

M. BERNADOU

**Méthode des éléments finis avec intégration numérique
pour les problèmes de coques**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__S4_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

M. BERNADOU

(I.R.I.A. - LABORIA)

Résumé : On donne une description générale de la prise en compte de l'utilisation de schémas d'intégration numérique pour la résolution du problème de l'équilibre d'une coque par une méthode conforme d'éléments finis. La modélisation du problème continu est celle de W.T. Koiter. Ensuite, on donne des conditions suffisantes qui assurent le même ordre de convergence que dans le cas d'intégrations exactes. Ces conditions font intervenir le degré de l'approximation des composantes du déplacement et le degré de précision des schémas d'intégration numérique.

1. - LE PROBLEME CONTINU :

Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné du plan $\mathcal{E}^2$, de frontière Γ . Alors la surface moyenne $\mathcal{S}$ de la coque est l'image de l'ensemble $\overline{\Omega}$ par une application $\vec{\phi} : \overline{\Omega} \subset \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^3$, où $\mathcal{E}^3$ est l'espace euclidien habituel. Par la suite, nous supposons que $\vec{\phi} \in \mathcal{C}^3(\overline{\Omega})$ et que tous les points de $\mathcal{S} = \vec{\phi}(\overline{\Omega})$ sont réguliers, en ce sens que les deux vecteurs $\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha}$, $\alpha=1,2$, sont linéairement indépendants, pour tous les points $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \overline{\Omega}$. A la base covariante $(\vec{a}_\alpha)$ du plan tangent, nous associons la base contravariante $(\vec{a}^\alpha)$ qui est définie par les relations $\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ (pas de sommation si $\alpha=\beta$), où δ^α_β est le symbole de Kronecker. Nous introduisons également le vecteur $\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$.

Les inconnues sont les trois fonctions :

$$u_i : \xi \in \overline{\Omega} \rightarrow u_i(\xi) \in \mathbb{R}, \quad i=1,2,3,$$

qui représentent les composantes covariantes du déplacement $\vec{u} = \vec{u}(\xi)$ du point $\vec{\phi}(\xi)$, i.e., $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{a}^i$. Suivant la modélisation de W.T. KOITER [14][15], la solution $\vec{u}$ minimise l'énergie de la coque

$$(1) \quad J(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v})$$

sur l'espace $\vec{V} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, qui correspond au cas d'une coque encastrée. Naturellement, il est possible de considérer d'autres conditions aux limites. Suivant CIARLET [5], la forme bilinéaire associée à l'énergie potentielle élastique de la coque a la forme

$$(2) \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^tU A V \, d\xi ,$$

où la matrice colonne V (il en va de même pour U) est donnée par

$${}^tV = [v_1 \, v_{1,1} \, v_{1,2} \, v_2 \, v_{2,1} \, v_{2,2} \, v_3 \, v_{3,1} \, v_{3,2} \, v_{3,1} \, v_{3,2} \, v_{3,2}],$$

et où la matrice A , carrée, symétrique, 12×12 , est fonction de la géométrie de la surface moyenne S , seulement. Finalement, l'énergie potentielle des forces extérieures est de la forme (CIARLET [5])

$$(3) \quad f(\vec{v}) = \int FV \, d\xi ,$$

où la matrice ligne F est fonction des composantes sur la base $(\vec{a}_i)$ de la résultante des forces extérieures (on suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de couple résultant) d'une part, et de la géométrie de la coque, d'autre part.

De manière équivalente, le déplacement $\vec{u}$ est solution de l'équation variationnelle

$$(4) \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} , \, a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}) .$$

Dans BERNADOU-CIARLET [3] nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 1 : La forme bilinéaire (2) est $\vec{V}$ -elliptique et le problème (4) admet une solution et une seule. ■

2. - METHODES CONFORMES D'ELEMENTS FINIS AVEC INTEGRATION EXACTE :

2.1. L'espace discret $\vec{V}_h$

Désormais, nous supposons que l'ensemble $\bar{\Omega}$ est un polygone ce qui permet de le recouvrir exactement par une famille affine régulière de triangulations $\mathcal{T}_h$ au sens suivant :

$$(5) \quad (i) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K ;$$

(ii) Il existe un ensemble de référence $\hat{K}$ tel que $\forall K \in \mathcal{T}_h$ il existe une application affine inversible

$$(6) \quad F_K : \hat{x} \in \hat{K} \rightarrow F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \in K$$

telle que $K = F_K(\hat{K})$;

(iii) Il existe une constante σ telle que

$$(7) \quad \forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, (h_K / \rho_K) \leq \sigma,$$

où $h_K = \text{diam}(K)$ et $\rho_K = \sup \{ \text{diam}(S), S \text{ est un disque contenu dans } K \}$;

$$(8) \quad (iv) \text{ La quantité } h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \text{ tend vers } 0.$$

A chaque ensemble K , on associe deux éléments finis

$$(9) \quad (K, P_{K1}, \Sigma_{K1}) \text{ et } (K, P_{K2}, \Sigma_{K2})$$

où P_{K1} (resp. P_{K2}) est un espace de fonctions convenables $p : K \rightarrow \mathbb{R}$, et Σ_{K1} (resp. Σ_{K2}) est un ensemble fini de degrés de liberté de l'élément. Ainsi, à chaque famille affine régulière de triangulations $\mathcal{T}_h$ nous associons deux espaces d'éléments finis V_{h1} et V_{h2} . Nous supposons $V_{h1} \subset H_0^1(\Omega)$ et $V_{h2} \subset H_0^2(\Omega)$. Ainsi, la solution approchée $\vec{u}_h = (u_{h1}, u_{h2}, u_{h3})$ est cherchée dans l'espace $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$ et nous avons

$$(10) \quad \vec{V}_h \subset \vec{V},$$

d'où l'appellation de méthodes conformes.

2.2 Le problème discret :

La solution approchée $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ est telle que

$$(11) \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f(\vec{v}_h).$$

L'inclusion (10) entraîne l'existence et l'unicité d'une solution $\vec{u}_h$ pour le problème (11).

Remarque : Dans [5], CIARLET prend en compte l'approximation explicite de la géométrie de la surface moyenne. Dans notre étude, cette approximation sera implicitement contenue dans l'utilisation de schémas d'intégration numérique. ■

2.3. Estimation explicite de l'erreur :

Dans toute la suite, pour tout entier m , nous désignons par $P_m(K)$ (resp. $Q_m(K)$) l'espace de tous les polynômes de degré $\leq m$ par rapport aux deux variables ξ^1, ξ^2 (resp. par rapport à chacune des variables ξ^1, ξ^2), $(\xi^1, \xi^2) \in K$.

Suivant CIARLET [6] [7] nous dirons qu'une famille d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) , $K \in \mathcal{T}_h$ est affine s'il existe un élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tel que, $\forall K \in \mathcal{T}_h$, l'application affine inversible F_K définie en (6) établisse une correspondance bijective entre les quantités $\hat{K}$ et K , $\hat{P}$ et P_K , $\hat{\Sigma}$ et Σ_K . Dans les travaux de CIARLET-RAVIART [8] [9], cette notion est déterminante pour l'obtention des propriétés d'interpolation. Mais beaucoup d'éléments finis de classe $\mathcal{C}^1$ ne forment pas de familles affines : cependant, pour certains d'entre eux, il est établi dans CIARLET [9] que leurs propriétés d'interpolation sont analogues à celles des familles affines. De telles familles sont dites presque-affines (CIARLET [7, §6.1]). Dès lors, par analogie avec CIARLET [5, Théorème 4.3] il vient :

Théorème 2 : Soit deux familles régulières, affines ou presque affines, d'éléments finis (K, P_{K1}, Σ_{K1}) , (K, P_{K2}, Σ_{K2}) telles que l'espace discret associé $\vec{V}_h$ vérifie l'inclusion (10). On suppose en outre que

$$P_{m_1}(K) \subset P_{K1}, \quad m_1 \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m_1,$$

$$P_{m_2}(K) \subset P_{K2}, \quad m_2 \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m_2,$$

$$H^{m_\alpha+1}(K) \subset C^{s_\alpha}(K), \quad \alpha=1,2,$$

où s_α désigne l'ordre le plus élevé de dérivation partielle apparaissant dans la définition de l'ensemble $\Sigma_{K\alpha}$, $\alpha=1,2$.

Alors, si la solution $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ du problème (4) appartient à l'espace $H^{m_1+1}(\Omega) \times H^{m_1+1}(\Omega) \times H^{m_2+1}(\Omega)$, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$(12) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}} \leq Ch^{\min(m_1, m_2-1)},$$

où $\vec{u}_h$ est la solution approchée définie par (11). ■

3. - L'EFFET DE L'INTEGRATION NUMERIQUE.

Même si les coefficients des matrices A et F (cf. (2) (3)) ont des expressions analytiques simples, les intégrales sur les ensembles K qui apparaissent dans la relation (11) sont rarement calculées exactement. Pour les évaluer on utilise généralement des schémas d'intégration numérique. Dans ce paragraphe, on démontre la convergence de cette nouvelle approximation et on établit des conditions suffisantes sur les schémas d'intégration qui préservent l'ordre de convergence obtenu en (12), Théorème 2.

3.1. Le nouveau problème discret, avec prise en compte de l'intégration numérique :

Soit un schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence $\hat{K}$

$$(13) \quad \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_\ell \hat{\phi}(\hat{b}_\ell).$$

Toutes les intégrales qui apparaissent dans (11) sont de la forme $\int_K \phi(x) dx$ et nous avons

$$(14) \quad \int_K \phi(x) dx = \det(B_K) \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x},$$

en utilisant la correspondance habituelle entre ϕ et $\hat{\phi}$, i.e., $\hat{\phi} = \phi \circ F_K$ et $\phi = \hat{\phi} \circ F_K^{-1}$. Alors, le schéma d'intégration numérique (13) sur l'ensemble $\hat{K}$ induit automatiquement un schéma d'intégration numérique sur l'ensemble K ,

$$(15) \quad \int_K \phi(x) dx \sim \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} \phi(b_{\ell,K})$$

avec

$$(16) \quad \omega_{\ell,K} = \det(B_K) \hat{\omega}_{\ell} \text{ et } b_{\ell,K} = F_K(\hat{b}_{\ell}), \quad 1 \leq \ell \leq L.$$

On définit en outre les fonctionnelles d'erreur

$$(17) \quad \begin{cases} \hat{E}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} - \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \hat{\phi}(\hat{b}_{\ell}), \\ E_K(\phi) = \int_K \phi(x) dx - \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} \phi(b_{\ell,K}). \end{cases}$$

Ainsi, le nouveau problème discret, prenant en compte l'utilisation de l'intégration numérique, est : trouver $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ tel que

$$(18) \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h),$$

où

$$(19) \quad a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} {}^t u_h(b_{\ell,K}) A(b_{\ell,K}) v_h(b_{\ell,K})$$

$$(20) \quad f_h(\vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} F(b_{\ell,K}) v_h(b_{\ell,K}).$$

L'hypothèse $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ implique $A \in (\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}))^{144}$ et ainsi $A(b_{\ell,K})$ a un sens. En outre, nous supposons $F \in (\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}))^{12}$. Alors, nous nous intéressons aux problèmes suivants :

(i) Montrer que le problème (18) a une solution unique : pour ce faire, nous montrerons que sous des hypothèses convenables, la forme bilinéaire a_h est uniformément (par rapport à h) $\vec{V}_h$ -elliptique : cf. Théorème 4.

(ii) Trouver des conditions suffisantes sur les schémas d'intégration numérique qui assurent $\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{\vec{V}} = 0$ ($h^{\min(m_1, m_2-1)}$), i.e., le même ordre que dans (12).

3.2. Estimation d'erreur "abstraite" :

Pour résoudre le problème (ii), nous commençons par établir une estimation d'erreur "abstraite", analogue à CIARLET [7, Théorème 4.1-1] :

Théorème 3 : Considérons une famille de problèmes discrets (18) pour lesquels les formes bilinéaires sont uniformément $\vec{V}_h$ -elliptiques, i.e., il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de h telle que

$$(21) \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \alpha \|\vec{v}_h\|_{\vec{V}}^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h).$$

Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{\vec{V}} \leq C \left(\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u}-\vec{v}_h\|_{\vec{V}} + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}}} \right) \\ + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_{\vec{V}}} \end{aligned}$$

Démonstration : l'hypothèse (21) entraîne l'existence et l'unicité d'une solution pour le nouveau problème discret (18). Alors, pour tout $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha \|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_{\vec{V}}^2 \leq a(\vec{u} - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) + \{a(\vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) - a_h(\vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h)\} \\ + \{f_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h) - f(\vec{u}_h - \vec{v}_h)\}. \end{aligned}$$

La continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et l'inégalité triangulaire

$$\|\vec{u}-\vec{u}_h\|_{\vec{V}} \leq \|\vec{u}-\vec{v}_h\|_{\vec{V}} + \|\vec{v}_h-\vec{u}_h\|_{\vec{V}}$$

entraînent alors l'inégalité (22). ■

Ainsi, en plus du terme habituel $\inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|$, provenant de l'interpolation, nous trouvons deux autres termes qui évaluent la "consistance" du schéma d'approximation.

3.3. $\vec{V}_h$ -ellipticité uniforme :

On donne maintenant des conditions suffisantes sur le schéma d'intégration numérique qui assurent que la condition (21) est satisfaite.

Théorème 4 : Supposons que les espaces fonctionnels P_{K1} et P_{K2} définis en (9) satisfassent les inclusions $P_{K1} \subset P_{n1}(K)$ et $P_{K2} \subset P_{n2}(K)$, où les entiers n_1 et n_2 sont tels que $1 \leq m_1 \leq n_1$ et $2 \leq m_2 \leq n_2$ (pour m_1 et m_2 , cf. Théorème 2). Par suite, les espaces associés $\hat{P}_{K1}$ et $\hat{P}_{K2}$ (au moyen de l'application affine inversible F_K définie en (6)), vérifient les inclusions

$$(23) \quad \hat{P}_{K1} \subset P_{n1}(\hat{K}), \quad \hat{P}_{K2} \subset P_{n2}(\hat{K}), \quad 1 \leq n_1, \quad 2 \leq n_2.$$

Soit un schéma d'intégration numérique (13) donné sur l'ensemble de référence $\hat{K}$ pour lequel :

$$(24) \quad (i) \quad \hat{\omega}_\ell > 0, \quad 1 \leq \ell \leq L,$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ii) \text{ la réunion } \bigcup_{\ell=1}^L \{\hat{b}_\ell\} \text{ des noeuds contient un sous-ensemble} \\ P_{n1-1} \text{-unisolvant ou } \forall \hat{\phi} \in P_{2n1-2}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \end{array} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (iii) \text{ la réunion } \bigcup_{\ell=1}^L \{\hat{b}_\ell\} \text{ des noeuds contient un sous-ensemble} \\ P_{n2-2} \text{-unisolvant ou } \forall \hat{\phi} \in P_{2n2-4}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0. \end{array} \right.$$

Alors, la condition (21) d'uniforme $\vec{V}_h$ -ellipticité est vérifiée.

Démonstration : Donnons les idées de la démonstration qui comporte trois étapes. Dans l'étape 1, on établit que le système des équations linéaires de coques (associé à l'équation variationnelle (4)) est uniformément fortement elliptique. Suivant D.G. FIGUEIREDO [12], cette propriété est une conséquence de la $\vec{V}$ -ellipticité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ démontrée dans BERNADOU-CIARLET [3]. Ensuite, dans l'étape 2, on montre que les conditions (24)(25)(26) entraînent l'existence de constantes strictement positives $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ telles que

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{p} \in P_{n_1}(\hat{K}), \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \sum_{j=1}^2 (\hat{p}_{,j}(\hat{b}_{\ell}))^2 \geq \beta_1 |\hat{p}|_{1,\hat{K}}^2, \\ \forall \hat{p} \in P_{n_2}(\hat{K}), \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \sum_{i,j=1}^2 (\hat{p}_{,ij}(\hat{b}_{\ell}))^2 \geq \hat{\beta}_2 |\hat{p}|_{2,\hat{K}}^2. \end{array} \right.$$

Finalement, dans l'étape 3, un raisonnement analogue à celui de CIARLET-RAVIART [8] [9], permet de montrer que les conditions (23)(24) et (27) entraînent l'uniforme $\vec{V}_h$ -ellipticité (21). ■

3.4. Estimation des termes de "consistance".

Estimons maintenant les deux termes de "consistance" du second membre de l'inégalité (22). La définition (17) des fonctionnelles d'erreur E_K entraîne pour tout $\vec{w}_h \in \vec{V}_h$ (les éléments de la matrice A dans (2) sont notés A_{IJ}) :

$$(28) \quad |a(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{I,J=1}^{12} |E_K\{A_{IJ}(v_h)_I (w_h)_J\}|,$$

$$(29) \quad |f(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |E_K(FW_h)|.$$

Ainsi, le premier objectif est d'obtenir des estimations sur les termes $|E_K\{A_{IJ}(v_h)_I (w_h)_J\}|$ et $|E_K(FW_h)|$. Pour préparer cette évaluation nous disposons des deux théorèmes suivants qui se démontrent par analogie avec CIARLET [7] et CIARLET-RAVIART [9].

Théorème 5 : Soit un schéma d'intégration numérique (13) sur l'ensemble de référence $\hat{K}$ tel que

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\phi} \in P_{m+n_1-k}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \text{ si } k \leq m, \\ \forall \hat{\phi} \in P_{m+n_2-\ell}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \text{ si } \ell \leq m, \\ \forall \hat{\phi} \in P_m(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \end{array} \right.$$

où k, ℓ, m, n_1, n_2 sont des entiers ≥ 0 , tels que $k+\ell \geq m+1$. Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $K \in \mathcal{T}_h$ et h_K telle que

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in W^{m+1, \infty}(K), \forall v \in P_{n_1}(K), \forall w \in P_{n_2}(K), \\ |E_K(aw)| \leq C h_K^{m+1} \|a\|_{W^{m+1, \infty}(K)} \|v\|_{H^k(K)} \|w\|_{H^\ell(K)} \quad \cdot \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Théorème 6 : Supposons que

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\phi} \in P_{m+n-\ell}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \text{ si } \ell \leq m, \\ \forall \hat{\phi} \in P_m(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \end{array} \right.$$

où ℓ, m, n sont des entiers ≥ 0 .

Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de $K \in \mathcal{T}_h$ et h_K telle que

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \phi \in W^{m+1, q}(K) \text{ avec } q > \frac{2}{m+1}, \quad \forall w \in P_n(K) \\ |E_K(\phi w)| \leq C h_K^{m+1} (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \|\phi\|_{W^{m+1, q}(K)} \|w\|_{H^\ell(K)} \quad \cdot \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

3.5. Estimation explicite de l'erreur.

En combinant les résultats des Théorèmes 2 à 6 on obtient le théorème final :

Théorème 7 : Soit deux familles régulières, affines ou presque affines, d'éléments finis (K, P_{K1}, Σ_{K1}) , (K, P_{K2}, Σ_{K2}) telles que l'espace associé $\vec{V}_h$ vérifie l'inclusion (10). Supposons que

$$P_{m_1}(K) \subset P_{K1} \subset P_{n_1}(K), \quad m_1 \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq m_1 \leq n_1,$$

$$P_{m_2}(K) \subset P_{K2} \subset P_{n_2}(K), \quad m_2 \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m_2 \leq n_2,$$

$$H^{m_\alpha+1}(K) \subset C^{s_\alpha}(K), \quad \alpha=1,2,$$

où s_α désigne l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble $\Sigma_{K\alpha}$, $\alpha=1,2$.

Soit un schéma d'intégration numérique (13) donné sur l'ensemble de référence $\hat{K}$ pour lequel (on note $m=-1+\min(m_1, m_2-1)$):

$$(34) \quad (i) \quad \hat{\omega}_\ell > 0, \quad 1 \leq \ell \leq L,$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ii) \quad \text{la réunion } \bigcup_{\ell=1}^L \{\hat{b}_\ell\} \text{ des noeuds contient un sous-ensemble} \\ P_{n_1-1} \text{-unisolvant ou } \forall \hat{\phi} \in P_{2n_1-2}(\hat{K}), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (iii) \quad \text{la réunion } \bigcup_{\ell=1}^L \{\hat{b}_\ell\} \text{ des noeuds contient un sous-ensemble} \\ P_{n_2-2} \text{-unisolvant ou } \forall \hat{\phi} \in P_{2n_2-4}(\hat{K}), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \end{array} \right.$$

$$(37) \quad (iv) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{m+n_1-1}(\hat{K}), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0,$$

$$(38) \quad (v) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{m+n_2-2}(\hat{K}), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0.$$

Alors, si la solution $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ du problème (4) appartient à l'espace $H^{m_1+1}(\Omega) \times H^{m_1+1}(\Omega) \times H^{m_2+1}(\Omega)$, si $A \in (W^{m+1, \infty}(\Omega))^{144}$, et si $F \in (W^{m+1, q}(\Omega))^{12}$, pour un certain $q > \frac{2}{m+1}$, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$(39) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}} \leq C h^{\min(m_1, m_2-1)},$$

où $\vec{u}_h$ est la solution approchée définie par (11). ■

Remarque : On obtient des résultats analogues pour les éléments rectangulaires (tels que le rectangle de BOGNER-FOX-SCHMIT défini, par exemple, dans CIARLET [7]) pour lequel

$$P_{m_1}(K) \subset P_{K1} \subset Q_{n_1}(K), \quad P_{m_2}(K) \subset P_{K2} \subset Q_{n_2}(K), \quad 1 \leq m_1 \leq n_1, \quad 2 \leq m_2 \leq n_2. \quad \blacksquare$$

4. - EXEMPLES.

Dans les figures 1 et 2 nous indiquons les résultats obtenus en appliquant le théorème 7 à diverses familles d'éléments finis. Dans chaque cas, nous précisons :

- (i) la valeur de $m = -1 + \min(m_1, m_2 - 1)$;
- (ii) l'estimation d'erreur sous la forme $o(h^{m+1})$;
- (iii) les hypothèses sur le schéma d'intégration numérique ;
- (iv) un ou deux schémas d'intégration numérique convenables, extraits de LYNESS-JESPERSEN [16] ou de STROUD [18] ;
- (v) l'hypothèse de régularité sur $\vec{u}$.

Dans le cas d'éléments finis "composites" (ou "macroéléments") tels que le triangle de HSIEH-CLOUGH-TOCHER ou le quadrilatère de F. de VEUBEKE-SANDER, les critères sur les schémas d'intégration numérique doivent être vérifiés sur chaque triangle élémentaire K_1 constituant l'ensemble K .

5. - BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARGYRIS J.H., HAASE M., MALEJANNAKIS G.A., Natural Geometry of surfaces with specific reference to the matrix displacement analysis of shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Vol. B76, 1973, 361-410.
- [2] BELL K., A refined triangular plate bending element, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 1, 1969, 101-122.
- [3] BERNADOU M., CIARLET P.G., Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. KOITER, Proceedings of second international Symposium on computing methods in applied sciences and engineering (Versailles, December 15-19, 1975). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 134, pp. 89-136, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [4] BERNADOU M., DUCATEL Y., Méthodes conformes d'éléments finis pour des problèmes elliptiques du quatrième ordre avec intégration numérique. Rapport LABORIA N° 195, I.R.I.A., 1976. A paraître dans la R.A.I.R.O.
- [5] CIARLET P.G., Conforming finite element methods for the shell problem, à paraître dans les Proceedings of the Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel University, April 7-10, 1975.
- [6] CIARLET P.G., Numerical Analysis of the Finite Element Method, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Presses de l'Université de Montréal, 1976.
- [7] CIARLET P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1977.
- [8] CIARLET P.G., RAVIART P.A., The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods. In AZIZ A.K. (Editor), The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New-York, 1972, 409-474.
- [9] CIARLET P.G., RAVIART P.A., L'effet de l'intégration numérique dans les méthodes d'éléments finis, A paraître.
- [10] CLOUGH R.W., TOCHER J.L., Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, October 1965.
- [11] DUPUIS G., Application of Ritz's method to thin elastic shell analysis. Journal of Applied Mechanics, 71-APM-32, 1971, 1-8.

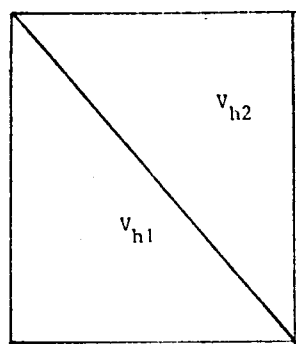
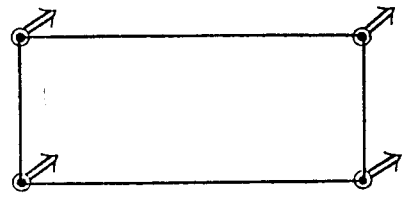
- [12] FIGUEIREDO (de) D.G., The coerciveness problem for forms over vector valued functions, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 16, 1963, 63-94.
- [13] FRAEIJIS de VEUBEKE B., Bending and Stretching of plates, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B., Ohio, 1965.
- [14] KOITER W.T., On the non-linear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Vol. B69, 1966, 1-54.
- [15] KOITER W.T., On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Vol. B73, 1970, 169-195.
- [16] LYNES J.N., JESPERSEN D. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. J. Inst. Maths. Applics., Vol. 15, 1975, 19-32.
- [17] NAGHDI P.M., The Theory of shells and plates. Handbuch der physik, Vol. VI a-2, Springer-Verlag, Berlin, 1972, 425-640.
- [18] STROUD A.H., Approximate Calculation of Multiple Integrals, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971.

	<u>ARGYRIS</u> $m_2 = n_2 = 5$	<u>BELL</u> $m_2=4, n_2=5$		<u>HSIEH-CLOUGH-TOCHER</u> $m_2 = n_2 = 3$ sur chaque K_i	<u>H.C.T. réduit</u> $m_2=2, n_2=3$ sur chaque K_i
<u>ARGYRIS</u> $m_1 = n_1 = 5$	$m=3 ; o(h^4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_4\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_7, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_8, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ 2 schémas avec 16 pts chacun $\vec{u} \in (H^6(\Omega))^3$		<u>H.C.T.</u> $m_1 = n_1 = 3$ sur chaque K_i	$m=1 ; o(h^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_2(\hat{K}_i)\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_3(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_4(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schéma avec 6 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^4(\Omega))^3$	
<u>BELL</u> $m_1=4, n_1=5$	$m=3 ; o(h^4)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_4\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_7, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_8, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ 2 schémas avec 16 pts chaq. $\vec{u} \in (H^5(\Omega))^2 \times H^6(\Omega)$	$m=2 ; o(h^3)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_4\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_6, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_8, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ 2 schémas avec 16 pts. chaq. $\vec{u} \in (H^5(\Omega))^3$	<u>2-LAGRANGE</u> $m_1 = n_1 = 2$	$m=1 ; o(h^2)$ $\forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0$ Schémas avec 3 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$	$m=0 ; o(h)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_1(\hat{K}_i)\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_1(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schémas avec 3 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^3$
<u>3-HERMITE</u> $m_1 = n_1 = 3$	$m=2 ; o(h^3)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_3\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_5, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_6, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ 2 schémas avec 12 et 13 pts $\vec{u} \in (H^4(\Omega))^2 \times H^6(\Omega)$	$m=2 ; o(h^3)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_3\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_5, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_6, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ 2 schémas avec 12 et 13 pts. $\vec{u} \in (H^4(\Omega))^2 \times H^5(\Omega)$	<u>1-LAGRANGE</u> $m_1 = n_1 = 1$	$m=0 ; o(h)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_1(\hat{K}_i)\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_1(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schémas avec 3 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$	$m=0 ; o(h)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_1(\hat{K}_i)\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_1(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schémas avec 3 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)$

Fig. 1. Eléments triangulaires

(Successivement, dans chaque cas : (i) $m=1+\min(m_1, m_2-1)$; (ii) l'estimation d'erreur $o(h^{m+1})$; (iii) les hypothèses sur les schémas d'intégration ;

(iv) le nombre de seconds de calcul

	<u>BOGNER - FOX - SCHMIT</u>  $m_2 = n_2 = 3$
<u>BOGNER-FOX-SCHMIT</u>	$m=1 ; o(h^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{Q_3 \cap P_5\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in Q_4 \cap P_6, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in Q_6 \cap P_{10}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schéma avec 16 points $\vec{u} \in (H^4(\Omega))^3$ $m_1 = n_1 = 3$

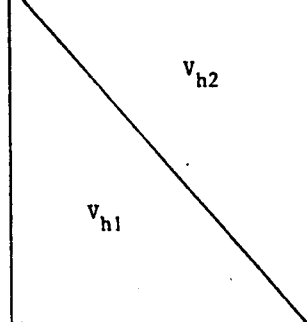
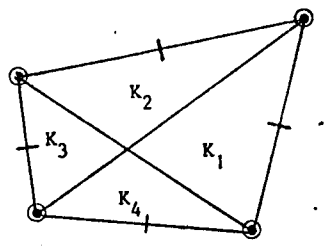
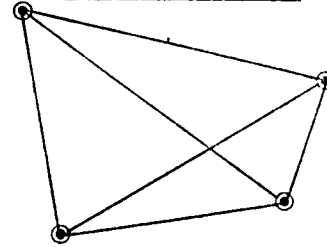
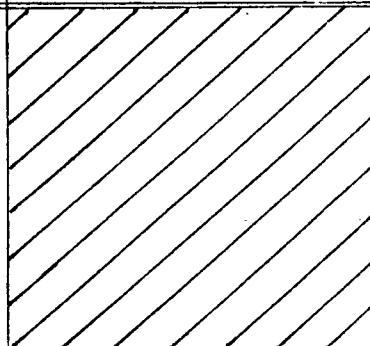
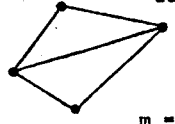
	<u>F. de VEUBEKE-SANDER</u>  $m_2 = n_2 = 3$ sur chaque K_i	<u>F. de V. - S. réduit</u>  $m_2=2, n_2=3$ sur chaque K_i
<u>F. de VEUBEKE-SANDER</u>	$m=1 ; o(h^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_2\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_3(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_4(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ schéma avec 6 pts sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (h^4(\Omega))^3$ $m_1 = n_1 = 3$ sur chaque K_i	
<u>F. de V. - S. réduit</u>	$m=1 ; o(h^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_2\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_3(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_4(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schéma avec 6 pts. sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (h^3(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$ $m_1=2, n_1=3$ sur chaque K_i	$m=0 ; o(h),$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_2\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_3(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_4(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schéma avec 6 points sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^3(\Omega))^3$
<u>1 - LAGRANGE</u> Le quadrilatère est subdivisé en 2 triangles et sur chaque triangle nous interpolons avec un élément fini de Lagrange de type 1.  $m_1 = n_1 = 1$	$m=0 ; o(h)$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_1\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_1(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schémas avec 3 pts. sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^4(\Omega)$	$m=0 ; o(h),$ $\left\{ \begin{array}{l} \{P_1\text{-unisolvant et} \\ \forall \hat{\phi} \in P_1(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0\} \\ \text{ou} \\ \{ \forall \hat{\phi} \in P_2(\hat{K}_i), \hat{E}(\hat{\phi}) = 0 \} \end{array} \right.$ Schémas avec 3 points sur $\hat{K}_i$ $\vec{u} \in (H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega).$

Fig. 2. Eléments quadrilatéraux

(Successivement, dans chaque cas : (i) $m=1+\min(m_1, m_2-1)$; (ii) l'estimation d'erreur $o(h^{m+1})$; (iii) les hypothèses sur les schémas d'intégration ; (iv) le nombre de noeuds de schémas convenables ; (v) l'hypothèse de régularité sur $\vec{u}$).