

GABRIEL PICAUVET

Idéaux premiers de Goldman

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 11, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__4_A7_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IDEAUX PREMIERS DE GOLDMAN

Gabriel Picavet

Le texte qui suit est un résumé de deux articles $[P_1]$ et $[P_2]$. Toutefois , on trouvera quelques résultats qui ne figuraient pas dans les articles précités , ainsi qu'une bibliographie complétée . Les notations ou notions , non précisées sont celles de $[B]$ et $[Gr]$

I Introduction et rappel de résultats

La situation suivante se présente souvent en algèbre commutative : A est un anneau intègre dont le corps des quotients K est de type fini sur A (au sens des algèbres) . On dit dans ce cas que A est un anneau de Goldman , ou encore , que c'est un G-anneau . Il est bien connu que l'on a la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit A un anneau intègre , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est un G-anneau
- b) (0) est un point isolé de $\text{Spec}(A)$
- c) l'intersection des idéaux premiers , non nuls , de A est différente de (0)
De plus , [Artin - Tate] , si A est noethérien , les conditions précédentes sont équivalentes à
- d) A est un anneau semi-local , de dimension inférieure ou égale à 1

On pourra consulter $[Gi]$, $[Gu]$, $[K]$, pour les démonstrations .

Par contre , dans le cas où A n'est pas noethérien , une caractérisation des G-anneaux reste à trouver , même si l'on suppose que $\text{Spec}(A)$ est un espace noethérien $[F - M]$.

On peut , tout au plus , signaler l'article de $[H]$, dont le résultat principal semble être :

Proposition 2 : Soit D un anneau intègre , de Prüfer , complètement intégralement clos , de caractère fini . Alors D est un G-anneau si et seulement si D a la propriété (T) de Gilmer et contient un idéal premier de hauteur 1 . Dans ce cas D est de dimension 1 et semi-local

Définition : Soit A un anneau , on dit que P élément de $\text{Spec}(A)$ est un G-idéal (ou idéal premier de Goldman) si A/P est un G-anneau . L'ensemble des G-idéaux est désigné par $\text{Gold}(A)$.

Le résultat suivant est aussi bien connu :

Proposition 3 : Soit A un anneau , alors $P \in \text{Gold}(A)$ si et seulement si il existe un idéal maximal de $A[X]$, au dessus de P .

On voit donc que $\text{Max}(A)$ est contenu dans $\text{Gold}(A)$. L'égalité caractérise les anneaux de Jacobson . Cette remarque est à l'origine d'une démonstration rapide par Krull et Goldman du théorème des zéros de Hilbert .

Lorsque A est un G-anneau noethérien , on voit que que l'on a $\text{Spec}(A) = \text{Gold}(A)$, en vertu de la remarque précédente . Ceci motive la définition :

Définition : Soit A un anneau , on dira que A est un G'-anneau si $\text{Spec}(A) = \text{Gold}(A)$

Bien entendu , si A est un G'-anneau intègre , alors A est un G-anneau . Je ne sais pas si la réciproque est vraie . Il suffirait de montrer que $\text{Gold}(A)$ est stable par spécialisation: c'est vrai pour les G-anneaux connus .

II - Quelques caractérisations des G'-anneaux

Notons le lemme suivant :

Lemme 1 : $[P_2]$. Soit P un idéal premier d'un anneau A , chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que P soit un G-idéal :

- a) $\{P\}$ est une partie localement fermée de $\text{Spec}(A)$.
- b) $V(P) - \{P\}$ est une partie fermée de $\text{Spec}(A)$.
- c) $V(P) - \{P\}$ est une partie proconstructible .
- d) P n'est pas l'intersection des idéaux premiers de A , strictement plus grands que lui .

A l'aide de ce résultat , on obtient des exemples de G'-anneaux :

- 1) Un anneau plat est un G'-anneau . En effet , tout point de son spectre est fermé.
- 2) Les anneaux A , satisfaisant pour tout $P \in \text{Spec}(A)$, le générisé de P , soit $g(P) = \text{Spec}(A_P)$, est ouvert. La relation $\{P\} = V(P) \cap g(P)$ montre que dans ce cas tout P est localement fermé .

Comme exemples plus concrets de ce type on a :

- a) Les localisés $\mathbb{Z}_{(p)}$ de $\mathbb{Z}$ en un idéal premier $(p) \neq (0)$.
- b) Un anneau de valuation dont le spectre est constitué par une chaîne dénombrable d'idéaux premiers $(0) \subset P_1 \subset \dots \subset P_n \subset \dots \subset M$, où M est l'idéal maximal et chaque P_{i+1} est successeur immédiat de P_i .

Ce dernier exemple montre qu'un G'-anneau n'est pas forcément de dimension finie .

Les anneaux , dont le générisé de tout point est ouvert , ont des caractérisations topologiques et algébriques agréables : voir $[P_2]$. D'autre part de tels anneaux ont été considérés dans un cas particulier dans $[Pa]$: on y étudie des anneaux A , intègres , tels que pour toute extension $A \rightarrow R$, où R est un anneau intègre on ait $\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Spec}(A)$ ouverte .

Puisque les G'-anneaux représentent une généralisation des anneaux plats , on peut se demander si les G'-anneaux ne sont pas caractérisables par une propriété du premier ordre , du type $\forall a \in A \exists x \in A$ tel que $a^2 x = a$, comme c'est le cas pour les anneaux plats .

Il n'en est rien : soit $A = \mathbb{Z}_{(p)}$, comme dans l'exemple a) considérons un ultrafiltre U sur $\mathbb{N}$, non trivial, et l'ultra-produit $A^{\mathbb{N}}/U = B$; alors B est un anneau intègre pour lequel (0) n'est pas un G -idéal. Voir $[P_2]$ pour la preuve.

Proposition 2 : Soit A un anneau et X une partie de $\text{Spec}(A)$. Si X est rétrocompacte et satisfait $\int \text{Gold}(A) \subset X$, alors X est proconstructible.

Proposition 3 : Soit A un anneau et X une partie de $\text{Spec}(A)$, stable par spécialisation. Si toute partie de X qui est rétrocompacte est aussi proconstructible alors X est contenue dans $\text{Gold}(A)$.

Ces deux propositions sont démontrées dans $[P_2]$ et donnent la proposition :

Proposition 4 : Un anneau A est un G' -anneau si et seulement si toute partie rétrocompacte de $\text{Spec}(A)$ est proconstructible.

Une connaissance plus explicite des parties rétrocompactes d'un spectre d'anneau donnerait une caractérisation plus agréable. Toutefois on a :

Corollaire : $[P_2]$ Soit A un anneau dont le spectre est noethérien. Alors A est un G' -anneau si et seulement si $\text{Spec}(A)$ est un ensemble fini.

Signalons le résultat de $[F - M]$:

Proposition 5 : Soit A un anneau, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que A soit un G' -anneau et elles sont équivalentes :

- a) $\text{Gold}(A)$ est ouvert
- b) $\text{Gold}(A)$ est fermé
- c) $\text{Gold}(A)$ est localement fermé

La démonstration résulte immédiatement des faits suivants (cf. $[P_2]$) :

le généré de $\text{Gold}(A)$ est $\text{Spec}(A)$, $\text{Gold}(A)$ est très dense dans $\text{Spec}(A)$.

Proposition 6 : $[P_2]$ Un anneau de valuation est un G' -anneau si tout idéal premier non maximal, a un successeur immédiat et réciproquement.

Signalons , pour terminer ce paragraphe , qu'un G'-anneau possède la condition de chaîne descendante sur ses idéaux premiers . Un G'-anneau possède t-il une caractérisation dans cet ordre d'idées ?

III - La G-topologie sur Spec(A)

Une façon d'exprimer qu'un idéal premier P d'un anneau A est un G-idéal est la suivante : si P est une intersection d'idéaux premiers Q_i de A , alors P est égal à l'un des Q_i . On peut étudier de manière systématique cette propriété :

Définition : Soit A un anneau et soit P un idéal premier de A . On dit que P est G-adhérent à une partie X de $\text{Spec}(A)$ si P est une intersection d'éléments de X . On désigne par X^G l'ensemble des éléments de $\text{Spec}(A)$ qui sont G-adhérents à X .

On vérifie facilement les faits suivants :

- $P \in X^G$ équivaut à $P \in \overline{X \cap V(P)}$
- l'opération $X \longrightarrow X^G$ est une fermeture topologique qui permet donc de définir sur $\text{Spec}(A)$ une topologie : la G-topologie .

Proposition 1 : Soit A un anneau et soit X une partie de $\text{Spec}(A)$:

- a) On a la suite d'inclusions $X \subset X^G \subset X^C \subset \bar{X}$, où X^C est l'adhérence constructible de X (Cf. $[P_2]$) . En particulier , la G-topologie, étant plus fine que la constructible , est donc séparée .
- b) X est très dense dans X^G
- c) X est G-fermée si et seulement si le sous espace X est sobre . Autrement dit X^G est le sous espace sobre associé à X (cf. $[Gr]$)
- d) Si X est rétrocompacte , on a $X^G = X^C$. En particulier X est proconstructible si et seulement si X est rétrocompacte et G-fermée .

Preuve : Pour a) et c) voir $[P_2]$.

b) Soit $O \cap F$ une partie localement fermée de $\text{Spec}(A)$ et supposons que $X \cap O \cap F = \emptyset$. Puisque F est fermé , on a $F = \bigcup_{Q \in F} V(Q)$. On en déduit

que pour tout élément Q de F on a : $X \cap O \cap V(Q) = \emptyset$. Donc , ou bien Q appartient à l'ouvert O , et alors $Q \in X^G$, ou bien $Q \notin O$. Il en résulte que

$F \cap 0 \cap X^G = \emptyset$. Ainsi X est très dense dans X^G .

d) Supposons X rétrocompacte et soit P un élément de X^G . Alors , quel que soit I idéal de type fini , contenu dans P , et quel que soit $f \in A - P$, on a $X \cap D(f)$ non inclus dans $D(I)$. Puisque $X \cap D(f)$ est quasi-compact , on voit que $X \cap D(f) \cap V(P)$ n'est pas vide pour tout $f \in A - P$. Il en résulte que P appartient à X^G .

Remarque : Une base d'ouverts pour la G -topologie est constituée par les parties localement fermées de $\text{Spec}(A)$. De façon plus précise , un système fondamental de G -voisinages de $P \in \text{Spec}(A)$ est constitué par les ensembles $V(P) \cap D(f)$ où f varie dans $A - P$. Ainsi un G -idéal n'est pas autre chose qu'un point G -isolé de $\text{Spec}(A)$. En fait le système fondamental de voisinages de P pour la G -topologie, ci-dessus, est formé d'ensembles à la fois G -ouverts et G -fermés : la G -topologie est donc une topologie d'espace éparpillé . L'ensemble $\left\{ V(P) \cap D(f) \right\}_{\substack{P \in \text{Spec}(A) \\ f \in A}}$ est une

m -sous-base , ce qui dans la terminologie de $[Ho]$, signifie que toute partie de la sous-base , ayant la propriété d'intersection finie , a une intersection non vide . En effet , les éléments de la sous-base sont des parties proconstructibles . Il résulte de $[Ho]$ que $\text{Spec}(A)$ muni de la G -topologie est un espace min-spectral , c'est à dire, est homéomorphe au spectre minimal d'un anneau .

Proposition 2 : Soit A un anneau , chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que A soit un G' -anneau :

- a) $\text{Gold}(A)$ est l'image d'un spectre d'anneau .
- b) $\text{Spec}(A)$ n'a pas de partie propre qui soit très dense .

La démonstration se trouve dans $[P_2]$, ainsi que d'autres propriétés de la G -topologie et ses applications .

Soit $f : A \longrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux , on dit , suivant $[Gu]$, que f est un G -morphisme si ${}^a f(\text{Gold}(A')) \subset \text{Gold}(A)$.

Or ${}^a f$ est toujours G -continue , puisqu'un G -idéal n'est autre qu'un point G -isolé on voit que lorsque ${}^a f$ est G -ouverte , f est un G -morphisme .

Dans les deux cas de G-morphisme cités dans [Gu] , à savoir f est entière ou f de type fini , il se trouve que ${}^A f$ est G-ouverte . Lorsque f est de type fini cela résulte d'un lemme de [I] page 90 qui dit : pour tout $P' \in \text{Spec}(A')$ et tout $a' \in A'$, notant $P = {}^A f(P')$, il existe $a \in A$, tel que $V(P) \cap D(a) \subset {}^A f(V(P') \cap D(a'))$.

On peut démontrer la même chose pour un morphisme entier (cfr [P₂])

D'autre part , dans les deux cas suivants ${}^A f$ est G-ouverte :

- a) ${}^A f$ est ouverte et injective
- b) ${}^A f$ est fermée et pour tout $P \in \text{Spec}(A)$ la fibre ${}^A f^{-1}(P)$ a ses éléments incomparables .

La démonstration, [P₂] , se fait en utilisant la caractérisation d'une application continue ouverte : pour toute partie Z de $\text{Spec}(A)$ on a ${}^A f^{-1}(Z^G) = ({}^A f^{-1}(Z))^G$.

Ainsi ${}^A f$ est G-ouverte si et seulement si pour toute partie Z de $\text{Spec}(A)$ et tout idéal premier P' de A' tels que ${}^A f(P') = \bigcap_{Q \in Z} Q$, il existe une partie Z' de $\text{Spec}(A')$ telle que $P' = \bigcap_{Q' \in Z'} Q'$ et satisfaisant ${}^A f(Z') \subset Z$.

Problème : Un G-morphisme est-il toujours G-ouvert , comme les exemples précédents semblent l'indiquer ? On peut montrer que la notion de morphisme G-ouvert est stable pour le changement de base par un épimorphisme plat . En particulier , cette notion se localise . Je ne sais pas si la notion de G-morphisme se localise . Un exemple de G-morphisme ne se localisant pas donnerait donc un exemple de G-morphisme non G-ouvert .

Signalons , pour terminer , que la notion de G-anneau a été généralisée dans deux voies différentes dans [F] et dans [A] .

BIBLIOGRAPHIE

- [A] - ADAMS - RINGS WITH A FINITELY GENERATED TOTAL QUOTIENT RING - Canad. Math. Bull. - Vol 17 (1) , 1974 -
- [B] - BOURBAKI - ALGEBRE COMMUTATIVE et TOPOLOGIE GENERALE - Hermann -
- [F - M] - FONTANA et MAROSCIA - SUGLI ANELLI DI GOLDMAN - Boll. Un. Math. Ital.
- [F] - FUJITA - A NOTE ON $G(\mathcal{A})$ -DOMAINS AND HILBERT RINGS - Hiroshima Math. J. 5 , (1975) , 61-67 -
- [Gi] - GILMER - MULTIPLICATIVE IDEAL THEORY - Dekker - 1972 -
- [Gr] - GROTHENDIECK et DIEUDONNE - ELEMENTS DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE - Ch 1 - Springer Verlag - 1971 -
- [Gu] - GUERINDON - ANNEAUX DE GOLDMAN - Seminaire Dubreil Pisot - 1969 - 1970 Exposé N° 9 - Secrétariat Mathématique - Paris -
- [H] - HEDSTROM - G-DOMAINS AND PROPERTY (T) - Math. Nachr . - 56 - 1973 - pp 125 , 129 -
- [Ho] - HOCHSTER - THE MINIMAL PRIME SPECTRUM OF A COMMUTATIVE RING - Can. J. Math. - Vol. XXIII , N° 5 , 1971 , pp. 749 , 758 -
- [I] - IVERSEN - GENERIC LOCAL STRUCTURES OF THE MORPHISMS IN COMMUTATIVE ALGEBRA - Springer Verlag - Lectures Notes in Mathematics - N° 310 -1970
- [K] - KAPLANSKY - COMMUTATIVE RINGS - Allyn and Bacon - 1970 -
- [Pa] - PAPICK - TOPOLOGICALLY DEFINED CLASSES OF GOING DOWN DOMAINS - Thèse de Rutgers University - 1975 -
- [P₁] - PICAUVET - SUR LES ANNEAUX COMMUTATIFS DONT TOUT IDEAL PREMIER EST DE GOLDMAN - C.R. Acad. Sci. Paris , Sér. A-B , 280 (1975) A-1719 A-1721 -
- [P₂] - PICAUVET - AUTOUR DES IDEAUX PREMIERS DE GOLDMAN D'UN ANNEAU COMMUTATIF - Ann. Univ. Clermont - Ferrand , (1975) , pp. 265 , 272 -