemmme 1 , trouver des éléments $u_1,\dots,u_{m+1}$ de norme 1 dans $L^2(\mu)$ tels que :

$$\sum_{k=1,\dots,m+1} d^2(u_k,H_T(w_n)) \geq m \quad , \text{ pour tout } n .$$

On aurait donc : $m \leq \limsup_n \sum_{k=1,\dots,m+1} d^2(u_k,H_T(w_n)) < m$,

ce qui conduit à une contradiction .

Définition 1 : On dit que l'automorphisme T admet une approximation de vitesse θ/n s'il existe une suite de partitions $\xi_n = (C_i(n) , i=1,\dots,q_n)$ telle que :

1) $\xi_n \to \varepsilon_X$,

2) $\sum_{1\leq i<q_n} \mu(TC_i(n) \cap C^c_{i+1}(n)) \leq \theta/2q_n$,

3) $\lim_n \sup_i q_n \mu(C_i(n)) = 1$.

Remarques .

1. Si les éléments de chaque partition ζ_n ont la même mesure, la condition d'approximation de vitesse θ/n se réduit à 1) et

$$2') \quad \sum_{1\le i<q_n} \mu(TC_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) \le \theta/q_n \quad .$$

2. l'approximation simple (cf. BAXTER [1]) correspond au cas où la constante θ est nulle .

Théorème 1. [STEPIN [10]]. Si un automorphisme T admet une approximation de vitesse θ/n , avec $\theta < 2m/m+1$, où m est un entier, la multiplicité spectrale de T est au plus m .

Preuve : On a la majoration :

$$\mu(C_1(n) - \bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)) \le \sum_{j=1}^{q_n-1} \mu(T^{-j+1}C_j(n) \cap T^{-j}C_{j+1}(n))$$
$$\le \sum_{j=1}^{q_n-1} \mu(TC_j(n) \cap C_{j+1}^c(n)) \le \theta/2q_n \quad .$$

Il en résulte :

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)) \;/\; \sup_i \mu(C_i(n)) \ge q_n\mu(C_1(n)) - \theta/2) \;/q_n \sup_i \mu(C_i(n)) .$$

Le minorant de droite tend vers $1-\theta/2 > 1/m+1$. La proposition 1 implique le résultat .

SPECTRE SINGULIER .

Lemme 3 . Soient $\zeta = (C_i, i=1,2,\ldots)$ une partition et $v \in L^2(\mu)$ une fonction ζ-mesurable . On a pour tout entier s :

$$|\langle T^s v, v\rangle - \|v\|^2| \le \|v\|^2 \sup_i \left[\mu(T^sC_i \Delta C_i)/\mu(C_i)\right] \quad .$$

Preuve : Soit $C_i' = C_i \cap T^{-s}C_i$. La fonction v est de la forme $v = \sum a_i 1_{C_i}$,et on peut écrire $v = v_1+v_2$, avec $v_1 = \sum a_i 1_{C_i'}$, et $v_2 = \sum a_i 1_{C_i - C_i'}$. Comme v_1 et v_2 sont orthogonaux , ainsi que T^sv-v_1 et v_1 , on a :

$$|\langle T^s v, v\rangle - \|v\|^2| \le \|v_2\|^2 + \|T^sv - v_1\| \, \|v_2\| \; .$$

D'autre part, on a, d'après $C_i' \subset T^{-s}C_i$ et $\mu(T^{-s}C_i) = \mu(C_i)$,

$\|T^s v - v_1\|^2 = \sum |a_i|^2 \mu(T^{-s}C_i - C_i') = \sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i') = \|v_2\|^2$.

Il en résulte :

$$|\langle T^s v, v\rangle - \|v\|^2| \leq 2\|v_2\|^2 = 2\sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i')$$

$$\leq 2\sum |a_i|^2 \mu(C_i)) \sup_i[\mu(C_i - C_i')/\mu(C_i)] = \|v\|^2 \sup_i[\mu(T^s C_i \Delta C_i)/\mu(C_i)].$$

<u>Proposition</u> 2. Soit (ζ_n), $\zeta_n = (C_i(n), i=1,\ldots,q_n)$, une suite de partitions de X telle que $\zeta_n \to \varepsilon_X$. S'il existe une suite d'entiers (s_n) tendant vers l'infini, et un nombre fixe $\theta < 1$ tels que : $\sup_i[\mu(T^{s_n}C_i(n) \Delta C_i(n))/\mu(C_i(n))] \leq \theta$, l'automorphisme T a un spectre singulier, et n'est pas fortement mélangeant.

<u>Preuve</u> : Soit $u \in L^2(\mu)$, de norme 1. On peut écrire $u = v_n + h_n$; avec v_n ζ_n-mesurable et $\lim_n \|h_n\| = 0$. D'après le lemme 3, on a:

$|\langle T^{s_n}u_n, u_n\rangle| \geq \|u_n\|^2(1-\theta)$; d'où $\liminf_n |\langle T^{s_n}u, u\rangle| \geq 1-\theta > 0$.

Le lemme de Riemann-Lebesgue implique que T a un spectre singulier, et il est clair que T ne peut être fortement mélangeant.

<u>Remarque</u>. La condition $\lim_n \sup_i[\mu(T^{s_n}C_i(n) \Delta C_i(n))/\mu(C_i(n))] = 0$, implique que T est <u>rigide</u>, c'est à dire vérifie la condition suivante :

il existe une suite (s_n) tendant vers l'infini telle que, pour toute $f \in L^2(\mu)$, $\lim_n \|T^{s_n}f - f\|_2 = 0$.

<u>Définition</u> 2 . On dit que T admet une <u>approximation cyclique</u> (de périodes $q_n, n=1,2,\ldots$) de vitesse θ/n (resp. $o(1/n)$) , s'il existe une suite de partitions $\zeta_n = (C_i(n), i=1,\ldots,q_n)$ telle que :

1) $\zeta_n \to \varepsilon_X$,

2) $\sum_{1\leq i<q_n} \mu(TC_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) + \mu(TC_{q_n}(n) \Delta C_1(n)) \leq \theta/q_n$ (resp. $= o(1/q_n)$)

3) $\lim_n \sup_i q_n \mu(C_i(n)) = 1$.

<u>Théorème</u> 2 . [KATOK -STEPIN [7]]. Si l'automorphisme T admet une approximation cyclique de vitesse θ/n , avec $\theta<1$, il a un spectre singulier , et n'est pas fortement mélangeant .

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier la condition de la proposition 2 , avec $s_n = q_n$.

Faisons la convention $C_{q_n+j} = C_j$. On a , pour $1 \leq i \leq q_n$:

$$\mu(T^{q_n} C_i(n) \Delta C_i(n)) \leq \sum_{0\leq s<q_n} \mu(T^{q_n-s} C_{i+s}(n) \Delta T^{q_n-s-1} C_{i+s+1}(n))$$

$$= \sum_{1\leq j\leq q_n} \mu(TC_j(n) \Delta C_{j+1}(n)) \leq \theta/q_n .$$

Il en résulte :

$$\sup_i [\mu(T^{q_n} C_i(n) \Delta C_{i+1}(n))/\mu(C_i(n))] \leq \theta/(q_n \inf_i \mu(C_i(n))) ,$$

majorant qui tend vers $\theta < 1$, quand n tend vers l'infini .

<u>Remarques</u> .

1) Si T admet une approximation cyclique de vitesse $o(1/n)$, il résulte de la démonstration précédente que T est rigide .

2) Si T admet une approximation simple par une suite de partitions ζ_n, $\zeta_n = (C_i(n), i=1,\ldots,q_n)$, avec $\alpha = \sup_n (X - \bigcup_{i=1}^{q_n} C_i(n))$, l'approximation est cyclique de vitesse α/n .En particulier , T est à spectre singulier si $\alpha < 1$.

II. APPROXIMATIONS ET AUTOMORPHISMES SPECIAUX.

Rappelons la définition d'un automorphisme spécial. Soit f une fonction définie sur X, intégrable, à valeurs dans $\{0,1,2,\dots\}$. Soit Y le sous-ensemble de $X \times \mathbb{Z}$ défini par $Y = \{(x,n), x \in X, 0 \leqslant n \leqslant f(x)\}$, muni de la mesure $\tilde{\mu}$ obtenue par restriction à Y et normalisation de la mesure produit sur $X \times \mathbb{Z}$. L'<u>automorphisme spécial</u> T_f, de base T sous la fonction f, est défini sur Y par :

$$T_f(x,n) = \begin{cases} (x,n+1), & \text{pour } 0 \leqslant n < f(x), \\ (Tx,0), & \text{pour } n = f(x). \end{cases}$$

On définit de façon analogue le <u>flot spécial</u> $(T_f^t, t \in \mathbb{R})$, de base T sous la fonction f, f étant alors à valeurs réelles strictement positives.

Le sous-ensemble $X \times \{0\}$ de Y est identifié à X. La partition de X en les ensembles $A_k = f^{-1}(k-1)$, $k=1,2,\dots$ est notée ζ_f. Si T admet une approximation par une suite de partitions ξ_n, on peut construire une approximation pour T_f, si l'on fait une hypothèse convenable d'approximation de la partition ζ_f par la suite (ξ_n). Pour formuler cette hypothèse, donnons d'abord une définition.

<u>Définition</u> 3. Soit $\zeta = (A_1, A_2, \dots)$ une partition dans X. On dit qu'une suite de partitions $\xi_n = (C_i(n), i=1,\dots,q_n)$ forme une approximation de vitesse δ/n (resp. $o(1/n)$) de ζ, s'il existe, pour chaque n, des ensembles $F_k(n)$, $k=1,2,\dots$, formés d'éléments de ξ_n, tels que

$$\mu\Big(\bigcup_k (A_k \,\Delta\, F_k(n))\Big) \leqslant \delta/q_n \quad (\text{resp. } o(1/q_n)).$$

On fera dans toute la suite l'hypothèse $\delta < 1$. Cette hypothèse permet d'utiliser la remarque suivante :

Si $\delta < 1$, si ζ est telle que $\bigcup_k A_k = X$, et si $\lim_n \sup_i |1 - q_n \mu(C_i(n))| = 0$,

pour n assez grand, chaque ensemble $C_i(n)$ figure une fois et une seule dans l'un des $F_k(n)$.

On peut donc, dnas cette situation, associer à chaque $C_i(n)$ un ensemble, noté $A_{k_i}(n)$, de ζ, de telle façon que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) \cap A^c_{k_i}(n)) \leqslant \delta/q_n \quad .$$

Pour la construction d'une approximation de T_f , une hypothèse un peu plus forte est nécessaire . Nous dirons que la suite (ζ_n) forme une approximation uniforme de vitesse δ/n de ζ , si , outre la condition de la définition 3 , on a :

$$\mu(C_i(n) \cap A^c_{k_i}(n)) = o(1/q_n) \quad \text{(uniformément en } i \text{).}$$

Théorème 3 . Si T admet une approximation (resp. une approximation cyclique) de vitesse θ/n par une suite de partitions ζ_n , et si la suite (ζ_n) forme une approximation uniforme de vitesse δ/n de ζ_f , l'automorphisme spécial T_f admet une approximation (resp. une approximation cyclique) de vitesse $(\theta+2\delta)/n$.

Preuve : Nous raisonnons dans le cas d'une approximation cyclique de T . Le raisonnement serait analogue pour une approximation . Nous utilisons les notations introduites précédemment (la remarque suivant la définition 3 s'applique à la partition ζ_f).

Posons $C'_i(n) = C_i(n) \cap A_{k_i}(n)$. Pour chaque n , soit $\tilde{\zeta}_n$ la partition dans Y ainsi définie :

ses éléments $\tilde{C}_j(n)$, $1 \leqslant j \leqslant t_n$, $t_n = \sum_{i=1}^{q_n} k_i(n)$, sont les copies de $C'_i(n)$ dans $A_{k_i(n)} \times s$, pour $0 \leqslant s \leqslant k_i(n) - 1$, munies de l' ordre lexicographique .

Il est clair que $\tilde{\zeta}_n \to \varepsilon_Y$. Faisons les conventions

$C_{q_n+1}(n) = C_1(n)$, $\tilde{C}_{t_n+1}(n) = \tilde{C}_1(n)$. Soit $a = (1+\int_X f d\mu)^{-1}$ la constante de normalisation de $\tilde{\mu}$.

On a , d'après la condition d'approximation uniforme ,

$$\begin{aligned} |1- q_n\mu(C'_i(n))| &\leqslant |1- q_n\mu(C_i(n))| + q_n\mu(C_i(n)-C'_i(n)) \\ &\leqslant |1- q_n\mu(C_i(n))| + o(1/q_n)q_n \ , \end{aligned}$$

d'où : $$\lim_n \sup_i |1- q_n \mu(C'_i(n))| = 0 \ .$$

Il en résulte que :

$\lim_n t_n/q_n = 1/a$ et $\lim_n \sup_j |1 - t_n \tilde{\mu}(\tilde{C}_j(n))| = 0$.

On a , d'autre part :

$$\sum_{j=1}^{t_n} \tilde{\mu}(T_f\tilde{C}_j(n) \triangle \tilde{C}_{j+1}(n)) = a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC'_i(n) \triangle C'_{i+1}(n))$$
$$\leq a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i(n) \triangle C_{i+1}(n)) + 2a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) \cap A^c_{k_i}(n))$$
$$\leq a/q_n \ (\theta + 2\delta) = (at_n/q_n)(\theta+2\delta)/t_n \quad ,$$

avec $\lim_n at_n/q_n = 1$.

Corollaire 1 . Sous les hypothèses du théorème 3 , avec approximation cyclique et la condition $\theta + 2\delta < 1$, l'automorphisme spécial T_f a un spectre singulier , et n'est pas fortement mélangeant .

Si T admet une approximation cyclique de vitesse $o(1/n)$ par une suite de partitions ξ_n et si cette suite forme une approximation uniforme de vitesse $o(1/n)$ de $\mathcal{C}_f$, l'automorphisme T_f est rigide .

le théorème permet également d'obtenir une borne pour la multiplicité spectrale de T_f . Cependant , on peut obtenir ce résultat sans la condition d'uniformité .

Théorème 4 . [GOODSON - WHITMAN [5]] . Si T admet une approximation de vitesse θ/n par une suite de partitions ξ_n , et si cette suite (ξ_n) forme une approximation de vitesse δ/n de $\mathcal{C}_f$, avec $\theta + 2\delta < m/m+1$, où m est un entier , la multiplicité spectrale de T_f est au plus m .

Preuve : En réutilisant les notations précédentes , on a :

$$\frac{1}{a} \tilde{\mu}\left(\bigcap_{j=1}^{t_n} T_f^{-j+1}\tilde{C}_j(n)\right) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{q_n} T^{-i+1}C'_i(n)\right)$$
$$\geq \mu\left(\bigcap_{i=1}^{q_n} T^{-i+1}C_i(n)\right) - \sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) - C'_i(n))$$
$$\geq (1 - (\tfrac{\theta}{2}+\delta))/q_n \quad .$$

(Cf. la démonstration du théorème 1)

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{a}\sup_j \tilde{\mu}(\tilde{C}_j(n)) \leq \frac{1}{a}\sup_i \mu(C_i(n)) \quad ,$$

d'où : $$\tilde{\mu}\Big(\bigcap_{j=1}^{t_n} T_f^{-j+1}\tilde{C}_j(n)\Big)/\sup_j \tilde{\mu}(\tilde{C}_j(n)) \geqslant \big(1-(\tfrac{\theta}{2}+\delta)\big)/\big(q_n \sup_i \mu(C_i(n))\big)$$

$$\geqslant \frac{1}{m+1}\cdot 1/q_n \sup_i (C_i(n))) \quad ,$$

et le théorème résulte de la proposition 1 .

ABSENCE DE MELANGE POUR CERTAINS FLOTS SPECIAUX .

Nous avons vu que la propriété d'approximation cyclique avec une vitesse convenable implique l'absence de mélange . D'après ce qui précède , un résultat de ce type peut être obtenu pour certains automorphismes spéciaux . Nous donnons maintenant un résultat analogue , qui étend un théorème de KOCHERGIN sur les flots spéciaux dont la base est une rotation .

<u>Proposition</u> 3 . Si l'automorphisme T admet une approximation cyclique (avec périodes q_n) de vitesse θ/n , avec $\theta < 1$, et s'il existe une suite (s_n) et une constante M telles que :

$$\lim_n \mu\Big\{x: \Big|\sum_{0\leq k<q_n} f(T^k x) - s_n\Big| > M\Big\} = 0 \quad ,$$

alors T_f n'est pas fortement mélangeant .

<u>Preuve</u>: Posons $f_{q_n}(x) = \sum_{0\leq k<q_n} f(T^k x)$, et $D_n = \{x: |f_{q_n}(x)-s_n| > M\}$.

On a : $T_f^{f_{q_n}(x)} x = T^{q_n} x$, pour $x \in X$ ($X\times\{0\}$ étant identifié à X) .

Soit $A\subset X$. On a la majoration :

$$\int_A 1_A(T^{q_n}x)\, d\mu(x) = \int_A 1_A(T_f^{f_{q_n}(x)}x)\, d\mu(x) \leq \mu(D_n) + \sum_{|k|\leq M}\int_A 1_A(T_f^{s_n+k}x)\, d\mu(x) \ .$$

Si T_f était fortement mélangeant , la limite du second membre de l'inégalité serait $2M\mu(A)^2$. D'après la proposition 2, la limite inférieure du membre de gauche majore $(1-\theta)\mu(A)$. On aurait donc : $\mu(A) \geqslant \frac{1-\theta}{2M} > 0$, pour tout $A\subset X$, ce qui est absurde.

Considérons maintenant un flot spécial $(T_f^t, t \in R)$ de base T, sous une fonction f (à valeurs dans R^+) . La démonstration de la proposition précédente s'étend facilement au cas du flot, et on obtient:

Théorème 5 . Si T admet une approximation cyclique de périodes q_n , de vitesse θ/n ,avec $\theta<1$, et s'il existe une suite S_n et une constante M telles que:

$$\lim_n \mu\left\{x : \left|\sum_{0\leq k<q_n} f(T^k x) - S_n\right| > M\right\} = 0 ,$$

alors le flot spécial (T_f^t) n'est pas fortement mélangeant.

Corollaire 2 (KOCHERGIN [8]) . Si T est une rotation irrationnelle et si f est à variation bornée , (T_f^t) n'est pas fortement mélangeant.

Preuve : Soient α un nombre irrationnel, $(p_n/q_n , n \in N)$ la suite du développement de α en fraction continue. On sait qu'il existe une constante c, avec $c \leq 1/\sqrt{5}$, telle que $|\alpha - p_n/q_n| < c/q_n^2$.

Cette condition implique que la rotation $T : x \mapsto x+\alpha \mod 1$, sur R/Z, admet une approximation cyclique de périodes q_n , de vitesse $2c/n$, avec $2c < 1$.

D'autre part ,d'après un lemme dû à Koksma, si f est à variation bornée , on a:

$$\left|\sum_{0\leq k<q_n} f(x+k\alpha) - q_n \int_X f(x)\, d\mu(x)\right| \leq M = \mathrm{var}(f).$$

Remarque: On a montré en fait que les transformations et les flots considérés dans les divers énoncés de ce paragraphe, relatifs au mélange fort, n'ont pas de facteur fortement mélangeant.

III . PRODUITS GAUCHES FINIS

Nous appliquons maintenant la méthode des approximations à l'étude des propriétés spectrales des produits gauches.

Soit φ une fonction mesurable définie sur X à valeurs dans le groupe Γ_N des racines nièmes de l'unité (on pourrait, sans changer les résultats, considérer un groupe Γ abélien fini).

Sur l'espace $Z = X \times \Gamma_N$ muni de la mesure produit m, on construit une transformation τ_φ (produit gauche de T par φ) en posant:

$$\tau_\varphi(x,\gamma) = (Tx, \varphi(x)\gamma) \ .$$

Les sous-espaces H_j formés des fonctions de la forme $(x,\gamma) \longmapsto \gamma^j f(x)$, $f \in L^2(X)$, $j=0,1,\dots,N-1$, constituent une décomposition de $L^2(m)$ en sous espaces orthogonaux invariants par τ_φ.

Soit $V_{T,\varphi}$ l'opérateur $f \longmapsto \varphi.Tf$, opérant dans $L^2(X)$. La restriction de τ_φ à H_j est unitairement équivalente à l'action de V_{T,φ^j} dans $L^2(X)$. L'étude des propriétés spectrales de τ_φ se ramène donc à celle des opérateurs V_{T,φ^j} .

On note ζ_φ la partition de X formée des ensembles $\varphi^{-1}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_N$

Démontrons d'abord un lemme analogue au lemme 3.

On note simplement V l'opérateur $V_{T,\varphi}$.

<u>Lemme 4</u> . Soient ξ une partition dans X, $\xi = (C_i \ , i=1,2,\dots)$, et $u = \sum a_i 1_{C_i}$ une fonction de $L^2(\mu)$, ξ-mesurable. Soient c un nombre de module 1 et s un entier. On a:

$$\left| \langle V^\ell u,u\rangle - c\|u\|^2 \right| \leq 2\|u\|^2 \sup_i \left[1 - \frac{\mu(C_i')}{\mu(C_i)} \right]$$

où $C_i' = \left\{ x \in C_i \ : \ V^\ell 1_{C_i}(x) = c \right\}$.

<u>Preuve</u>: Ecrivons $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 = \sum a_i 1_{C_i'}$ et $u_2 = \sum a_i 1_{C_i - C_i'}$.

On a : $u_1 . u_2 = 0$ et $u_1 .(V^\ell u - cu_1) = 0$. Il en résulte:

$$\left| \langle V^\ell u,u\rangle - c\langle u,u\rangle \right| = \left| \langle V^\ell u - cu_1 \ ,u_2\rangle - c\langle u_2,u_2\rangle \right|$$

$$\leq \|u_2\|^2 + \|V^\ell u - cu_1\| \ \|u_2\| = 2\sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i')$$

$$\leq 2\sum |a_i|^2 \mu(C_i) \ . \ \sup_i \left[\mu(C_i - C_i') \ / \ \mu(C_i) \right] \ .$$

<u>Théorème 6</u> (RILEY [9]) . Supposons que l'automorphisme T admette une approximation cyclique de vitesse θ/n, par une suite (ξ_n) de partitions formant une approximation de ζ_φ de vitesse δ/n. Si $\theta + 2\delta < 1$, le spectre de τ_φ est singulier.

<u>Preuve</u>: Notons $\varphi_{q_n}(x)$ le produit $\prod_{j=0}^{q_n-1} \varphi(T^j x)$, $C_i = C_i(n)$ les éléments de ξ_n. Pour tout c, on a :

$$\mu\{x : V^{q_n} 1_{C_i}(x) \neq c\} \leq \mu(C_i \cap T^{-q_n} C_i^c) + \mu\{x : \varphi_{q_n}(x) \neq c\} \quad .$$

D'après la démonstration du théorème 2, on a:

$$\mu(C_i \cap T^{-q_n} C_i^c) \leq \theta/2q_n \quad .$$

D'après l'hypothèse d'approximation de ζ_φ, il existe un nombre c (racine de l'unité) tel que: $\mu\{x : \varphi_{q_n}(x) \neq c\} \leq \delta/q_n$.

Il en résulte d'après le lemme 4, pour une fonction u_n ξ_n-mesurable:

$$|\langle V^{q_n} u_n, u_n\rangle| \geq \|u_n\| \frac{1 - (\theta+2\delta)}{q_n \sup_i \mu(C_i(n))} \quad ,$$

et donc, pour toute fonction $u \in L^2(\mu)$,

$$\liminf_n |\langle V^{q_n} u, u\rangle| \geq \|u\|(1 - (\theta+2\delta)) > 0 \ .$$

Ceci implique que le spectre est singulier.

Pour terminer, énonçons le résultat de GOODSON sur la multiplicité spectrale. La démonstration serait analogue à celle du théorème 1.

<u>Théorème 7</u> (GOODSON [4]). Supposons que l'automorphisme T admette une approximation de vitesse θ/n , par une suite (ξ_n) de partitions formant une approximation de ζ_φ de vitesse δ/n. Si $\theta + 2\delta < \frac{2m}{m+1}$, où m est un entier, la multiplicité spectrale de $V_{T,\varphi}$ est au plus m.

REFERENCES

[1] J.R. BAXTER : <u>A class of ergodic transformations having simple spectrum</u>, Proc A.M.S. 27 (1971) p.275-279

[2] R.V. CHACON : <u>Contribution to ergodic theory and probability</u>, Lectures Notes n° 160 (1970) p.18-27

[3] G.R. GOODSON : <u>Induced automorphism and simple approximation</u>, Proc. A.M.S. 54 (1976) p.141-145

[4] G.R. GOODSON : Approximation and the spectral multiplicity of finite skew products, J. London Math.Soc. (2) 14 (1976) p.249-259

[5] G.R. GOODSON ; P.N. WHITMAN : Approximation and the spectral multiplicity of special automorphisms, preprint

[6] P.R. HALMOS : Introduction to Hilbert spaces and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, N.Y. (1951)

[7] A.B. KATOK ; A.M. STEPIN : Approximation in ergodic theory, Russian Math. Surveys 22 (1967) p.77-102

[8] A.V. KOCHERGIN : On the absence of Mixing in special flows... Dokl. AK. N. SSSR. 205(1972) p.515-518

[9] G.W. RILEY : On spectral properties of skew products over irrational rotations , J. London Math. Soc. (2) 17 (1978) p.152-161

[10] A.M. STEPIN : On the connexionbetween approximation and spectral properties of automorphisms, Mat.Zamet. 13 (1973) p.403-409