

ALBERT RAUGI

Périodes des fonctions harmoniques bornées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__1_A10_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PERIODES DES FONCTIONS HARMONIQUES BORNEES

(Albert RAUGI)

1. PRELIMINAIRES

(1.1) Soient G un semi-groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Pour toute fonction borélienne f sur G , nous posons

$$R_{\mu} f(g) = \int_G f(gx) \mu(dx) \quad (g \in G)$$

lorsque cette expression a un sens. Nous appelons fonction μ -harmonique bornée, toute fonction borélienne bornée f telle que $f = R_{\mu} f$.

Nous notons $H(\mu)$ l'espace de Banach des fonctions μ -harmoniques bornées, muni de la norme de la convergence uniforme. Nous désignons par $H_c(\mu)$ le sous-espace de $H(\mu)$ formé des éléments continus de $H(\mu)$. Nous appelons $HG(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$; $HGD(\mu)$] le sous-espace de $H(\mu)$ formé par les éléments de $H(\mu)$ uniformément continus à gauche (u.c.g.) [resp. uniformément continus à droite (u.c.d.) ; u.c.g. et u.c.d.] .

(1.2) Si f est un élément de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$], pour toute mesure de probabilité α sur G , la fonction borélienne $L_{\alpha}f$, définie par

$$L_{\alpha}f(g) = \int_G f(xg) \alpha(dx) \quad , \quad (g \in G)$$

est un élément de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$] .

Supposons que G soit un groupe L.C.D. Alors pour tout élément f de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$] et toute mesure de probabilité α sur G absolument continue par rapport à une mesure de Haar de G , $L_\alpha f$ est un élément de $HG(\mu)$ [resp. $HGD(\mu)$]. On en déduit que :

(1.3) Lemme.

Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Désignons par m une mesure de Haar de G . Pour tout élément f de $H(\mu)$ [resp. $H_c(\mu)$, $HD(\mu)$], il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $HG(\mu)$ [resp. $HG(\mu)$; $HGD(\mu)$] qui converge m -p.s. (resp. qui converge ponctuellement) vers f .

(1.4) Définition

Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Nous désignons par m une mesure de Haar de G . Nous appelons fonction μ -harmonique bornée au sens faible sur G , toute fonction borélienne bornée telle que

$$R_\mu f = f \quad m\text{-p.s.}$$

Nous désignons par $\mathcal{H}(\mu)$ l'espace de Banach de ces fonctions (muni de la norme de $L^\infty(m)$).

Du lemme (1.3) il résulte que :

(1.5) Corollaire

$$\begin{aligned} H_c(\mu) = \{\text{constantes}\} &\iff \mathcal{H}(\mu) = \{\text{constantes } m\text{-p.s.}\} \\ &\iff HG(\mu) = \{\text{constantes}\} \end{aligned}$$

(1.6) Soit $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_x)_{x \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G . Pour tout élément f de $H(\mu)$, nous savons que : $f(X_n)$ est une martingale bornée pour toute probabilité

\mathbb{P}_x , $x \in G$; $\lim_n f(X_n)$ existe donc \mathbb{P}_x -p.s. $\forall x \in G$ et nous avons, pour tout élément g de G ,

$$f(g) = \mathbb{E}_g \left[\lim_n f(X_n) \right] = \mathbb{E}_e \left[\lim_n f(gX_n) \right], \text{ si } G \text{ possède un élément unité } e.$$

(1.7) Lemme

Soit $f \in H(\mu)$; posons

$$h(g, \xi) = [f(g\xi) - f(g)]^2, \quad (g, \xi) \in G \times G.$$

Alors, pour tout entier $r \geq 1$

$$\sup_{x \in G} \left(\sum_{n \geq 1} \int_G \mathbb{E}_x [h(X_n, \xi)] \mu^r(d\xi) \right) < +\infty$$

Preuve. Nous avons

$$\int_G \mathbb{E}_x [h(X_n, \xi)] \mu^r(d\xi) = R_\mu^{n+r} f^2(x) - R_\mu^n f^2(x)$$

D'où pour tout $N \geq r$,

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{k=1}^N \int_G \mathbb{E}_x [h(X_k, \xi)] \mu^r(d\xi) \\ &= \sum_{k=1}^r [R_\mu^{N+k} f^2(x) - R_\mu^k f^2(x)] \\ &\leq 2r \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

La suite $\{S_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ est donc convergente et nous avons

$$\sup_{x \in G} \left[\lim_N S_N(x) \right] \leq 2r \|f\|_\infty^2.$$

(1.8) Corollaire.

Soit $f \in H(\mu)$. Posons :

$$B(f) = \{(\omega, \xi) \in \Omega \times G : \text{les limites } \lim_n f(X_n(\omega)\xi) \text{ et } \lim_n f(X_n(\omega)) \text{ existent et sont égales}\}.$$

Alors pour tout entier $r \geq 1$ et tout $x \in G$, $B(f)$ est un borélien de $\Omega \times G$ de $\mathbb{P}_x \otimes \mu^r$ -mesure 1.

(1.9) Corollaire

Si $f \in HD(\mu)$,

$$B(f) \supseteq \Omega' \times T_\mu,$$

où Ω' est un borélien de Ω de \mathbb{P}_x -mesure 1 $\forall x \in G$ et T_μ est le semi-groupe fermé de G engendré par le support de μ .

Preuve. Il suffit de remarquer que si $f \in HD(\mu)$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\xi \in G : (\omega, \xi) \in B(f)\}$ est fermé dans G .

(1.10) Corollaire.

Si $f \in HG(\mu)$, $\tilde{B}(f) = \bigcap_{g \in G} B(f^g)$ est un borélien de $\Omega \times G$ de $\mathbb{P}_x \otimes \mu^r$ -mesure 1, $\forall r \geq 1$, $\forall x \in G$. Pour tout élément (ω, ξ) de $\tilde{B}(f)$, nous avons

$$\limsup_n \sup_{g \in K} |f(gX_n(\omega)\xi) - f(gX_n(\omega))| = 0,$$

pour tout compact K de G .

Preuve. Il suffit de noter que si $f \in HG(\mu)$, alors

$$\tilde{B}(f) = \bigcap_{g \in G} B(f^g) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B(f^{g_i}),$$

pour toute suite $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dense dans G .

(1.11) Corollaire.

Si $f \in HGD(\mu)$, $\tilde{B}(f) \supseteq \Omega' \times T_\mu$, où Ω' est un borélien de Ω de \mathbb{P}_x -mesure 1, $\forall x \in G$.

2.- CAS D'UN SEMIGROUPE ABELIEN(2.1) Proposition.

Soient S un semi-groupe abélien L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur S . Soit f une fonction borélienne bornée sur S . Alors nous avons

$$i) f \in H(\mu) \iff ii) \forall s \in S, \forall r \in \mathbb{N}^*, \mu^r(\{L_s f = f(s)\}) = 1$$

(avec $L_s f = L_{\varepsilon_s} f!$)

Preuve. Il est clair que $ii) \implies i)$. Montrons donc que $i) \implies ii)$.

Soient $f \in H(\mu)$ et $s \in S$. Considérons le borélien $B(f)$ de $\Omega \times G$ du corollaire (1.8) et posons

$$U_s = \{\xi \in G : \mathbb{P}_s[\{\omega \in \Omega : (\omega, \xi) \in B(f)\}] = 1\}.$$

D'après ce corollaire U_s est un borélien de G de μ^r -mesure 1, pour tout entier $r \geq 1$. Pour tout $\xi \in U_s$, nous avons

$$\begin{aligned} f(s\xi) &= \mathbb{E}_{S\xi} [\lim_n f(X_n)] = \mathbb{E}_S [\lim_n f(\xi X_n)] \\ &= \mathbb{E}_S [\lim_n f(X_n \xi)] = \mathbb{E}_S [\lim_n f(X_n)] = f(s) \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

(2.2) Corollaire.

Soient G un semi-groupe [resp. un groupe] abélien L.C.D. et ν une mesure de probabilité sur G adaptée à G (i.e. le plus petit sous-semigroupe [resp. sous-groupe] de G engendré par le support de ν est égal à G). Soit f une fonction continue bornée sur S . Alors f appartient à $H_c(\nu)$ si et seulement si f est constante sur les sous-semigroupes $s S$, $s \in S$, de S [resp. f est constante].

(2.3) Remarque : Soient G un groupe abélien L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Soit $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G .

Considérons l'application :

$$\theta : \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(\omega_0, \omega_1, \dots) \mapsto (\omega_1, \omega_2, \dots)$$

Pour tout borélien A de Ω , θ^{-1} -invariant (i.e. $\theta^{-1}(A) = A$), nous savons que la fonction $f(x) = \mathbb{P}_x[A]$ est un élément de $H(\nu)$. De la proposition (2.1), il résulte que $\mathbb{P}_x[A] = 1_C(x)$, où C est un borélien de G tel que $m(C)$ ou $m(C^c)$ soit nul.

3. - PERIODES DES FONCTIONS μ -HARMONIQUES BORNEES UNIFORMEMENT
CONTINUES A DROITE

(3.1) Théorème : Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G ; notons T_μ le semi-groupe fermé de G engendré par le support de μ . Soit H un sous-groupe fermé de G ; nous désignons par p la projection naturelle de G sur $H \backslash G$. Soient x et g deux éléments de G tels que pour \mathbb{P}_x -presque tout ω de Ω , il existe une suite $\{h_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ d'éléments de H telle que la suite

$\{X_n^{-1}(\omega) h_n(\omega) g X_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ possède une valeur d'adhérence dans T_μ^{-1} .

Alors

$$(*) \quad \bar{f} \circ p(gx) = \bar{f} \circ p(x) ,$$

pour toute fonction \bar{f} sur $H \backslash G$ telle que $\bar{f} \circ p$ soit μ -harmonique bornée et uniformément continue à droite.

Preuve. Soient \bar{f} une fonction sur $H \backslash G$ telle que $f = \bar{f} \circ p \in \text{HD}(\mu)$; et x, g deux éléments de G vérifiant la propriété énoncée dans le théorème.

Posons

$B(f) = \{(\omega, \xi) \in \Omega \times G : \lim_n f(x_n(\omega)\xi) \text{ et } \lim_n f(x_n(\omega)) \text{ existent et sont égales}\}.$

D'après le corollaire (1.9), il existe un borélien Ω_1 de Ω de \mathbb{P}_y -mesure 1, $\forall y \in G$, tel que $\Omega_1 \times T_\mu$ soit contenu dans $B(f) \cap B(L_g(f))$.

Considérons le sous-ensemble de Ω défini par $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega_1 : \text{la suite } \{X_n^{-1}(\omega) h_n(\omega) g X_n(\omega)\}_{n \geq 1} \text{ possède une valeur d'adhérence dans } T_\mu T_\mu^{-1}\}$.

Ω_2 est de \mathbb{P}_X -mesure 1. Soit $\omega \in \Omega_2$; désignons par $J(\omega)$ une suite d'entiers telle que

$$\lim_{n \in J(\omega)} X_n^{-1}(\omega) h_n(\omega) g X_n(\omega) = s t^{-1} \text{ avec } s, t \in T_\mu$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_n f(g X_n(\omega)) &= \lim_n f(g X_n(\omega) t) \quad [\text{car } \Omega_1 \times T_\mu \subset B(L_f)] \\ &= \lim_n f(X_n(\omega) [X_n^{-1}(\omega) h_n(\omega) g X_n(\omega)] t) \\ &\quad [\text{car } f = \bar{f} \circ p] \\ &= \lim_{n \in J(\omega)} f(X_n(\omega) s) \quad [\text{car } f \text{ est u.c.d.}] \\ &= \lim_n f(X_n(\omega)) \quad [\text{car } \Omega_1 \times T_\mu \subset B(f)]. \end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons :

$$\lim_n f(g X_n) = \lim_n f(X_n) \quad \mathbb{P}_X \text{-p.s.};$$

et par suite

$$f(gx) = \mathbb{E}_X \left[\lim_n f(g X_n) \right] = \mathbb{E}_X \left[\lim_n f(X_n) \right] = f(x)$$

Q.E.D.

(3.2) Remarque : Si μ est étalée, toute fonction μ -harmonique bornée est u.c.d.. Le théorème (2.1) contient donc le théorème IV.1 de [1]

(3.3) Corollaire Soient N un groupe nilpotent L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur N , adaptée à N . Alors $HD(\mu)$ est réduit aux constantes.

Preuve : Si N est abélien, le résultat énoncé est vrai. Supposons qu'il le soit pour les groupes nilpotents de longueur inférieure ou égale à $(r-1)$.

Soit N un groupe nilpotent de longueur r ; nous désignons par $\mathcal{D}_1(N), \mathcal{D}_2(N) = [N, \mathcal{D}_1(N)]$, ..., $\mathcal{D}_r(N) = [N, \mathcal{D}_{r-1}(N)]$, $\mathcal{D}_{r+1}(N) = \mathcal{D}_{rn}(N) = \{e\}$, la série centrale descendante de N

Soit f une fonction μ -harmonique bornée u.c.d. sur N . Posons

$$N(f) = \{h \in N : f(xhy) = f(xy), \forall x, y \in N\};$$

$N(f)$ est un sous-groupe fermé distingué de G .

N étant un groupe nilpotent, nous savons ([1] lemme IV.11) que $H = T_\mu T_\mu^{-1}$ est un sous-groupe de N . D'après le théorème (3.1), nous avons alors

$$\mathcal{D}_r(H) \subset \mathcal{D}_r(N) \cap H \subset N(f);$$

et par suite

$$\mathcal{D}_r(N) = \overline{\mathcal{D}_r(H)} \subset N(f).$$

On en déduit que f s'écrit $\bar{f} \circ p$, où p désigne l'application naturelle de N sur $N/\mathcal{D}_r(N)$ et \bar{f} est une fonction $p(\mu)$ -harmonique u.c.d. sur $N/\mathcal{D}_r(N)$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

De même nous avons :

(3.3) Corollaire : Soit G un groupe L.C.D. qui est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble connexe. Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que $T_\mu T_\mu^{-1} = G$. Désignons par $G = G_-^\mu G_+^\mu$ une décomposition de G en produit amalgamé de deux sous-groupes, associée à μ (voir [3]). Notons ζ l'application naturelle de G sur $G_-^\mu \backslash G$. Alors les fonctions \bar{f} sur $G_-^\mu \backslash G$ telle que $\bar{f} \circ \zeta$ appartienne à $HD(\mu)$ sont constantes.

4. PERIODES CENTRALES DES FONCTIONS μ -HARMONIQUES
BORNEES

(4.1) Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Nous désignons par $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G .

Si f est un élément de $HG(\mu)$, nous posons :

$$U(f) = \{x \in G : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [f(X_n)] = f(x), \quad \forall x \in G\}$$

D'après le corollaire (1.10), $U(f)$ est un borélien de G de μ^r -mesure 1, $\forall r \geq 1$.

(4.2) Définition Soit A un sous-groupe fermé distingué de G . Nous disons que G opère de façon compacte sur A , si tout compact de A est contenu dans un compact de A invariant par les automorphismes intérieurs de G et si, de plus, l'unité de A possède une base de voisinages dans A , invariants par les automorphismes intérieurs de G .

(4.3) Théorème : Soient $(G, \mu, f, U(f))$ comme en (4.1). Nous supposons que μ est adaptée à G . Soit A un sous-groupe fermé distingué de G sur lequel G agit de façon compacte. Nous désignons par $A(f)$ le sous-groupe fermé de A engendré par $A \cap U(f)U(f)^{-1}$.

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} A(f) &= \{a \in A : f(xay) = f(xy) ; \forall x, y \in G\} . \\ &= A \cap U(f). \end{aligned}$$

Pour prouver le théorème (4.3), nous commençons par montrer le lemme :

(4.4) Lemme Soient $(G, \mu, f, U(f), A, A(f))$ comme dans le théorème (4.3). Alors $A(f)$ est un sous-groupe distingué de G et $A(f) = A \cap U(f)$.

Preuve : Comme f est u.c.g., il est clair que

$$(*) \ U(f) = \{ \xi \in G : \lim_n \sup_{x \in K} | \mathbb{E}_e [f(xX_n \xi) - f(xX_n)] | \neq 0 \\ \forall K \text{ compact de } G \}$$

Posons $B^0 = \{e\}$, $B = A \cap U(f) U(f)^{-1}$, puis $B^n = BB^{n-1}$, pour $n \geq 1$. Nous avons $A(f) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n}$

De (*) il résulte que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n = A \cap U(f)$.

[En effet, raisonnons par récurrence, en supposant que B^n soit contenu dans $A \cap U(f)$ pour $n < p$. Soit ξ un élément de B^p ; ξ s'écrit $\xi = nuv^{-1}$ avec $n \in B^{p-1}$, $u, v \in U(f)$, $uv^{-1} \in A$. Nous avons alors, pour tout $x \in G$,

$$\left| \mathbb{E}_e [f(xX_n \xi) - f(xX_n)] \right| \leq \left| \mathbb{E}_e [f(x(X_n \xi X_n^{-1}) X_n) - f(x[X_n \xi X_n^{-1}] X_n v)] \right| \\ + \left| \mathbb{E}_e [f(x[X_n \eta X_n^{-1}] X_n u) - f(x[X_n \eta X_n^{-1}] X_n)] \right| \\ + \left| \mathbb{E}_e [f(xX_n \eta) - f(xX_n)] \right| ;$$

qui montre, via (*) que $\xi \in U(f)$]

D'autre part, comme f est u.c.g. et G agit de façon compacte sur A , il est clair que f est u.c.d. sur A (i.e.

$\sup_{x \in G} |f(xa) - f(x)|$ converge vers zéro quand a converge dans A vers l'élément unité). Il s'ensuit que $A \cap U(f)$ est fermé dans G et par suite $A(f) = A \cap U(f)$.

Pour achever la preuve du lemme (4.4), il nous reste à montrer que $A(f)$ est distingué dans G .

Soit ξ un élément de $A(f) = A \cap U(f)$. Comme $U(f)$ est un borélien de μ^r -mesure 1, $\forall r \geq 1$, il existe un borélien U' de G de μ^r -mesure 1, $\forall r \geq 1$, tel que $U' \cap \xi \subset U(f)$. Pour tout $g \in U'$, nous avons $g \xi g^{-1} \in A \cap U(f) \cap U(f)^{-1} \subset A(f)$. $A(f)$ étant fermé, il s'ensuit que $g \xi g^{-1} \in A(f)$ pour tout $g \in T_\mu$. Autrement dit

$$g A(f) g^{-1} \subset A(f), \quad \forall g \in T_\mu.$$

Pour tout élément g de G , désignons par $\text{Ad}g$ l'automorphisme de A défini par : $a \in A \rightarrow gag^{-1} \in A$. Puisque G agit de façon compacte sur A , $\text{Ad}G$ est un groupe compact ; nous savons alors que le semi-groupe $\text{Ad}T_\mu$ de $\text{Ad}G$ est un sous-groupe de $\text{Ad}G$. Comme μ est adaptée à G , nous avons alors $\text{Ad}T_\mu = \text{Ad}G$ et $A(f)$ est donc distingué dans G .

Preuve du théorème (4.3)

Du lemme (4.4) il résulte que pour tout $\xi \in A(f)$,

$$\lim_n |\mathbb{E}_e [f(xX_n \xi)] - f(x)| = 0, \quad \forall x \in G.$$

Comme f est u.c.d. sur A (i.e. $\sup_{x \in G} |f(xa) - f(x)|$

tend vers zéro lorsque a converge dans A vers l'élément unité), il est alors clair que l'on a pour tout compact K de G ,

$$(*) \quad , \lim_n \sup_{\xi \in A(f) \cap K} \left| \mathbb{E}_e [f(xX_n \xi)] - f(x) \right| = 0, \quad \forall x \in G.$$

Soient $a \in A(f)$ et $x, y \in G$. Pour tout entier naturel n , nous avons

$$|f(xy) - f(xay)| = \left| f(xy) - \mathbb{E}_e [f(xyX_n [X_n^{-1} y^{-1} ayX_n])] \right|$$

De (*) il résulte alors que l'on a

$$f(xy) = f(xay)$$

le théorème (4.3) est donc démontré.

(4.5) Corollaire

Soit N un groupe nilpotent d'ordre r ; nous désignons par $N^1 = N, \dots, N^{r+1} = \{e\}$ sa série centrale descendante. Soient ν une mesure de probabilité sur N , adaptée à N et f un élément de $HG(\nu)$. Nous appelons ϕ l'application de $G \times G$ sur G qui au couple (x, y) associe le produit xy^{-1} .

Alors, d'une part, nous avons,

$$(1) \quad N^r \cap U(f) U(f)^{-1} = \{u \in N^r : f(xuy) = f(xy) \quad ; \quad \forall x, y \in G\};$$

et d'autre part, il existe un borélien $V(f)$ de $G \times G$, de $\nu^P \otimes \nu^Q$ - mesure 1, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$(2) \quad N^{r-1} \cap \phi[V(f)] = \{u \in N^{r-1} : f(xuy) = f(xy) \quad ; \quad \forall x, y \in G\}$$

Preuve :- (1) est une conséquence immédiate du théorème (4.3)

- Pour montrer (2), posons :

$V(f) = \{(\xi, \eta) \in U(f) \times U(f) : \text{il existe un borélien } W_{\xi, \eta} \text{ de } G \text{ de}$

μ^r -mesure 1, $\forall r \geq 1$ tel que pour tout $b \in W$

$$\{(\xi b \eta) (\eta b \xi)^{-1} \in U(f) U(f)^{-1}\}.$$

Comme $U(f)$ est un borélien de G de μ^r -mesure 1, $\forall r \geq 1$, il est clair que $U(f)$ est de $\mu^p \otimes \mu^q$ -mesure 1, $\forall p, q \geq 1$.

Soit (ξ, η) un élément de $V(f)$ tel que $\xi \eta^{-1} \in N^{r-1}$. Pour tout élément u de $W_{\xi, \eta}$, nous avons

$$[\xi \eta^{-1}, nu] = \xi u \eta (nu \xi)^{-1} \in N^r \cap U(f) U(f)^{-1} = A(f)$$

$A(f)$ étant un sous-groupe fermé de N et $\xi \eta^{-1}$ étant un élément de N^{r-1} , il est facile de voir que $\{g \in N : [\xi \eta^{-1}, g] \in A(f)\}$ est un sous-groupe fermé de N . Comme μ est adaptée à G , on en déduit que

$$(*) \quad [\xi \eta^{-1}, G] \subset A(f).$$

Pour tous éléments x et y de G , nous avons alors

$$\begin{aligned} f(x \xi \eta^{-1} y) &= \lim_n \mathbb{E}_e [f(x \xi \eta^{-1} y X_n \eta)] && (\text{car } \eta \in U(f)) \\ &= \lim_n \mathbb{E}_e [f(xy X_n \xi)] && (\text{d'après } (*) \text{ et } (1)) \\ &= f(xy) && (\text{car } \xi \in U(f)) \end{aligned}$$

Q.E.D.

(4.6) Corollaire ([2]) Soient N un groupe nilpotent d'ordre 2 et μ une mesure de probabilité sur N , adaptée à N . Alors $H_e(\mu)$ est réduit aux constantes.

Preuve. Ce corollaire est une conséquence immédiate des corollaires (1.5) et (4.5) .

(4.7) Remarques : Soit G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G . Nous désignons par m une mesure de Haar à droite sur G .

Soit f un élément de $H(\mu)$. Pour toute mesure de probabilité α sur G , absolument continue par rapport à la mesure de Haar, on voit facilement que l'on a

$$U(L_\alpha f) \supseteq W(\alpha) \cup U(f),$$

avec

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \{ \xi \in G : \lim_n \sup \int_G \left| \mathbb{E} \left[\frac{d\alpha}{dm}(x\xi^{-1}X_n^{-1}) - \frac{d\alpha}{dm}(xX_n^{-1}) \right] \right| m(d\mathbf{x}) = 0 \} \\ &= \{ \xi \in G : \lim_n \sup \left\| (R_{\xi^{-1}} - I) R_{\xi^{-1}} \frac{d\alpha}{dm} \right\|_1 = 0 \} . \end{aligned}$$

Nous voyons donc que la grosseur du borélien $U(L_\alpha f)$ est liée à celle de $W(\alpha)$. Dans [2], Guivarc'h obtient le résultat suivant :

Théorème ([2] Th.V.4) Soient N un groupe nilpotent L.C.D., μ une mesure de probabilité sur N , adaptée à μ et possédant un moment d'ordre $\lambda > 0$.

Alors pour toute mesure de probabilité α sur N , absolument continue par rapport à la mesure de Haar de N , $W(\alpha)$ contient le centre de N .

De ce résultat, il résulte immédiatement que :

Corollaire [2] . Soient (N, μ) comme dans le théorème. Alors $H_c(\mu)$ est réduit aux constantes.

- [1] AZENCOTT Robert : Espaces de Poisson des groupes localement compacts. Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lectures Notes in Mathematics, 148).
- [2] GUIVARC'H Yves : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France, 101, 1973, p333-379
- [3] RAUGI Albert : Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes. Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977, 127 p.