

J. C. NEDELEC

**Calcul par éléments finis des courants de Foucault sur  
une surface conductrice de  $R^3$**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1976\\_\\_S5\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__S5_A12_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RÉSUMÉ

CALCUL PAR ÉLÉMENTS FINIS DES COURANTS DE FOUCAULT

SUR UNE SURFACE CONDUCTRICE DE  $\mathbb{R}^3$ .

par J.C. NEDELEC

Nous étudions les courants de Foucault sur une surface  $\Gamma$  conductrice mince dans  $\mathbb{R}^3$ .

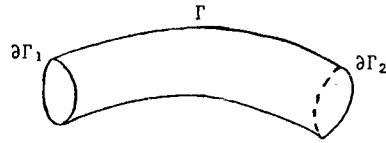
Nous supposons que ces courants sont créés par une excitation (différence de potentiel ou courant imposé) périodique alternative. Nous écrivons, alors, les équations des courants en utilisant la variable densité surfacique du courant qui est un vecteur complexe tangent à  $\Gamma$ .

Nous montrons, d'abord, que ces équations intégrales ont une solution unique. Nous introduisons, ensuite, un problème approché sur une surface approchée, construits par éléments finis.

Nous étudions l'erreur d'approximation de cette méthode. Des calculs numériques ont été réalisés et comparés à des résultats de mesures. Nous renvoyons, pour ces résultats, à NEDELEC-VERITE [1].

## 1 - POSITION DU PROBLÈME PHYSIQUE ET FORMULATION VARIATIONNELLE.

Nous étudions les courants dans un conducteur mince que nous assimilons à une surface  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^3$ . Nous supposons que cette surface est homéomorphe à un cylindre, c'est-à-dire qu'elle comporte une seule nappe percée de deux trous. Nous noterons  $\partial\Gamma_1$  et  $\partial\Gamma_2$  les courbes fermées de  $\mathbb{R}^3$  qui sont les bords de ces trous.



Nous étudions le cas de courants alternatifs, de période  $\omega$ . Les inconnues du problème sont, alors, d'une part, le courant surfacique  $J$ , qui est un vecteur complexe tangent à la surface  $\Gamma$ , et, d'autre part, le potentiel scalaire  $V$ , qui est une fonction complexe définie dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Si nous négligeons certains effets relativistes, nous pouvons admettre que le courant  $J$  est conservatif sur la surface  $\Gamma$ , ce que nous traduirons par l'équation

$$(1.1) \quad \text{div } J = 0.$$

L'équation de Maxwell s'écrit, dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ ,

$$(1.2) \quad \frac{1}{\sigma} J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} dy = -\text{grad } V,$$

où  $\sigma$  désigne la résistivité surfacique du conducteur,  $\mu$ , la perméabilité magnétique, et  $c$ , la vitesse de la lumière.

Les conditions aux limites, sur les bords des trous, sont de deux types. Ou bien, le potentiel  $V$  est imposé sur  $\partial\Gamma$  (et il est facile de voir alors que seule intervient la différence de potentiel entre  $\partial\Gamma_1$  et  $\partial\Gamma_2$ ),

ou bien, le flux de courant sortant est imposé (i.e.  $J \cdot n$ , où  $n$  est la normale à  $\partial\Gamma$  dans le plan tangent à  $\Gamma$ ).

Remarque 1 : Nous pourrions considérer le cas d'une surface à plusieurs nappes et à plus de deux trous, avec les conditions aux limites des deux types qui peuvent être mixtes. C'est dans le souci de clarifier l'exposé que nous avons considéré le cas le plus simple.

Nous allons préciser les équations (1.1) et (1.2). Précisons, d'abord, la surface  $\Gamma$ . Elle est définie par la donnée d'un nombre fini  $p$  de cartes qui sont des applications bijectives  $\phi_i$  d'un ouvert  $\theta_i$  de  $\mathbb{R}^2$  sur une partie  $\Gamma_i$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \theta_i \rightarrow \phi_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} x_i(\xi_1, \xi_2) \\ y_i(\xi_1, \xi_2) \\ z_i(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

telles que les applications  $\phi_i$  soient suffisamment régulières, et telles que les vecteurs tangents

$$e_1 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1}, \quad e_2 = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2}$$

soient non co-linéaires. Nous noterons  $e_3$  le vecteur normal "extérieur", de longueur 1. D'autre part, les applications  $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$  sont bijectives et régulières de l'ensemble  $\phi_j^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$  sur  $\phi_i^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$ .

Les bords  $\partial\Gamma_1$  et  $\partial\Gamma_2$  sont alors des courbes de la surface  $\Gamma$ , dont les images par les cartes  $\phi_i^{-1}$  sont des courbes régulières de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous supposons, afin de construire une triangulation, que nous pouvons trouver, dans chaque domaine  $\theta_i$ , un fermé  $D_i$  polyédrique, tels que

$$\bigcup_{i=1}^p \phi_i(D_i) = \Gamma$$

$\phi_i(D_i) \cap \phi_j(D_j)$  ;  $i \neq j$  ; est une courbe de  $\Gamma$ .

Les vecteurs  $e_1, e_2$ , nous permettent de définir la première forme fondamentale de la surface par

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

(où  $\cdot$  désigne le produit scalaire euclidien de  $R^3$ , et également, le produit scalaire hermitien de  $C^3$ ).

La matrice inverse sera notée par  $g^{ij}$ . Les vecteurs

$$e^i = g^{ij} e_j \quad (\text{convention de sommation de l'indice répété})$$

constituent la base duale de la base  $(e_1, e_2)$  du plan tangent.

Rappelons que l'élément d'aire  $d\gamma$  sur la surface  $\Gamma$  est

$$d\gamma = \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2$$

avec

$$g = g_{11} \, g_{22} - (g_{12})^2 = \det (g_{ij}).$$

Un vecteur complexe  $J$ , tangent à  $\Gamma$ , sera alors repéré, soit par ses coordonnées complexes dans la base  $e_1, e_2$ , notées  $J^1, J^2$  (coordonnées contra-variantes), soit par ses coordonnées dans la base duale (coordonnées co-variantes), notées  $J_1, J_2$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} J_i &= g_{ij} \, J^j \\ J^i &= g^{ij} \, J_j. \end{aligned}$$

Le produit hermitien de deux vecteurs  $J$  et  $K$ , définis au même point, sera

$$J \cdot K = g_{ij} \, J^i \, \bar{K}^j = J^i \, \bar{K}_i = J_i \, \bar{K}^i = g^{ij} \, J_i \, \bar{K}_j.$$

Nous noterons par

$$|J| = (J \cdot J)^{1/2}$$

la norme hermitienne de  $J$ .

Nous définissons le gradient d'une fonction  $V$ , définie sur  $\Gamma$ , comme le vecteur  $X$  de coordonnées co-variantes :

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial \xi^i}.$$

Le rotationnel d'une fonction  $\varphi$ , définie sur  $\Gamma$ , sera le vecteur  $X$  de coordonnées contra-variantes (noté  $\vec{\text{rot}} \, \varphi$ )

$$X^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2}, \quad X^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1}.$$

La divergence d'un vecteur  $J$  sera la fonction scalaire

$$\text{div } J = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \, J^i).$$

Le rotationnel du vecteur  $X$  sera la fonction scalaire

$$\text{rot } X = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial X_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi^2} \right).$$

On vérifie, alors, facilement que

$$|\text{grad } \varphi|^2 = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} = |\text{rot } \varphi|^2.$$

On définit aussi le laplacien qui est la fonction scalaire

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \text{rot } \vec{\text{rot}} \, \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \sqrt{g} \, g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^j} \right).$$

Nous avons les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1 : Soit  $J$  un vecteur tangent à  $\Gamma$ , et  $\varphi$  une fonction définie sur  $\Gamma$ , tels que  $J \in H^1(\Gamma)$ , et  $\varphi \in H^1(\Gamma)$ , nous avons :

$$(1.3) \quad \int_{\Gamma} \bar{\varphi} \operatorname{div} J \, d\gamma + \int_{\Gamma} J \cdot \operatorname{grad} \varphi \, d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \bar{\varphi} J \cdot n \, ds ;$$

$$(1.4) \quad \int_{\Gamma} J \cdot \vec{\operatorname{rot}} \varphi \, d\gamma + \int_{\Gamma} \bar{\varphi} \operatorname{rot} J \, d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \bar{\varphi} J \cdot t \, ds ,$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\partial\Gamma$  dans le plan tangent à  $\Gamma$ , et  $t$  la tangente orientée à  $\partial\Gamma$ .

Démonstration : Les égalités (1.3) et (1.4) sont des cas particuliers de la formule générale de Stokes pour des formes différentielles extérieures sur des variétés (Cf Mme LELONG-FERRAND [ 2 ] ) ;

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$$

où  $d\omega$  désigne la différentielle extérieure de la forme  $\omega$ . Nous obtenons (1.3) en choisissant :

$$\omega = \bar{\varphi} \sqrt{g} \, (-J^2 \, d\xi^1 + J^1 \, d\xi^2)$$

$$d\omega = \bar{\varphi} \operatorname{div} J \cdot \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 + J^1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^1} \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 .$$

Il reste à vérifier que les coordonnées co-variantes du vecteur unitaire normal extérieur à  $\Gamma$  dans le plan tangent, sont :

$$n_1 = -\sqrt{g} \frac{d\xi^1}{ds} ; \quad n_2 = \sqrt{g} \frac{d\xi^2}{ds} .$$

Nous obtenons (1.4) en choisissant

$$\omega = \bar{\varphi} (J_1 \, d\xi^1 + J_2 \, d\xi^2) ;$$

$$d\omega = \bar{\varphi} \operatorname{rot} J \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 + J \cdot \vec{\operatorname{rot}} \varphi \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 .$$

Il reste alors à vérifier que le vecteur contra-variant de coordonnées  $\frac{d\xi^1}{ds}$ ,  $\frac{d\xi^2}{ds}$ , est bien le vecteur unitaire tangent à  $\partial\Gamma$ , l'orientation étant fixée par le sens de parcours choisi.

PROPOSITION 1.2 : Soient  $J$  et  $X$ , deux vecteurs tangents à  $\Gamma$ . Nous avons les équivalences

$$(1.5) \quad \operatorname{div} J = 0 \quad \text{et} \quad J \in L^2(\Gamma) \iff J = \operatorname{rot} \varphi + \lambda J_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

avec  $\varphi \in H^1(\Gamma)$  et  $J_0 \in L^2(\Gamma)$ ,  $\operatorname{div} J_0 = 0$  et  $\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds \neq 0$

$$(1.6) \quad \operatorname{rot} X = 0 \quad \text{et} \quad X \in L^2(\Gamma) \iff X = \operatorname{grad} V + \nu X_0, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

avec  $V \in H^1(\Gamma)$  et  $X_0 \in L^2(\Gamma)$ ,  $\operatorname{rot} X_0 = 0$  et  $\int_{\partial\Gamma_1} X_0 \cdot t \, ds = 1$

( $\varphi$  et  $V$  sont uniques à une constante près si  $J_0$  et  $X_0$  sont donnés).

Démonstration : En choisissant  $\lambda = \int_{\partial\Gamma_1} J \cdot n \, ds$ , nous voyons, d'après (1.3), que

$$\int_{\partial\Gamma_1} (J - \lambda J_0) \cdot n \, ds = \int_{\partial\Gamma_2} (J - \lambda J_0) \cdot n \, ds = 0 .$$

L'équivalence (1.5) est alors une conséquence du théorème de De Rham [ ].

L'équivalence (1.6) est analogue.

Remarque 2 : Si nous imposons  $J \cdot n = 0$  sur une portion de frontière  $\partial\Gamma_1$ , par exemple, nous obtenons une proposition analogue en choisissant  $\varphi \in H^1$  et  $\varphi|_{\partial\Gamma_1} = 0$ .

Nous pouvons, maintenant, donner la formulation variationnelle de l'équation (1.2). Soit  $H$  l'espace de Hilbert suivant :

$$H = \left\{ K \in L^2(\Gamma) ; K \text{ tangent à } \Gamma, \operatorname{div} K = 0 \right\} .$$

Le courant  $J$  sera alors solution de (nous notons  $x$  et  $y$  des points courants de  $\Gamma$ )

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } J \in H \text{ tel que} \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} J \cdot K \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J(x) \cdot K(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = - \int_{\partial\Gamma} V_0 n \cdot K \, ds, \forall K \in H. \end{array} \right.$$

La fonction  $V_0$  est le potentiel imposé sur  $\partial\Gamma$ . Si nous choisissons  $J_0$  réel et régulier, avec

$$\operatorname{div} J_0 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds = 1,$$

nous aurons la formulation équivalente (d'après la proposition (1.2)) :

$$(1.8) \quad \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} (\vec{\operatorname{rot}} \varphi + \lambda J_0) \cdot (\vec{\operatorname{rot}} \psi + \nu J_0) \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\vec{\operatorname{rot}} \varphi + \lambda J_0)(x) \cdot (\vec{\operatorname{rot}} \psi + \nu J_0)(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y \\ = - \int_{\partial\Gamma} V_0 n \cdot (\vec{\operatorname{rot}} \psi + \nu J_0) \, ds, \forall \psi \in H^1(\Gamma), \nu \in \mathbb{C}.$$

THEOREME 1.1 : Si  $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$ , le problème (1.7) (et donc le problème (1.8)) admet une solution unique dans  $L^2(\Gamma)$ , et si de plus  $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$ , alors la solution est dans  $H^1(\Gamma)$  (donc  $\varphi$  est dans  $H^2(\Gamma)$  si  $J_0 \in H^1(\Gamma)$ ).

Démonstration : Si nous notons  $a(J, K)$  la forme sesquilinéaire du premier membre de (1.7), nous savons que

$$(1.9) \quad |a(J, K)| \leq M \|J\|_{L^2(\Gamma)} \|K\|_{L^2(\Gamma)};$$

et que, d'autre part,

$$(1.10) \quad \operatorname{Re} a(J, J) = \frac{1}{\sigma} \|J\|_{L^2(\Gamma)}^2;$$

Le théorème de Lax-Milgram, appliqué dans l'espace  $H$ , nous assure donc l'existence et l'unicité de  $J$ . Il suffit de vérifier que le second membre est une forme linéaire continue sur l'espace  $H$ , ce qui est vrai si  $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$  d'après le théorème de trace ( $n \cdot K \in H^{-1/2}(\partial\Gamma)$  si  $K \in H$ ).

Il en résulte, d'après NEDELEC-PLANCHARD [3], que la fonction vectorielle

$$\psi(y) = \int_{\Gamma} \frac{J(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x$$

est dans l'espace  $H^1(\Gamma)$  (c'est encore l'intégrale sur une surface fermée  $\tilde{\Gamma}$  régulière portant  $\Gamma$  du prolongement de  $J$  par zéro à  $\tilde{\Gamma}$ ).

Désignons par  $P \psi(y)$ , la projection du vecteur  $\psi(y)$  sur le plan tangent en  $y$  à la surface  $\Gamma$ . Alors  $P \psi(y)$  est aussi dans  $H^1(\Gamma)$ . Nous vérifions (en utilisant (1.4)) que

$$\frac{1}{\sigma} \Delta \varphi = - \frac{\lambda}{\sigma} \operatorname{rot} J_0 - \frac{i\omega\mu}{c^2} \operatorname{rot} P \cdot \psi;$$

et (en utilisant la formule  $\operatorname{grad} \varphi \cdot n = \operatorname{rot} \varphi \cdot t$ ) que

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial s} - \frac{\lambda}{\sigma} J_0 \cdot t - \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi \cdot t, \text{ sur } \partial\Gamma.$$

Donc, si  $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$ , on voit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi \in L^2(\Gamma) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \in H^{1/2}(\partial\Gamma), \end{array} \right.$$

ce qui entraîne

$$\varphi \in H^2(\Gamma),$$

par un résultat de régularité classique.

Remarque 3 : En ré-utilisant le même argument, on pourrait montrer que  $\psi \in H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma)$  ( $\varepsilon > 0$ ), et en déduire une régularité correspondante pour  $\varphi$  et  $J$ . A cause du terme en  $\psi$ , il semble donc que la régularité maximale de  $J$  est  $H^{3/2-\varepsilon}(\Gamma)$  pour tout  $\varepsilon$  positif.

Remarque 4 : La fonction  $\varphi$  dépend du choix de  $J_0$ , mais est unique pour  $J_0$  fixé.

COROLLAIRE 1.1 : Si  $V_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$ , alors il existe une fonction  $V$  unique dans  $H^2(\Gamma)$ , telle que :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sigma} J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} P_x \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y = -\text{grad } V \\ V|_{\partial\Gamma} = V_0, \end{cases}$$

où  $P_x$  est la projection des vecteurs de  $R^3$  sur le plan tangent à  $\Gamma$ , au point  $x$ .

Démonstration : Soit  $V_0$  une fonction définie sur  $\Gamma$ , dont la trace sur  $\partial\Gamma$  est  $V_0$ . Nous avons, d'après (1.3),

$$\int_{\partial\Gamma} V_0 n \cdot K ds = \int_{\Gamma} \text{grad } V_0 \cdot K d\gamma.$$

Si nous posons

$$P \psi(x) = P_x \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y,$$

nous avons

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot K d\gamma = 0, \quad \forall K \in H.$$

En choisissant  $K = \vec{\text{rot}} \varphi$ , et en utilisant (1.4), nous avons

$$-\int_{\Gamma} \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot \vec{\varphi} d\gamma + \int_{\partial\Gamma} \left( \frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot t \vec{\varphi} ds = 0.$$

Nous choisissons alors, successivement,  $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$ , d'où

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) = 0,$$

puis  $\varphi \in H^1(\Gamma)$ ,

$$\left( \frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot t = 0.$$

D'où, d'après (1.6),

$$\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 = -\text{grad } V - \nu X_0.$$

En choisissant alors  $\varphi$  avec

$$\varphi|_{\partial\Gamma_1} = 1, \quad \varphi|_{\partial\Gamma_2} = 0,$$

nous voyons que  $\nu = 0$ . Nous avons aussi

$$\text{grad } V \cdot t = 0.$$

Nous pouvons donc choisir  $V$  constant sur  $\partial\Gamma_1$  et sur  $\partial\Gamma_2$ . Nous avons

( $V_1$  et  $V_2$  désignent les valeurs constantes de  $V$  sur  $\partial\Gamma_1$  et sur  $\partial\Gamma_2$  respectivement)

$$0 = \int_{\Gamma} \text{grad } V \cdot J_0 ds = \int_{\partial\Gamma} V J_0 \cdot n ds = \int_{\partial\Gamma_1} V_1 J_0 \cdot n ds - \int_{\partial\Gamma_2} V_2 J_0 \cdot n ds = V_1 - V_2.$$

Nous pouvons donc choisir  $V$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . La fonction  $V + V_0$  satisfait alors à (1.11).

## 2 - APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS.

Afin d'approcher la solution du problème (1.7), nous allons introduire, d'abord, une surface  $\Gamma_h$ , puis un espace  $H_h$  de vecteurs définis sur  $\Gamma_h$  qui approchent respectivement  $\Gamma$  et  $H$ .

Pour chaque domaine polyédrique  $D_i$ , nous construisons une triangulation  $T_{hi}$  (par des triangles dont le diamètre maximal est noté  $h$  et vérifiant la classique condition des angles  $\theta \geq \theta_0 > 0$ ,  $\theta_0$  indépendant de  $h$ ). Considérons alors  $\phi_{ih}$ , l'interpolé affine de l'application  $\phi_i$ , définie par

$$\begin{aligned} \phi_{ih}(a) &= \phi_i(a), \text{ pour tout sommet } a \text{ de } T_{hi}; \\ \phi_{ih} &\text{ est affine sur chaque triangle de } T_{hi}. \end{aligned}$$

Nous noterons  $F_T$  la restriction de l'application  $\phi_{ih}$  à un triangle  $T$  de  $T_{hi}$ .

L'image de  $D_i$  par  $\phi_{ih}$  est alors (pour  $h$  assez petit au moins) une surface  $\Gamma_{ih}$  continue, formée de triangles plats, dont les sommets sont les points  $\phi_i(a)$ ,  $a \in S_i$ .

Nous supposons les triangulations  $T_{hi}$  compatibles entre elles : les sommets des triangulations  $\Gamma_{ih}$  et  $\Gamma_{jh}$  ( $i \neq j$ ), situés sur les courbes  $\phi_i(D_i) \cap \phi_j(D_j)$  sont communs. Alors, l'union des  $\Gamma_{ih}$  forme une surface  $\Gamma_h$  qui est homéomorphe à  $\Gamma$ , dont les cartes sont les applications  $\phi_{ih}$ , qui sont bijectives pour  $h$  assez petit.

Les courants approchés seront des vecteurs complexes constants sur chaque triangle de  $\Gamma_h$ , vérifiant, de plus, la condition d'égalité du flux sur un côté commun à deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  (normales  $n_1$  et  $n_2$  à ce côté dans  $T_1$  et  $T_2$ , respectivement)

$$(2.1) \quad J_1 \cdot n_1 + J_2 \cdot n_2 = 0.$$

Nous désignerons par  $H$  cet espace vectoriel.

Le problème approché est alors :

$$(2.2) \quad \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot K_h \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot K_h(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = - \int_{\partial\Gamma_h} v_{0h} n \cdot K_h \, d\gamma, \quad \forall K_h \in H_h.$$

Soit  $J_{0h}$  dans l'espace  $H_h$  tel que

$$\int_{\partial\Gamma_{h1}} J_{0h} \cdot n \, ds = 1.$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 2.1 :

$$J_h \in H_h \iff J_h = \lambda J_{0h} + \text{rot } \varphi_h$$

$$\varphi_h \in \phi_h$$

$$\phi_h = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Gamma_h), \varphi_h|_T \in P_1; \forall T \subset \Gamma_h \right\}.$$

Démonstration : Choisissons  $\lambda$  tel que

$$(2.3) \quad \int_{\partial\Gamma_{h1}} (J_h \cdot n - \lambda J_{0h} \cdot n) \, ds = \int_{\partial\Gamma_{h2}} (J_h - \lambda J_{0h}) \cdot n \, ds = 0.$$

Alors, sur chaque facette  $T$  de  $\Gamma_h$ ,  $\varphi_h$  est défini à une constante près (dans les coordonnées locales de cette facette,  $J_h$  est à divergence nulle puisque constant). La condition de raccord (2.1) de  $J_h$  sur le côté commun à deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  montre alors que l'on peut choisir, pour  $\varphi_{h1}$  et  $\varphi_{h2}$ , des valeurs communes sur ce côté. On peut alors construire  $\varphi_h$  de proche en proche, et la condition (2.3) montre que cette construction conduit à une fonction  $\varphi_h$  globalement continue.

Réciproquement, la continuité de  $\varphi_h$  entraîne (2.1). ■

Nous avons, d'après la proposition 2.1, une formulation équivalente du problème (2.2), qui est

$$(2.4) \quad \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} (\text{rot } \varphi_h + \lambda J_{0h}) \cdot (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h}) d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{(\text{rot } \varphi_h + \lambda J_{0h})(x) \cdot (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h})(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y$$

$$= - \int_{\partial\Gamma_h} V_{0h} \cdot n \cdot (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h}) ds, \quad \forall \nu \in \mathbb{C}, \quad \varphi_h \in \psi_h.$$

Afin d'étudier l'erreur d'approximation, nous allons comparer, au vecteur  $J$ , un vecteur  $\tilde{J}_h$  lié à  $J_h$  de la façon suivante : un vecteur  $J_h$  de l'espace  $H_h$  sera réperé par ses coordonnées contra-variantes dans le système d'axes mobiles associés aux différentes cartes  $\phi_{hi}$ . Nous pouvons alors associer, au champ de vecteurs  $J_h|_{\Gamma_{hi}}$ , le champ de vecteurs  $\hat{J}_{hi}$  défini sur  $D_i$  de coordonnées co-variantes ( $\sqrt{g_h}$  est l'élément d'aire sur  $\Gamma_h$ ) :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \hat{J}_{hi1}|_T &= J_h^1 \sqrt{g_h} \\ \hat{J}_{hi2}|_T &= J_h^2 \sqrt{g_h}. \end{aligned}$$

Alors, la propriété (2.1) nous permet de vérifier que  $\hat{J}_{hi}$  est un champ de vecteurs à divergence nulle dans  $L^2(D_i)$ . (Si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux triangles adjacents de  $D_i$ , et  $\vec{n}$  la normale au côté commun, on a encore

$$(\hat{J}_h|_{T_1} - \hat{J}_h|_{T_2}) \cdot n = 0).$$

Enfin, nous définissons le champ de vecteurs  $\tilde{J}_h$  sur  $\Gamma$  comme le champ de vecteurs dont les coordonnées contra-variantes, dans les axes associés à la carte  $\phi_i$ , sont :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_h^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{J}_{h1} \\ \tilde{J}_h^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{J}_{h2}. \end{aligned}$$

Nous vérifions alors que  $\tilde{J}_h$  est un champ de vecteurs à divergence nulle. Nous avons le lemme suivant ;

LEMME 2.1 : Soit  $a$  la forme sesquilinéaire du premier membre de (1.7) et  $a_h$  la forme sesquilinéaire du premier membre de (2.1), nous avons

$$|a_h(J_h, K_h) - a(\tilde{J}_h, \tilde{K}_h)| \leq c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)}.$$

Démonstration :

$$a_h(J_h, K_h) = \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot K_h d\gamma_h + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot K_h(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y.$$

Nous transformons les intégrales sur  $\Gamma_h$  en intégrales sur  $\Gamma$ , en utilisant les applications  $\phi_i \circ \phi_{hi}^{-1}$ . D'où

$$a_h(J_h, K_h) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} J_h(x_h) \cdot K_h(x_h) \sqrt{\frac{g_h}{g}} d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J_h(x_h) \cdot K_h(y_h)}{|x_h - y_h|} \sqrt{\frac{g_h(x_h) g_h(y_h)}{g(x) g(y)}} d\gamma_x d\gamma_y$$

avec

$$x = \phi_i \circ \phi_{hi}^{-1}(x_h), \quad \text{si } x \in \Gamma_i$$

$$y = \phi_j \circ \phi_{hj}^{-1}(y_h), \quad \text{si } y \in \Gamma_j.$$

Comparons, maintenant,  $J_h(x_h)$  et  $\tilde{J}_h(x)$  :

$$J_h(x_h) = J_h^1 \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^1} + J_h^2 \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^2}$$

$$\tilde{J}_h(x) = \sqrt{\frac{g_h(x_h)}{g(x)}} \left( J_h^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^1} + J_h^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^2} \right).$$

Mais nous savons que

$$\left| \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^1} \right| \leq c h \max_{x \in D_i} |D^2 \phi_i(\xi)|,$$

d'où nous déduisons

$$\left| \sqrt{\frac{g_h(x_h)}{g(x)}} - 1 \right| \leq c h .$$

D'où  $(x = \phi_i \circ \phi_{hi}^{-1}(x_h))$

$$|J_h(x_h) - \tilde{J}_h(x)| \leq c h |\tilde{J}_h| .$$

Nous en déduisons

$$(2.8) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} J_h(x_h) \cdot K_h(x_h) \sqrt{\frac{g_h}{g}} d\gamma - \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} \tilde{J}_h(x) \cdot \tilde{K}_h(x) d\gamma \right| \leq c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

Comparons, maintenant, le second terme de  $a_h$  au second membre de  $a$ .

Il apparaît une erreur supplémentaire, due au terme

$$(2.9) \quad \left| \frac{1}{|x_h - y_h|} - \frac{1}{|x - y|} \right| = \frac{|x - y| - |x_h - y_h|}{|x_h - y_h| |x - y|} \leq \frac{|x - y - x_h + y_h|}{|x_h - y_h| |x - y|} .$$

Nous considérons alors deux cas :

- ou bien

$$|x - y| \geq c h ,$$

et alors

$$|x - x_h| \leq c h^2 \quad (\text{car } |\phi_i - \phi_{hi}| \leq c h^2) ,$$

et nous majorons (2.9) par  $\frac{c h}{|x - y|}$  ;

- ou bien

$$|x - y| \leq c h ,$$

et alors nous pouvons considérer que, dans un voisinage de  $\xi = \phi_i^{-1}(x)$ ,

$\phi_i(\xi) - \phi_{ih}(\xi)$  est une fonction lipschitzienne à dérivée bornée par  $c h$ .

D'où

$$|x - x_h - (y - y_h)| \leq c h |x - y| \quad (\Rightarrow |x - y| \leq c |x_h - y_h|) .$$

D'où, dans les deux cas,

$$\left| \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x_h - y_h|} \right| \leq \frac{c h}{|x - y|} .$$

Nous en déduisons une majoration :

$$\left| \iint_{\Gamma_h} \frac{J_h(x_h) \cdot K_h(y_h)}{|x_h - y_h|} d\gamma_x d\gamma_y - \iint_{\Gamma} \frac{\tilde{J}_h(x) \cdot \tilde{K}_h(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y \right| \leq c h \iint_{\Gamma} \frac{|\tilde{J}_h(x)| |\tilde{K}_h(y)|}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y .$$

En utilisant, alors, NEDELEC-PLANCHARD [3], nous savons que le second membre est majoré par

$$c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

Utilisant cette majoration et (2.8), nous en déduisons (2.7).

THEOREME 2.1 : Nous supposons connus  $J_0 \in H^1(\Gamma)$  et  $J_{0h} \in H_h$  tel que

$$(2.10) \quad |J_0 - \tilde{J}_{0h}|_{L^2(\Gamma)} \leq c h ;$$

alors, nous avons la majoration d'erreur

$$(2.11) \quad |J - \tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c \left[ h |J|_{H^1(\Gamma)} + |v_0 - \tilde{v}_{0h}|_{H^{1/2}(\partial\Gamma)} \right]$$

où  $\tilde{v}_{0h}(x) = v_{0h}(x_h)$  ,  $\phi_i^{-1}(x) = \phi_{ih}^{-1}(x_h)$ .

Démonstration : Soit  $J_0$  dans  $H^1(\Gamma)$ , choisi tel que

$$\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds = 1 .$$

Nous supposons connu  $J_{0h}$  dans  $H_h$  tel que

$$|J_0 - \tilde{J}_{0h}|_{L^2(\Gamma)} \leq c h .$$

Alors, d'après la proposition 1.2, pour  $J \in H^1(\Gamma)$ , il existe  $\varphi \in H^2(\Gamma)$ , tel que

$$J = \lambda J_0 + \vec{\text{rot}} \varphi.$$

Nous pouvons définir, sur  $\Gamma_h$ , l'interpolé  $\varphi_h$  de  $\varphi$ , tel que

$$\begin{aligned} \varphi_h(a) &= \varphi(a), \text{ pour tout sommet d'un triangle de } \Gamma_h; \\ \varphi_h &\text{ affine sur chaque triangle de } \Gamma_h. \end{aligned}$$

Nous notons  $\pi_h J$  l'interpolé de  $J$  défini sur  $\Gamma_h$  par

$$\pi_h J = \lambda J_{0h} + \vec{\text{rot}} \varphi_h.$$

Considérons, maintenant, la quantité

$$a(J_h - \tilde{\pi}_h J, J_h - \tilde{\pi}_h J).$$

$$a(J_h - \tilde{\pi}_h J, J_h - \tilde{\pi}_h J) = -a(J, J_h - \tilde{\pi}_h J) + a(J - \tilde{\pi}_h J, J_h - \tilde{\pi}_h J) + a(J_h, J_h - \tilde{\pi}_h J) - a(J_h, J_h - \tilde{\pi}_h J) + a(J_h, J_h - \tilde{\pi}_h J)$$

D'où, d'après (1.10) et (2.7),

$$|J_h - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} \leq c \left[ |J - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} |J_h - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} + h |J_h|_{L^2(\Gamma)} |J_h - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} + a_h(J_h, J_h - \tilde{\pi}_h J) - a(J, J_h - \tilde{\pi}_h J) \right]$$

Nous en déduisons

$$|J - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} \leq c \left[ |J - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} + h |J_h|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{K_h \in H_h} \frac{|a_h(J_h, K_h) - a(J, K_h)|}{|K_h|_{L^2(\Gamma)}} \right].$$

Evaluons, successivement, les trois termes du second membre. L'erreur d'interpolation, d'abord ;

LEMME 2.2 : Soit  $J \in H^1(\Gamma)$ , nous avons .

$$(2.13) \quad |J - \tilde{\pi}_h J|_{L^2(\Gamma)} \leq c h |J|_{H^1(\Gamma)}.$$

Démonstration : Il nous faut évaluer

$$\vec{\text{rot}} \varphi - \vec{\text{rot}} \tilde{\varphi}_h.$$

Mais, on vérifie, en utilisant les définitions de  $\vec{\text{rot}}$  et de l'opération  $\sim$ , que

$$\vec{\text{rot}} \tilde{\varphi}_h = \vec{\text{rot}} \tilde{\varphi}_h; \quad \tilde{\varphi}_h(x) = \varphi_h(x_h); \quad x = \phi_i \circ \phi_{ih}^{-1}(x_h).$$

Soit, maintenant,  $\hat{\varphi}|_T = \varphi \circ \phi_i^{-1}$  :

$$\hat{\varphi}_h|_T = \varphi_h \circ F_T^{-1};$$

alors, par construction de la triangulation et de  $\varphi_h$ , nous savons que  $\hat{\varphi}_h$  est l'interpolé affine de  $\hat{\varphi}$  sur  $T$ . Donc, d'après le classique lemme de Bramble-Hilbert, nous avons

$$|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_h|_{H^1(T)} \leq c h |\hat{\varphi}|_{H^2(T)}.$$

Par retour à  $\Gamma$ , nous en déduisons

$$|\varphi - \tilde{\varphi}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq c h |\varphi|_{H^2(\Gamma)}.$$

D'où, en particulier,

$$|\vec{\text{rot}} \varphi - \vec{\text{rot}} \tilde{\varphi}_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c h |\varphi|_{H^2(\Gamma)}.$$

D'où le lemme, en utilisant (2.11) et la proposition 1.2. ■

Considérons, maintenant, le second terme de (2.12). Pour montrer que  $|J_h|_{L^2(\Gamma)}$  est borné, il suffit de montrer que  $|J_h|_{L^2(\Gamma_h)}$  est borné. Mais, nous avons

$$R e \ a_h(J_h, J_h) = \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_h} |J_h(x)|^2 dx = \int_{\partial \Gamma_h} v_{0h} n_h \cdot J_h ds_h.$$

Nous vérifions que, dans le changement de variable,

$$x = \phi_i \circ \phi_{ih}^{-1}(x_h) ;$$

$$n_h \cdot J_h \, ds_h = n \cdot \tilde{J}_h \, ds ;$$

et donc

$$\int_{\partial\Gamma_h} v_{0h} \, n_h \cdot J_h \, ds_h = \int_{\partial\Gamma} \tilde{v}_{0h} \, n \cdot \tilde{J}_h \, ds ,$$

avec

$$\tilde{v}_{0h} = v_{0h} \circ \phi_{ih} \circ \phi_i^{-1}.$$

D'où (nous utilisons la continuité dans  $H^{-1/2}(\partial\Gamma)$  de la trace  $n \cdot \tilde{J}_h$ )

$$|J_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c \, |v_{0h}|_{H^{-1/2}(\partial\Gamma)} .$$

Il nous reste à évaluer le dernier terme de l'erreur dans (2.12) ;

soit

$$a_h(J_h, K_h) - a(J, K_h) = \int_{\partial\Gamma} (\tilde{v}_{0h} - v_0) \, n \cdot K_h \, ds .$$

D'où, en utilisant à nouveau la continuité de l'application trace,

$$|a_h(J_h, K_h) - a(J, K_h)| \leq c \, |\tilde{v}_{0h} - v_0|_{H^{-1/2}(\partial\Gamma)} \, |K_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

L'inégalité (2.11) est alors une conséquence de (2.12) et des majorations ci-dessus.

Remarque 5 : Le choix de  $J_{0h}$  peut, éventuellement, se faire de la façon suivante. Soit une coupure de  $\Gamma$ , c'est-à-dire une courbe  $S$  qui joint  $\partial\Gamma_1$  à  $\partial\Gamma_2$ . Soit  $\Gamma'$  la surface coupée ainsi construite. Alors, il existe  $\varphi_0 \in H^2(\Gamma')$  telle que

$$J_0 = \text{rot } \varphi_0 , \quad \varphi_0^+ - \varphi_0^- = \text{constante le long de } S ,$$

où  $\varphi_0^+$  (resp.  $\varphi_0^-$ ) désigne la valeur de  $\varphi_0$  d'un côté de  $S$ .

A cette coupure de  $\Gamma$  correspond une coupure de  $\Gamma_h$ , si les sommets de la triangulation sont bien choisis.

L'interpolé affine  $\varphi_{0h}$  de  $\varphi_0$  sur  $\Gamma'_h$  vérifie

$$\varphi_{0h}^+ - \varphi_{0h}^- = \text{constante}.$$

Et alors

$$J_{0h} = \text{rot } \varphi_{0h}$$

vérifie l'inégalité (2.10) et appartient à l'espace  $H_h$ . ■

Nous allons indiquer, maintenant, une méthode pour calculer une valeur approchée du potentiel scalaire  $V$  sur la surface  $\Gamma$ . Remarquons d'abord que nous avons

$$(2.14) \quad \int_{\Gamma} \text{grad } V \cdot \text{grad } V' \, d\gamma = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J(y) \cdot \text{grad } V'(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y , \quad \forall V' \in H_0^1(\Gamma) \quad (\text{et aussi } V|_{\partial\Gamma} = v_0)$$

Nous considérons l'espace de fonctions approchées suivant

$$\Phi_h^0 = \left\{ v_h \in C^0(\Gamma_h) ; v_h|_T \in P_1 ; \forall T \subset \Gamma_h , v_h|_{\partial\Gamma_h} = 0 \right\} .$$

Nous définissons  $V_h$  comme solution de

$$(2.15) \quad \int_{\Gamma_h} \text{grad } V_h \cdot \text{grad } V'_h \, d\gamma = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(y) \cdot \text{grad } V'_h(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y ,$$

$$\forall V'_h \in H_0^1(\Gamma) , \quad V_h \in \Phi_h , \quad V_h|_{\partial\Gamma_h} = v_{0h}$$

Il est facile de voir que  $V_h$  est ainsi défini de façon unique.

Le théorème suivant donne l'erreur entre  $V$  et  $\tilde{V}_h$  défini par

$$\tilde{V}_h(x) = v_h \circ \phi_{ih}^{-1} \circ \phi_i(x) , \quad \forall x \in \phi_i(D_i) .$$

THEOREME 2.2 : Sous les hypothèses du théorème 2.1, et si nous supposons de plus que  $V_{0h}$  est l'interpolé affine sur  $\partial\Gamma_h$  de  $V_0$ , nous avons l'estimation suivante :

$$(2.16) \quad |V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq C h$$

où  $V$  est la solution de (2.14) et  $V_h$  la solution de (2.15).

Démonstration : Soit la forme bilinéaire

$$a(V, V') = \int_{\Gamma} \text{grad } V \cdot \text{grad } V' \, d\gamma$$

et

$$a_h(V_h, V'_h) = \int_{\Gamma_h} \text{grad } V_h \cdot \text{grad } V'_h \, d\gamma_h.$$

Nous avons donc, de façon analogue à (2.7),

$$(2.17) \quad |a(V_h, \tilde{V}'_h) - a_h(V_h, V'_h)| \leq C h |\text{grad } \tilde{V}_h|_{L^2(\Gamma)} |\text{grad } \tilde{V}'_h|_{L^2(\Gamma)}$$

Soit  $\pi V$  l'interpolé affine de  $V$  défini sur  $\Gamma_h$ . Nous remarquons que  $V_{0h}$  étant l'interpolé affine de  $V_0$  sur  $\partial\Gamma$ ,

$$\pi V|_{\partial\Gamma_h} = V_{0h},$$

et donc

$$\pi V - V_h \in H_0^1(\Gamma_h).$$

Majorons, maintenant, successivement les termes :

$$|V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq |V - \pi V|_{H^1(\Gamma)} + |\pi V - \tilde{V}_h|_{H_0^1(\Gamma)}$$

et

$$|\pi V - \tilde{V}_h|_{H_0^1(\Gamma)}^2 \leq C |\text{grad } (\pi V - \tilde{V}_h)|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C |a(\pi V - \tilde{V}_h, \pi V - \tilde{V}_h)|$$

$$a(\pi V - \tilde{V}_h, \pi V - \tilde{V}_h) = a(\pi V - V, \pi V - \tilde{V}_h) + a(V, \pi V - \tilde{V}_h) - a(V_h, \pi V - \tilde{V}_h),$$

d'où en regroupant les majorations et en utilisant (2.17)

$$|V - \tilde{V}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq \left[ C |V - \pi V|_{H^1(\Gamma)} + C h |\text{grad } \tilde{V}_h|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{V'_h \in \Phi_h} \frac{a(V, \tilde{V}'_h) - a_h(V_h, V'_h)}{|\text{grad } \tilde{V}'_h|_{L^2(\Gamma)}} \right]$$

$$a(V, \tilde{V}'_h) - a_h(V_h, V'_h) = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \left[ \iint_{\Gamma} \frac{J(y) \cdot \text{grad } \tilde{V}'_h(x)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y - \iint_{\Gamma_h} \frac{J_h(y) \cdot \text{grad } V'_h(x)}{|x_h - y_h|} d\gamma_x d\gamma_y \right]$$

Si nous transformons alors les intégrales sur  $\Gamma_h$  en intégrales sur  $\Gamma$ , il apparaît trois termes d'erreur, l'un que l'on majorera par

$$C |J - \tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\text{grad } \tilde{V}'_h|_{L^2(\Gamma)},$$

les deux autres, provenant de la géométrie, que l'on majorera par

$$C h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant, alors, le théorème 2.1, nous obtenons (2.16).

## CONCLUSIONS

Nous allons donner quelques indications sur la mise en oeuvre de la méthode pour laquelle nous renvoyons à NEDELEC-VERITE [1].

La formulation qui apparait la plus commode est la formulation (2.4), car les fonctions de base en  $\varphi_h$  sont connues et à support "local". Dans la pratique, le choix de la fonction de base  $J_{0h}$  est facile. Il faut aussi faire attention au fait qu'il faut supprimer l'une des fonctions de base qui engendrent l'espace  $\Phi_h$ , car  $\varphi_h$  est défini à une constante près. (Ceci revient à fixer la valeur de  $\varphi_h$  en un noeud).

Le calcul des coefficients du système provenant de la partie

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot J'_h \, d\gamma$$

est analogue à un assemblage pour un opérateur elliptique et nous donne la partie réelle de la matrice. Le calcul des coefficients de la partie imaginaire de la matrice

$$\frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot J'_h(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y$$

se fait en utilisant la primitive explicite de

$$\int_T \frac{d\gamma_x}{|x-y|}$$

puis ensuite par une formule d'intégration numérique. Nous renvoyons à NEDELEC [4], et à DJAOUA [5], pour des précisions sur ces calculs de coefficients.

L'introduction des éléments finis à divergence nulle utilisés ici, est due à RAVIART-THOMAS [6]. Il est possible d'utiliser des éléments finis du même type et d'ordre plus élevé. L'étude d'erreur est analogue. Mais alors, il faut aussi augmenter le degré d'approximation de la surface  $\Gamma$  et

les calculs des coefficients provenant de la partie intégrale singulière de l'opérateur sont très compliqués. D'autre part, la solution étant peu régulière, au moins au voisinage du bord  $\partial\Gamma$ , le gain de précision réel serait faible.

Par ailleurs, nous renvoyons au petit ouvrage de R.L. STOLL [7] pour une étude assez complète des équations et des propriétés des courants de Foucault.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. NEDELEC, J.C. VERITE, à paraître.
- [2] Mme LELONG-FERRAND, Géométrie Différentielle, Masson, Paris, 1963.
- [3] J.C. NEDELEC, J. PLANCHARD, Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans  $R^3$ , R.A.I.R.O., 7 (1973), R3, 105-129.
- [4] J.C. NEDELEC, Curved finite elements method for the solution of singular integral equations on surfaces in  $R^3$ , à paraître.
- [5] M. DJAOUA, Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées N° 3 (1975), Ecole Polytechnique, 91120 PALAISEAU.
- [6] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems.
- [7] R.L. STOLL, The analysis of Eddy currents, Clarendon Press, Oxford, 1974.