PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MICHÈLE BASSEVILLE

Déviations par rapport au maximum : formules d'arrêt et martingales associées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A2_0>

DEVIATIONS PAR RAPPORT AU MAXIMUM :

FORMULES D'ARRET ET MARTINGALES ASSOCIEES

(Michèle BASSEVILLE)

I. INTRODUCTION

Soit $(X_t)_{t \geqslant 0}$ un processus stochastique à valeurs entières ou réelles, à temps discret ou continu . On pose $M_t = \max_{0 \leqslant u \leqslant t} X_u$, et on étudie le temps d'arrêt :

$$T = T_h = \inf \left\{ t \geqslant 0 \;\middle|\; M_t - X_t \geqslant h \right\} \qquad \text{où} \quad h > 0 .$$

On se propose de présenter différentes méthodes d'obtention de la transformée de Laplace de la loi jointe de T et X_T , ainsi que de la fonction de répartition de M_T , dans les cas suivants:

1°) a $(X_t)_{t \in N}$ est une chaîne de Markov partant de l'origine et de probabilités de transition stationnaires:

$$\begin{cases} P(X_{t+1} = i+1 \mid X_t = i) = p_i \\ P(X_{t+1} = i \mid X_t = i) = r_i \\ P(X_{t+1} = i-1 \mid X_t = i) = q_i \; , \end{cases}$$

où $p_i+q_i+r_i = 1$;

b $(X_t)_{t \in R^+}$ est la chaîne de Markov minimale, à valeurs dans Z, issue de l'origine, de paramètres infinitésimaux μ_i et ν_i :

$$P(X_{t+\Delta t} = i+1 \mid X_t = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(X_{t+\Delta t} = i-1 \mid X_t = i) = \nu_i \Delta t + o(\Delta t)$$

2°) $(X_t)_{t \in R^+}$ est un processus de diffusion issu de l'origine, régi par l'équation différentielle stochastique homogène dans le temps:

$$dX_t = \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t \; ,$$

où W_t est le mouvement brownien standard, et μ et σ sont deux fonctions réelles mesurables sur R satisfaisant aux conditions d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques.

Macken et Taylor [4] étudient le cas 1°), et Lehoczky [3] se place dans la situation 2°), déjà étudiée par Taylor [5] dans le cas particulier où les fonctions μ et σ sont constantes (mouvement brownien avec dérive). Les martingales associées aux processus considérés par Kennedy [2] permettent d'obtenir des démonstrations différentes pour les marches aléatoires, les processus de sauts et le mouvement brownien avec dérive . On introduit par une autre méthode des martingales associées au brownien avec dérive, et on étudie de même la possibilité d'obtenir $E(e^{\alpha M_T - \beta T})$ par un théorème d'arrêt de martingale dans le cas où $(X_t)_{t\in R^+}$ est un processus de diffusion sur R.

On donne enfin quelques exemples d'application des résultats obtenus.

II. CAS DES PROCESSUS SUR Z

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une marche aléatoire sur Z, issue de l'origine, de probabilités de transition :

$P(X_{n+1} = X_n+1) = p$, $P(X_{n+1} = X_n) = r$, $P(X_{n+1} = X_n-1) = q$

$(p+q+r =1)$

Pour tout $i \in Z$, on pose $\tau_i = \inf\{n \geqslant 0 \quad X_n = i\}$.

Soit h un entier strictement positif. Le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geqslant 0 \mid M_n - X_n \geqslant h\}$$

possède les propriétés suivantes:

- (1) $$E (e^{\alpha X_T - \beta T}) = e^{-\alpha h} \frac{\gamma(\beta)}{1 - e^{\alpha}\delta(\beta)}$$

  pour tout $\alpha < \log \dfrac{1}{\delta(\beta)}$ et tout $\beta > 0$, où on a noté:

  $\delta(\beta) = E(e^{-\beta\tau_1} ; \tau_1 < \tau_{-h})$ et $\gamma(\beta) = E(e^{-\beta\tau_{-h}} ; \tau_{-h} < \tau_1)$

- Pour les mêmes valeurs de α et β :

  (2) $$E (e^{\alpha X_T - \beta T}) = \frac{e^{-\alpha h} \ (\lambda_+ - \lambda_-)}{\dfrac{\lambda_+ - e^{\alpha}}{\lambda_-^h} - \dfrac{\lambda_- - e^{\alpha}}{\lambda_+^h}}$$

  où λ_+ et λ_- sont les solutions de l'équation $p\lambda^2+(r-e^{\beta})\lambda + q += 0$ et sont tels que le processus $Z_n = \lambda^{X_n} 1_{\{n<\zeta\}}$ soit une martingale, ζ étant une v.a. réelle indépendante de la marche aléatoire $(X_n)_{n\in N}$ et de loi exponentielle de paramètre β .

• (3) La distribution de M_T est géométrique de paramètre:

$$\delta = \delta(0) = \begin{cases} h\ /\ (1+h) & \text{si } p=q \\ \dfrac{1-(\frac{q}{p})^{-h}}{\frac{q}{p}-(\frac{q}{p})^{-h}} & \text{si } p\neq q \end{cases}$$

Démonstration [4]:

La décomposition du temps d'arrêt T en une somme de temps d'atteinte τ_i , analogue à celle qui intervient dans l'étude du problème de la ruine du joueur, peut être effectuée pour une chaîne de Markov non homogène (cas 1°)), et l'hypothèse d'homogénéité spatiale permet d'obtenir les formules explicites de la proposition.

En effet, pour que $M_T = k \geqslant 0$, il faut et il suffit que la marche aléatoire $(X_n)_{n\in N}$ partant de 0 atteigne 1 avant $-h$; ...puis , partant de $k-1$, atteigne k avant $k-1-h$; et, partant de k atteigne $k-h$ avant $k+1$. D'où :

$$E(e^{\alpha M_T - \beta T}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k}\ E(e^{-\beta T};\ M_T = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ e^{\alpha k} \prod_{i=0}^{k-1} E(e^{-\beta \tau_{i+1}};\ \tau_{i+1} < \tau_{i-h} \,|\, X_o = i\,).E(e^{-\beta \tau_{k-h}};\ \tau_{k-h} < \tau_{k+1} \,|\, X_o = k) \right\}$$

par utilisation de la propriété forte de Markov aux temps d'arrêt τ_k ,τ_{k-1}, ..., τ_1 ; ou encore :

$$(4)\qquad E(e^{\alpha M_T - \beta T}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \delta_i\right) \gamma_k$$

en posant: $\delta_i = \delta_i(\beta) = E(e^{-\beta \tau_{i+1}};\ \tau_{i+1} < \tau_{i-h} \,|\, X_o = i)$

$$\gamma_i = \gamma_i(\beta) = E(e^{-\beta \tau_{i-h}};\ \tau_{i-h} < \tau_{i+1} \,|\, X_o = i)$$

γ_i et δ_i sont calculés par récurrence de manière classique:
l'état i étant fixé, soit $u_i(j) = E(e^{-\beta \tau_{i+1}};\ \tau_{i+1} < \tau_{i-h} \,|\, X_o = j)$;
u_i est déterminé par le système d'équations:

$$(5)\qquad u(j) = e^{-\beta}\ (p_j\ u(j+1) + r_j\ u(j) + q_j\ u(j-1)\ )$$

pour $i-h < j < i+1$

avec les conditions limites:

$$u(i-h) = 0 \quad \text{et} \quad u(i+1) = 1 \ ;$$

et $\delta_i = u_i(i)$.

De même $\gamma_i = v_i(i)$, où v_i est solution du même système d'équations, mais avec les conditions limites: $u(i+1) = 0$ et $u(i-h) = 1$.

On obtient de manière analogue la loi de M_T :

(6) $$P(M_T = h) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \delta_j\right) \gamma_k$$

où

(7) $$\begin{cases} \delta_j = \delta_j(0) \\ \gamma_j = 1 - \delta_j \\ \quad = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{h} \rho_{ji}} \end{cases}$$

avec $\rho_{jo} = 1$ et $\rho_{ji} = \dfrac{p_j \, p_{j-1} \cdots p_{j-i+1}}{q_j \, q_{j-1} \cdots q_{j-i+1}}$ pour $0 < i \leq h$.

Dans le cas homogène, les formules (4) et (6) deviennent:

(8) $$E\left(e^{\alpha M_T - \beta T} \right) = \frac{\gamma(\beta)}{1 - \delta(\beta) e^{\alpha}} \qquad \text{pour } \alpha < \log \frac{1}{\delta(\beta)} \text{ , et}$$

(9) $$P(M_T = k) = \delta^{k-1} (1-\delta) ,$$

d'où (3) et (1) en tenant compte de ce que $X_T = M_T - h$. De (7), on déduit (10) :

(10) $$\delta = \begin{cases} h / (1+h) & \text{si } p=q \\ \dfrac{1 - (\frac{q}{p})^{-h}}{\frac{q}{p} - (\frac{q}{p})^{-h}} & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

Pour obtenir (2), Macken et Taylor utilisent un théorème d'arrêt de martingales pour déterminer γ et δ : il existe en effet deux valeurs réelles de λ telles que le processus $Z_n = \lambda^{X_n} 1_{\{n < \zeta\}}$ soit une martingale, ζ étant indépendant de la marche aléatoire $(X_n)_{n \in N}$ et de loi exponentielle de paramètre β : ce sont les racines de l'équation:

(11) $$\lambda = e^{-\beta} (p \lambda^2 + r \lambda + q).$$

De $P(Z_n > b) \leq P(\lambda^n 1_{\{ n < \zeta \}} > b) \leq e^{-\beta b / \log \lambda}$, on déduit que la martingale $(Z_n)_{n \in N}$ est uniformément intégrable; au temps d'arrêt $T \wedge \tau_1$, on obtient:

$$\begin{aligned} 1 &= E (Z_{T \wedge \tau_1}) \\ &= E (Z_{\tau_1} ; \tau_1 \leq T) + E (Z_T ; T < \tau_1) \\ &= \lambda \, \delta(\beta) + \lambda^{-h} \gamma(\beta), \end{aligned}$$

pour $\lambda = \lambda_+$ et $\lambda = \lambda_-$, d'où

$$(12) \qquad \gamma(\beta) = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ \lambda_-^{-h} - \lambda_- \lambda_+^{-h}} \qquad \text{et} \qquad (13) \qquad \delta(\beta) = \frac{\lambda_-^{-h} - \lambda_+^{-h}}{\lambda_+ \lambda_-^{-h} - \lambda_- \lambda_+^{-h}}$$

■

Proposition 2

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus à accroissements indépendants, issu de 0, à valeurs dans Z, les accroissements étant d'amplitude +1 avec probabilité μ et -1 avec probabilité ν . Le temps d'arrêt $T = T_h$ admet les propriétés (1), (2), (3), où

$$(14) \qquad \delta = \begin{cases} h / (1+h) & \text{si } \nu = \mu \\ \dfrac{(\frac{\nu}{\mu})^h - 1}{(\frac{\nu}{\mu})^{h+1} - 1} & \text{si } \nu \neq \mu \end{cases}$$

$$\gamma = 1 - \delta$$

et où λ_+ et λ_- sont solutions de

$$(15) \qquad \mu \lambda^2 - (\mu+\nu+\beta)\lambda + \nu = 0$$

La démonstration [4] est analogue à la précédente; les probabilités $\delta_i(\beta)$ et $\gamma_i(\beta)$ sont solutions du système d'équations:

$$(16) \qquad u(j) = \frac{\mu_j \; u(j+1) + \nu_j \; u(j-1)}{\mu_j + \nu_j + \beta} \qquad (i-h < j < i+1)$$

avec les conditions $u(i-h) = 0$ et $u(i+1) = 1$ pour δ_i

et $u(i-h) = 1$ et $u(i+1) = 0$ pour γ_i .

Les deux propositions suivantes introduisent les martingales utilisées par Kennedy pour obtenir les résultats précédents.

Proposition 3

Soit $(X_n)_{n \in N}$ une marche aléatoire issue de 0, à valeurs dans Z, dont les accroissements $(\xi_i)_{i \; N}$ sont tels que $P(\xi_i > 1) = 0$; et soit $U_n = M_n - X_n$. On suppose que la loi des accroissements de (X_n) possède une fonction génératrice que l'on note
$$\phi(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k \, P(\xi_1 = k) \, ,$$

et qu'il existe $b_1 \neq b$ tel que $\phi(b_1) = \phi(b)$.

Alors, pour tout $a > 0$, le processus

$$(17) \qquad Z_n = \frac{a^{M_n}}{[\phi(b)]^n} \left[(a - b_1) \, b^{-U_n} - (a - b) \, b_1^{-U_n} \right]$$

est une martingale, relativement à la famille des tribus $(\mathcal{F}_n)_{n \in N}$ engendrée par le processus $(X_n)_{n\in N}$.

Démonstration [2]

$$M_n = \max(M_{n-1}, X_n)$$
$$= \max(U_{n-1}, \xi_n) + X_{n-1}$$
$$\text{et} \quad U_n = \max(U_{n-1}, \xi_n) - \xi_n \quad .$$

Donc:
$$E(a^{M_n} b^{-U_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = a^{X_{n-1}} E\left(\left(\tfrac{a}{b}\right)^{\max(U_{n-1},\xi_n)} b^{\xi_n} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right)$$
$$= a^{M_{n-1}} b^{-U_{n-1}} E(b^{\xi_n} 1_{\{\xi_n \le U_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + a^{X_{n-1}} E(a^{\xi_n} 1_{\{\xi_n > U_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1})$$
$$= \phi(b)\, a^{M_{n-1}} b^{-U_{n-1}} - a^{M_{n-1}} b^{-U_{n-1}} E(b^{\xi_n} 1_{\{\xi_n > U_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1})$$
$$+ a^{X_{n-1}} E(a^{\xi_n} 1_{\{\xi_n > U_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

Comme $P(\xi_1 > 1) = 0$, et que $U_n \geq 0$, en posant $p = P(\xi_1 = 1)$ et en remarquant que $U_{n-1} = 0$ équivaut à $M_{n-1} = X_{n-1}$,on obtient :

$$(18) \qquad E(a^{M_n} b^{-U_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \phi(b)\, a^{M_{n-1}} b^{-U_{n-1}} + p\, a^{X_{n-1}} (a-b)\, 1_{U_{n-1}=0}$$

et on en déduit que $(Z_n)_{n\in N}$ donné par (17) est une martingale.
M_n étant borné par n et $\phi(b)$ étant fini, Z_n est intégrable.

Corollaire

Si on suppose de plus que $(X_n)_{n\in N}$ est une marche aléatoire de paramètres $p = P(\xi_1 = 1)$, $r = P(\xi_1 = 0)$, $q = P(\xi_1 = -1)$ avec $p+q+r=1$, le temps d'arrêt $T = \inf\{ n \geq 0 \mid M_n - X_n \geq h\}$ vérifie, pour tout $a \in [0,1]$ et $b > 0$ tel que $\phi(b) \geq 1$:

$$(19) \qquad E(a^{X_T} \theta^T) = \left(b - \frac{q}{pb}\right) \left[\left(a - \frac{q}{pb}\right) b^{-h} - (a-b) \left(\frac{bp}{q}\right)^h \right]^{-1} a^{-h}$$

où $\theta = \dfrac{1}{\phi(b)}$.

Démonstration [2]

Dans cette situation, $\phi(b_1) = \phi(b)$ s'écrit :

$$\frac{q}{b_1} + r + pb_1 = \frac{q}{b} + r + pb$$

d'où $b_1 = \frac{q}{pb}$, et (17) devient :

$$\text{(17 bis)} \qquad Z_n = \frac{a^{M_n}}{[\phi(b)]^n} \left[(a - \frac{q}{pb}) \, b^{-U_n} - (a - b) \, (\frac{bp}{q})^{U_n} \right]$$

Le temps d'arrêt $T \wedge n$ étant borné :

$$E (Z_o) = E (Z_{T \wedge n}) = E (Z_T \, 1_{\{T \leqslant n\}}) + E (Z_n \, 1_{\{T > n\}}) \; ;$$

sur $T > n$, U_n est majoré par h et, si on choisit $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $b > 0$ tel que $\phi(b) \geqslant 1$, $Z_n \cdot 1_{\{T > n\}}$ est borné. Comme T est fini presque sûrement, on en déduit :

$$E (Z_T) = E (Z_o) = b - \frac{q}{pb}$$

d'où (19), puisque $U_T = M_T - X_T = h$.

Les formules (19) et (2) sont identiques, en raison de (11); le domaine d'application de (2) dépendant de h $(\alpha < \log \frac{1}{\xi(\beta)}$ avec $\xi(\beta)$ donné par (13)), la formule (19) de Kennedy avec $0 \leqslant a \leqslant 1$ n'est pas plus générale que (2).

<u>Proposition 4</u> :

Soit $(X_t)_{t \in R^+}$ un processus à accroissements indépendants, issu de 0, à valeurs dans Z, les accroissements étant d'amplitude +1 avec probabilité μ et -1 avec probabilité ν .

On note $E(b^{X_t}) = e^{-t \, \eta(b)}$ la transformée de Laplace de X_t , et on pose $U_t = M_t - X_t$.

Alors, pour tout $a \neq 0$ et $b \neq 0$, le processus:

$$\text{(20)} \qquad Z_t = a^{-M_t} \left[(a - b_1) \, b^{U_t + 1} - (a - b) \, b_1^{U_t + 1} \right] e^{t \, \eta(b)} \; ,$$

où $b_1 \neq b$ est tel que $\eta(b_1) = \eta(b)$, est une martingale relativement à la famille de tribus engendrée par $(X_t)_{t \in R^+}$.

On peut, comme Kennedy [2] , démontrer directement que

$$E(Z_t \mid \mathcal{F}_s) = Z_s \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant t ,$$

ou bien ,comme on le montrera au paragraphe suivant, utiliser une martingale associée classiquement aux processus à accroissements indépendants homogènes et une formule d'Ito.

Corollaire

Le temps d'arrêt $T = \inf \{ t \geqslant 0 \mid M_t - X_t \geqslant h \}$ est tel que, pour tout $a > 1$ et tout $b > 0$ vérifiant $\gamma(b) < 0$:

$$(21) \qquad E (a^{-X_T} \theta^T) = a^{h+1} \frac{b - b_1}{(a - b_1) b^{h+1} - (a - b) b_1^{h+1}}$$

où $\theta = e^{\gamma(b)}$.

La démonstration est analogue à celle du corollaire de la proposition précédente.

La relation (15) assure la cohérence entre les formules (2) et (21).

Applications

1° Files d'attente M/M/1

Soient $(D_t)_{t \in R^+}$ et $(A_t)_{t \in R^+}$ les processus de comptage associés à deux processus de Poisson indépendants de paramètres μ et ν ; on pose $X_t = D_t - A_t$, et $U_t = M_t - X_t$.

U_t représente la longueur, à l'instant t, d'une file d'attente de type M/M/1 , de taux d'arrivée ν et de taux de service μ . Le temps d'arrêt $T = T_h$ est le premier instant où la file contient h clients.

Les relations (2) et (15) permettent de montrer en particulier que, dans le cas où $\mu > \nu$ et lorsque $h \to +\infty$, $(\frac{\nu}{\mu})^h T_h$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{(\mu - \nu)^2}{\mu}$. cf [4]

2° Files d'attente M/G/1

Par analogie avec la proposition 3, on montre que, si $(X_n)_{n \in N}$ est d'accroissements $(\xi_i)_{i \in N}$ tels que $P(\xi_1 < -1) = 0$, en posant

$$m_n = \min_{0 \leq k \leq n} X_k \qquad \text{et} \qquad u_n = X_n - m_n ,$$

le processus:

(22) $$Y_n = \frac{a^{m_n}}{[\phi(b)]^n} \left[(a - b_1)\, b^{u_n+1} - (a - b)\, b_1^{u_n+1} \right]$$

est une martingale relativement à la famille de tribus engendrée par $(X_n)_{n\in N}$.

Considérons maintenant une file d'attente de type M/G/1 dans laquelle les arrivées constituent un processus de Poisson de paramètre λ et les temps de service sont indépendants et de même loi G sur R^+ ; et soit Q_n la longueur de la file immédiatement après le départ du n^e client.

Si v_n désigne le nombre de clients qui arrivent dans la file pendant le temps de service du n^e client, alors : $Q_n = [Q_{n-1} - 1]^+ + v_n$, et (22) permet d'affirmer que, si l'on pose $\psi(b) = E(b^{v_1 - 1})$, alors le processus:

$$R_n = \frac{1}{[\psi(b)]^n} \left[(1 - b_1)\, b^{Q_n} - (1-b)\, b_1^{Q_n} \right]$$

est une martingale relativement à la famille de tribus engendrée par le processus $(v_n)_{n\in N}$ des arrivées pendant les temps de service successifs.

3° Tests séquentiels

Le temps d'arrêt T est fréquemment utilisé, en contrôle de processus industriels par exemple, pour tester un changement de moyenne pour des observations indépendantes $(\xi_n)_{n\in N}$: on étudie le changement de signe de la dérive de la marche aléatoire (23) $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i - n \frac{\mu_o+\mu_1}{2}$ (où μ_o est la moyenne initiale des observations, μ_1 la nouvelle moyenne, et où on a supposé $\mu_1 < \mu_o$) à l'aide du temps d'arrêt

$$T = T_h = \inf \{ n \geq 0 \mid M_n - S_n \geq h \}.$$

Supposons que les observations soient des variables de Bernoulli de paramètre $p = P(\xi_i = +1)$, et que l'on cherche à détecter un changement de paramètre de $p_o > \frac{1}{2}$ à $p_1 < \frac{1}{2}$. Soit $X_n = \sum_{i=1} \xi_i$.

En l'absence de changement de paramètre , le temps moyen entre alarmes $(M_n - X_n \geq h)$ est:

$$E(T_h) = \frac{1}{2p-1} \left(\frac{S}{1-S} - h \right)$$

où $$\delta = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^{-h}}{\frac{1-p}{p} - (\frac{1-p}{p})^{-h}}$$

(appliquer la formule de Wald à X_T en utilisant le fait que $M_T = X_T + h$ est de loi géomètrique de paramètre δ), et on choisit h de telle sorte que les alarmes soient beaucoup plus rares avant le changement de paramètre $(p = p_o)$ qu'après $(p = p_1)$.

Cette procédure est utilisée en traitement d'images pour détecter des contours définis comme étant des zones de fortes transitions entre des zones plus étendues dont les propriétés statistiques locales varient lentement.

III. CAS DES PROCESSUS SUR R

Proposition 1 :

Soit $(X_t)_{t\in R^+}$ un mouvement brownien sur R issu de 0 avec une dérive quelconque, i.e. $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$, où $(W_t)_{t\in R^+}$ est le brownien standard. On pose $M_t = \max\limits_{0\leq s\leq t} X_s$;

Alors le temps d'arrêt $T = \inf\{ t \geq 0 \mid M_t - X_t \geq h \}$ verifie:

(24) $$E(e^{\alpha X_T - \beta T}) = \frac{\delta e^{-(\alpha+\gamma)h}}{\delta \operatorname{ch}(\delta h) - (\alpha+\gamma) \operatorname{sh}(\delta h)}$$

pour tout $\beta > 0$ (et même $\beta = 0$ si $\mu \neq 0$) et tout $\alpha < \theta$,

où $\theta = \delta \coth(\delta h) - \gamma > 0$, $\gamma = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\delta = \sqrt{(\frac{\mu}{\sigma^2})^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2}}$

Démonstration [5]

Soit $\tau(x) = \inf\{t \geq 0 \mid M_t = x\}$ $(x \geq 0)$

et soit ζ une variable aléatoire indépendante de $(X_t)_{t\in R^+}$ et de loi exponentielle de paramètre β .

Par un calcul assez long , Taylor montre que:

$$E(e^{\alpha M_T - \beta T}) = E(e^{-\beta T}) \left[1 + \alpha \int_0^\infty f(x) e^{\alpha x} dx\right]$$

où $f(x) = P(\tau(x) \leq T , \tau(x) < \zeta)$, en utilisant le caractère markovien de $(M_t, M_t - X_t)$ et la propriété de Markov forte au point

$$(M_{\tau(x)} , M_{\tau(x)} - X_{\tau(x)}) = (x,0) .$$

Puis en utilisant de plus l'homogénéité de $(X_t)_{t \in R^+}$ et la caractère markovien de la distribution de ζ , il obtient $f(x) = e^{-\theta x}$; et il reste alors à déterminer θ et $E(e^{-\beta T})$. Comme en [4] , Taylor introduit pour cela les deux valeurs de λ telles que le processus $Z_t = e^{-\alpha\lambda X_t - \beta t}$ soit une martingale, et applique un théorème d'arrêt de martingale au temps d'arrêt $T \wedge \tau(x)$ ∎

Corollaire

- La distribution de M_T est exponentielle de paramètre:

$$\frac{2\gamma}{e^{2\gamma h} - 1} \quad \text{si } \mu \neq 0 \qquad \text{ou } \frac{1}{h} \quad \text{si } \mu = 0$$

- $$E(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{1}{2\gamma} (e^{2\gamma h} - 1) - h\right] & \text{si } \mu \neq 0 \\ \dfrac{h^2}{\sigma^2} & \text{si } \mu = 0 \end{cases}$$

- Si $\mu > 0$, la distribution asymptotique $(h \to \infty)$ de $e^{-2\gamma h} T_h$ est exponentielle de paramètre $2 \gamma^2 \sigma^2$.
  Si $\mu < 0$, T_h est asymptotiquement gaussien de moyenne $-\frac{h}{\mu}$ et de variance $-\dfrac{h\sigma^2}{\mu^3}$.

Applications

1° Cumulative sum tests

Si la marche aléatoire (23) est approchée par un mouvement brownien dont on cherche à détecter le changement de signe de la dérive, le caractère exponentiel de E(T) comme fonction de μ (25) permet d'assurer un temps moyen entre alarmes grand lorsque $\mu > 0$ (i.e. les observations sont de moyenne μ_0) et faible lorsque $\mu < 0$ (i.e. les observations sont de moyenne μ_1).

2° Gestion de stocks

$W_t = e^{X_t}$ modélise l'évolution du prix d'un stock, et $E(e^{-\beta T} W_T)$ donné par (24) représente le gain moyen obtenu par vente à l'instant $T = T_h$ avec taux d'escompte β , le choix de l'instant de vente T étant une façon de limiter les pertes.

Les deux lemmes suivants seront utilisés pour l'étude des propriétés de T_h dans le cas où μ et σ dépendent du processus $(X_t)_{t\in R^+}$.

Soit donc $(X_t)_{t\in R^+}$ un processus de diffusion sur R issu d'un point x , régi par l'équation différentielle stochastique :

(26) $$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t \quad ,$$

où $(W_t)_{t\in R^+}$ est un brownien standard, et où μ et σ sont deux fonctions réelles mesurables sur R.

Soit $[a,b]$ un intervalle contenant x .

On note $T_{a,b}$ le temps de sortie de cet intervalle, i.e.

$$T_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t = a \text{ ou } b\} \quad .$$

<u>Lemme 1</u>

Sous ces hypothèses :

$$P(X(T_{a,b}) = a \mid X_0 = x) = q(a,b,x) = \frac{\int_x^b \phi(z)\,dz}{\int_a^b \phi(z)\,dz}$$

$$P(X(T_{a,b}) = b \mid X_0 = x) = p(a,b,x) = \frac{\int_a^x \phi(z)\,dz}{\int_a^b \phi(z)\,dz}$$

où (27) $\phi(z) = e^{-\int_a^z 2\gamma(y)\,dy}$ et $\gamma(y) = \dfrac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}$

<u>Démonstration</u>

La fonction $u(x) = \int_a^x \phi(z)\,dz$ est solution de l'équation différentielle ordinaire : $\frac{1}{2}\sigma^2(x)\,u''(x) + \mu(x)\,u'(x) = 0$; de même pour la fonction $\psi(x) = \dfrac{u(x) - u(b)}{u(a) - u(b)}$, avec les conditions limites $\psi(0) = 1$ et $\psi(b) = 0$.

La formule d'Ito s'écrit dans ce cas:

$$d\psi(X_t) = \psi'(X_t)\,\sigma(X_t)\,dW_t \quad ;$$

$\psi(X_t)$ étant uniformément borné sur $[0,T_{a,b}]$, on obtient,en intégrant sur cet intervalle: $E(\psi(X_{T_{a,b}})) = \psi(x)$, c'est-à-dire :

$\psi(a)\,q(a,b,x) + \psi(b)\,p(a,b,x) = \psi(x)$ ou encore $q(a,b,x) = \psi(x)$ ■

Lemme 2

Sous les mêmes hypothèses:

$$E^x\left(e^{-\beta T_{a,b}} \;\middle|\; X(T_{a,b}) = b \right) = \frac{u(a,b,x)}{p(a,b,x)}$$

$$E^x\left(e^{-\beta T_{a,b}} \;\middle|\; X(T_{a,b}) = a \right) = \frac{v(a,b,x)}{p(a,b,x)}$$

où $u(a,b,x) = \dfrac{g(a)\ f(x) - g(x)\ f(a)}{g(a)\ f(b) - g(b)\ f(a)}$; $v(a,b,x) = \dfrac{g(x)f(b)-g(b)f(x)}{g(a)f(b)-g(b)f(a)}$

et où f et g sont solutions indépendantes de l'équation différentielle ordinaire:

$$(28) \qquad \frac{1}{2}\,\sigma^2(x)\ f''(x) + \mu(x)\ f'(x) = \beta f(x).$$

Démonstration

Soit $(X_t)_{t\in R^+}$ défini par (26) :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(X_s)\ dW_s ,$$

et soit f une solution de (28) . La formule d'Ito montre que $Y_t = e^{-\beta t}\ f(X_t)$ satisfait à l'équation :

$$dY_t = e^{-\beta t}\ f'(X_t)\ \sigma(X_t)\ dW_t$$

avec $Y_0 = f(x)$, et donc :

$$Y_t - f(x) = \int_0^t e^{-\beta s}\ f'(X_s)\ \sigma(X_s)\ dW_s$$

Considérant les espérances des deux membres pour $t=T_{a,b}$ on obtient :

$$f(x) = E(\ Y(T_{a,b})) = E\ (\ e^{-\beta T_{a,b}}\ )\ f(\ X(T_{a,b})\ ) ,$$

puisque le processus Y_t est borné sur $[0,\ T_{a,b}]$, d'où le lemme en utilisant deux solutions indépendantes de (28). ∎

Proposition 2

Soit $(X_t)_{t\in R^+}$ un processus de diffusion sur R issu de l'origine, satisfaisant aux hypothèses précédentes (26) et (27).

Les propriétés du temps d'arrêt $T = T_h = \inf\{t\geq 0 \mid M_t - X_t \geq h\}$ sont les suivantes:

★ M_T admet la distribution:

$$(28)\qquad P(M_T \geq x) = \exp\left[-\int_0^x \phi(z)\left[\int_{z-h}^{z}\phi(u)\,du\right]^{-1} dz\right]$$

où $\phi(x) = e^{-\int_0^x 2\gamma(z)\,dz}$ et $\gamma(z) = \dfrac{\mu(z)}{\sigma^2(z)}$

La loi de (X_T, T) a comme transformée de Laplace :

$$(29)\qquad E(e^{\alpha X_T - \beta T}) = e^{-\alpha h}\int_0^\infty \exp\left[\alpha x - \int_0^x b(z)\,dz\right].\ c(x)\,dx$$

où

$$(30)\qquad b(z) = \frac{g(z-h)\ f'(z) - f(z-h)\ g'(z)}{g(z-h)\ f(z) - f(z-h)\ g(z)},$$

$$(31)\qquad c(x) = \frac{g(x)\ f'(x) - g'(x)\ f(x)}{g(x-h)\ f(x) - f(x-h)\ g(x)},$$

et où f et g sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle ordinaire:

$$(32)\qquad \frac{1}{2}\sigma^2(x)\ f''(x) + \mu(x)\ f'(x) = \beta f(x)$$

Démonstration [3]

. Pour calculer $P(M_T \geq x)$, Lehoczky utilise une approximation discrète convenable de $\{M_T \geq x\}$, des résultats classiques concernant les temps de sortie d'un intervalle pour un processus de diffusion, et la décomposition de T en une somme de tels temps de sortie, tout comme Macken et Taylor [4] dans le cas discret (voir la proposition 1 du paragraphe II) .

Soient $s_{n,o} = 0 < s_{n,1} < \dots < s_{n,n} = x$ des points de $[0,x]$ tels que les intervalles $[s_{n,i}, s_{n,i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$ forment une partition de $[0,x[$ et que $m_n = \max_{0 \leq i \leq n-1}(s_{n,i+1} - s_{n,i})$ tende vers 0 quand $n \to \infty$. On pose:

$$P_n = \prod_{i=o}^{n-1} P(X_t \text{ atteint } s_{n,i+1} \text{ avant } s_{n,i} - h \mid X_o = s_{n,i})$$

$$= \prod_{i=o}^{n-1} \frac{\int_{s_{n,i}-h}^{s_{n,i}} \phi(z)\,dz}{\int_{s_{n,i}-h}^{s_{n,i+1}} \phi(z)\,dz}$$

où $\phi(z) = \exp\left[-\int_0^z 2\dfrac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\,dx\right]$ (lemme 1)

Un développement de Taylor au premier ordre de $\log(1 - (1-p_n))$ montre que $P = \lim P_n$ existe, et ne dépend pas de la partition $(s_{n,i})$ choisie, et est donné par le second membre de (28) .

L'homogénéité temporelle du processus $(X_t)_{t\in R^+}$ et la propriété forte de Markov appliquée aux temps d'atteinte des points $s_{n,i}$ permettent alors d'affirmer que $P = P(M_T \geq x)$, puisque, si $M_T \geq x$ et $M_t = y < x$ pour un $t < T$, nécessairement le processus X atteint y+dy avant y-h.

. La même technique d'approximation permet d'obtenir $E(e^{-\beta T} \mid M_T = x)$, d'où on déduit (29) en utilisant la loi de M_T donnée par (28) et le fait que $M_T - X_T = h$.

En effet, ajoutons un point supplémentaire $s_{n,n+1} > x$ à la partition précédente et posons:

$$E_n = \prod_{i=1}^{n} E^{s_{n,i-1}}\left(e^{-\beta T_{s_{n,i-1}-h,\, s_{n,i}}} \,\middle|\, \text{sortie par } s_{n,i} \right)$$

$$E^x\left(e^{-\beta T_{x-h,\, s_{n,n+1}}} \,\middle|\, \text{sortie par } x-h \right)$$

où $T_{a,b}$ désigne le temps de sortie de $[a,b]$.

En utilisant le lemme 2, on montre que $E = \lim E_n$ existe et ne dépend pas de la partition choisie; et, par les mêmes arguments que précédemment:

$$E = E\left(e^{-\beta T} \mid M_T = x \right). \qquad ∎$$

<u>Corollaire</u>

Pour que M_T soit exponentiel, il suffit que $\gamma(x) = \dfrac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}$ soit constant.

Ce résultat est donc plus général que celui de Taylor (proposition 1 et corollaire). Par contre, si $T = T_h = \inf\{ t \geq 0 \mid M_t - X_t \geq h(M_t) \}$, où h est une fonction positive continue, M_T n'est plus exponentiel, même si $(X_t)_{t\in R^+}$ est un brownien.

Dans la suite de ce paragraphe, on étudie la détermination de $E(e^{\alpha M_T - \beta T})$ à l'aide de martingales associées aux processus $(X_t)_{t\in R^+}$ considérés.

<u>Proposition 3</u>

Soit $(X_t)_{t\in R^+}$ un brownien sur R issu de 0 avec une dérive :

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \qquad (W_t \text{ brownien standard})$$

Soit $U_t = M_t - X_t$.

Pour tous réels a et b, le processus :

$$(33) \qquad Z_t = \left[b\ ch(bU_t) - (a+\frac{\mu}{\sigma^2})\ sh(bU_t) \right] \exp\left\{ aM_t + \frac{\mu}{\sigma^2} U_t - \frac{\sigma^2}{2}\ t\ (b^2 - \frac{\mu^2}{\sigma^4}) \right\}$$

est une martingale relativement à la famille de tribus engendrée par $(X_t)_{t\in R^+}$

Démonstration [2]

Kennedy considère une suite de marches aléatoires de paramètres $p_n = \frac{1}{2}(1+\frac{\beta}{\sqrt{n}})$ et $q_n = \frac{1}{2}\ (1-\frac{\beta}{\sqrt{n}})$; $\frac{M_{[nt]}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{U_{[nt]}}{\sqrt{n}}$ convergent vers M_t et U_t , et, en remplaçant a et b dans (17 bis) par $e^{a/\sqrt{n}}$ et $e^{(b-\frac{\mu}{\sigma^2})/\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}\ Z_{[nt]}$ converge faiblement vers $2\ Z_t$.

Les martingales $\sqrt{n}\ Z_{[nt]}$ étant uniformément bornées sur $[0,T]$, la limite faible Z_t est aussi une martingale. ∎

Corollaire

On retrouve la formule (24) en arrêtant une martingale $(Z_t)_{t\in R^+}$ $(a<0)$ au temps d'arrêt T.

Proposition 4

Soit $(X_t)_{t\in R^+}$ un brownien sur R, issu de 0, avec dérive μ et coefficient de diffusion σ^2.

On note $E(e^{-bX_t}) = e^{t\,\psi(b)}$ la transformée de Laplace de X_t .

Soit $b_1 \neq b$ tel que $\psi(b_1) = \psi(b)$, et posons: $U_t = M_t - X_t$.

Alors, pour tout réel a, le processus :

$$(34) \qquad Y_t = \frac{e^{-aM_t}}{e^{t\psi(b)}} \left[(a-b_1)\ e^{bU_t} - (a-b)\ e^{b_1U_t} \right]$$

est une martingale relativement à la famille de tribus engendrée par $(X_t)_{t\in R^+}$

Démonstration

$x_t(b) = \frac{e^{-bX_t}}{E(e^{-bX_t})}$ étant une martingale et $e^{-(a-b)M_t}$ un processus à variations bornées, la formule d'intégration par parties permet d'écrire:

$$Z_t(a,b) = \frac{e^{-bX_t - (a-b)M_t}}{E(e^{-bX_t})} = \int_0^t e^{-(a-b)M_s}\, dx_s(b) - (a-b)\int_0^t x_s(b) e^{-(a-b)M_s}\, dM_s$$

Soit $b_1 \neq b$ tel que $\psi(b_1) = \psi(b)$. On pose $Y_t = (a-b_1)Z_t(a,b)-(a-b)Z_t(a,b_1)$.

Alors:
$$Y_t = \int_0^t \left[(a-b_1)\, e^{-(a-b)M_s} - (a-b)\, e^{-(a-b_1)M_s}\right] dx_s(b)$$
$$- (a-b)(a-b_1) \int_0^t e^{-aM_s}\, \frac{e^{-b(X_s-M_s)} - e^{-b_1(X_s-M_s)}}{e^{s\psi(b)}}\, dM_s$$

La mesure dM_s étant portée par $\{M_s = X_s\}$, le second terme est nul, et Y_t est une martingale.

Comme $\psi(b) = -\mu b + \frac{\sigma^2}{2} b^2$, (33) et (34) sont identiques, et on retrouve (24) pour le temps d'arrêt T . ■

Enfin soit $(X_t)_{t\in R^+}$ un processus de diffusion sur R issu de l'origine satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2 :

$$dX_t = \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t.$$

Il n'existe pas de martingale associée à $(X_t)_{t\in R^+}$ qui permette d'obtenir $E(e^{\alpha M_T - \beta T})$ par un théorème d'arrêt de martingale, sauf si μ et σ sont constants.

Supposons en effet qu'il existe des constantes a, a', α, α', β, β', et γ telles que le processus:

$$Z_t = a\, e^{\alpha M_t + \beta X_t + \gamma t} + a'\, e^{\alpha' M_t + \beta' X_t + \gamma t} = f(M_t, X_t, t)$$

soit une martingale, et appliquons la formule d'Ito:

$$\int_0^t f'_m(M_s,X_s,s)\, dM_s + \int_0^t f'_x(M_s,X_s,s)\, \sigma(X_s)\, dW_s +$$
$$\int_0^t \left[f'_x(M_s,X_s,s)\, \mu(X_s) + \frac{1}{2} f''_{x^2}(M_s,X_s,s)\, \sigma^2(X_s) + f'_t(M_s,X_s,s)\right] ds$$

doit être une martingale; donc nécessairement :

$f'_m(M_s,X_s,s) = 0$ puisque dM_s est portée par $\{s \mid M_s = X_s\}$;

et, d'autre part, comme f est exponentielle,

$$\mu(x)\, f'_x(m,x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\, f''_{x^2}(m,x,t) + f'_t(m,x,t) = 0$$

sur le support F du processus markovien $(M_t,X_t)_{t\in R^+}$, c'est-à-dire le plus petit fermé dont le complémentaire est de potentiel nul.

(On renvoie à [1] pour des conditions suffisantes sur f pour que $f(M_t, X_t, t)$ soit une martingale)? .

On en déduit:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \\ a\alpha + a'\alpha' = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu(x)\beta + \gamma + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\beta^2 = 0 \\ \mu(x)\beta + \gamma + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\beta'^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{sur } F \ ;$$

dans le cas général où σ est non nul, F est assez riche pour que la détermination des constantes β, β', γ satisfaisant à ces dernières conditions ne soit possible que si μ et σ sont des fonctions constantes.

BIBLIOGRAPHIE

1 J. AZEMA, M. YOR (1978) : "Une solution simple au problème de Skorokhod" Séminaire de Proba XIII . Université de Strasbourg

2 D.P. KENNEDY (1976) : "Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues" Stoch. Proc. and Appl. 4 , p.261-9

3 J.P. LEHOCZKY (1977) : "Formulas for stopped diffusion processes with stopping times based on the maximum" Ann. of Prob. 5 ,n°4, p.601-7

4 C.A. MACKEN, H.M. TAYLOR (1977) : "On deviations from the maximum in a stochastic process" Siam j. of Appl. Math. 32, n°1, p.96-104

5 H.M. TAYLOR (1975) : "A stopped brownian motion formula" Ann. of Prob. 3, n°2, p.234-46