PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. JACOD

Sur la théorie générale des processus

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE · UNIVERSITÉ ET I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT de RECHERCHE en INFORMATIQUE et SYSTÈMES ALÉATOIRES

I.R.I.S.A.

Avenue du Général Leclerc · 35031 Rennes Cedex · B.P. 25 A · Tél. 36.48.15

Rapport N° 62

* SUR LA THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

par

J. JACOD

Sommaire

Nous proposons une extension de la "théorie générale des processus" dans un cadre où les constantes ne sont plus nécessairement des temps d'arrêt. Cette extension est adaptée à l'étude des processus "invariants par changement de temps", étude qui sera menée dans un article ultérieur.

* *Pour toute correspondance ou demande de tirés à part, écrire à*

J. JACOD *Université de Rennes*
B.P. 25 A 35031 RENNES CEDEX

SUR LA THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'étendre la "théorie générale des processus" telle qu'elle est contenue dans les livres de Dellacherie [1] et Dellacherie-Meyer [4], en allant plus loin que ne l'a fait le premier de ces auteurs dans [2]. Plus précisément, nous allons construire (il serait plus exact de dire: recopier !) cette théorie dans un cadre où les constantes ne sont pas nécessairement des temps d'arrêt: ce cas est d'ailleurs évoqué dans [2].

Il va sans dire qu'un tel travail n'a de sens qu'en vue d'éventuelles applications: en premier lieu, nous pensons qu'il constitue le cadre le plus approprié à l'étude des systèmes régénératifs de Maisonneuve [5]; en effet ces systèmes sont des processus de Markov, à ceci près qu'on n'a la propriété de Markov que pour certains temps d'arrêt, ne comprenant en général pas les constantes.

Mais surtout, nous pensons à une application aux processus "invariants par changement de temps", i.e. pour lesquels on identifie deux trajectoires qui visitent les mêmes points dans le même ordre: dans un tel cadre, un temps fixe ne sera pas un temps d'arrêt, tandis que par exemple le temps d'entrée dans un ensemble, qui présente un certain caractère d'invariance, en sera un. Nous espérons développer ailleurs ces notions.

Nous prévenons d'emblée le lecteur que cet article présente un certain caractère fastidieux, puisqu'il vise à reprendre les principales notions de [1] (temps d'arrêt, tribus optionnelle et prévisible, théorèmes de section, martingales et processus croissants, théorèmes de projection, théorème de décomposition des surmartingales). Certains résultats sont simplement recopiés, et on renvoie à [1] pour beaucoup de démonstrations. Nous insistons surtout sur ce qui diffère de [1], et en particulier sur le fait qu'on n'a pas, sans hypothèse supplémentaire, les théorèmes de section et de projection prévisibles, ni le théorème de décomposition des surmartingales (la nécessité d'une hypothèse supplémentaire avait déjà été remarquée dans [2]).

Signalons enfin qu'il y a plusieurs manières d'étendre la théorie générale des processus. Nous avons choisi celle qui semble être adaptée aux processus "invariants par changement de temps" (voir remarque 1, paragraphe 1).

1 - LES TEMPS D'ARRET

On considère un espace Ω quelconque. Soit $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0,\infty]$; on notera $[R,S]$, $[R,S[$,... les intervalles stochastiques dans $\tilde{\Omega}$, réservant la notation usuelle $[\![R,S]\!]$,... pour un autre usage.

Nous allons définir la classe des temps d'arrêt en partant d'une famille d'applications de Ω dans $[0,\infty]$ qui joueront le rôle des constantes. On fait donc l'hypothèse:

<u>(H-1)</u>: <u>il existe une suite</u> $(R_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$ <u>d'applications de</u> Ω <u>dans</u> $[0,\infty]$ <u>telle que</u> (on note, pour simplifier, $\zeta = R_\infty$): $R_0 = 0$, $R_n \leq \zeta$, $[R_n] \cap [R_m] \cap [0,\zeta[= \emptyset$ <u>si</u> $n \neq m$.

On pose alors $F = \bigcup_{n\in\bar{\mathbb{N}}} [R_n]$ et on note $f(\omega)$ la coupe de F en ω. Soit $\bar{M}$ l'ensemble aléatoire dont les coupes $\bar{m}(\omega)$ sont les fermetures des $f(\omega)$. Soit N l'ensemble aléatoire dont les coupes sont

$$n(\omega) = \{t \in \bar{m}(\omega),\ \text{si } \sup(s<t, s\in \bar{m}(\omega)) < t, \text{ alors } t \in f(\omega)\}.$$

<u>Remarque 1</u>: L'ensemble N va jouer un rôle fondamental; en particulier tout temps d'arrêt aura son graphe contenu dans N (c'est déjà le cas pour les R_n). Mais la définition de N est relativement arbitraire, pourvu que sa fermeture soit $\bar{M}$. Le choix présent est fait en vue de l'application aux processus invariants par changement de temps. Pour une application aux systèmes régénératifs, il conviendrait de prendre pour N le plus petit fermé droit de fermeture $\bar{M}$.■

Si $A \subset \Omega$ et si T est une application de Ω dans $[0,\infty]$ on pose:

$$\tilde{T} = \zeta \wedge \inf(s > T, s \in \bar{M}), \quad T_g = 0 \vee \sup(s < T, s \in \bar{M}),$$

$$T_A = \begin{cases} T & \text{sur } A \\ \zeta & \text{sur } A^c, \end{cases} \quad \hat{T} = \tilde{T}_{\{T<\tilde{T}\in F\}}, \quad \check{T} = \begin{cases} T & \text{si } T\in N \\ T_g & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fera également l'hypothèse suivante:

<u>(H-2)</u>: <u>il existe une famille</u> $(\mathcal{G}(n), n\in\bar{\mathbb{N}})$ <u>de tribus sur</u> Ω <u>telle que</u> (on note, pour simplifier, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\infty)$):

(i)- $\forall n\in\bar{\mathbb{N}}$, $\mathcal{G}(n) \subset \mathcal{G}$ <u>et</u> $\{(R_n)_g < R_n\} \in \mathcal{G}(n)$;

(ii)- $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{G}(n)$, <u>on a</u> $A \cap \{R_n < R_m\} \in \mathcal{G}(n) \cap \mathcal{G}(m)$.

<u>Exemple</u>: Supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ soit une famille croissante de tribus de Ω. Si $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un dénombrement des rationnels (ou des dyadiques) de $\mathbb{R}_+$ avec $q(0) = 0$ et si $q(\infty) = \infty$, les hypothèses (H-1) et (H-2) sont vérifiées si on pose $R_n = q(n)$ et $\mathcal{G}(n) = \mathcal{F}_{q(n)}$. Dans le cadre de cet exemple, on reconnaitra dans ce qui suit la théorie générale des processus (les temps d'arrêt étant relatifs à $(\mathcal{F}_{t+})$).■

(1-1) DEFINITION: (a) <u>Un temps d'arrêt est une application</u> T <u>de</u> Ω <u>dans</u> $[0,\infty]$ <u>telle que</u> $[T] \subset N$ <u>et que</u> $\{T < R_n\} \in \mathcal{G}(n)$ $\forall n\in\bar{\mathbb{N}}$; on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des temps d'arrêt.

(b) <u>Si</u> $T\in\mathcal{S}$ <u>on note</u> $\mathcal{G}_T$ <u>la tribu des</u> $A\in\mathcal{G}$ <u>tels que</u> $A\cap\{T<R_n\} \in \mathcal{G}(n)$ $\forall n\in\bar{\mathbb{N}}$.

(c) <u>Si</u> $T\in\mathcal{S}$ <u>on note</u> $\mathcal{G}_{T-}$ <u>la tribu engendrée par</u> $\mathcal{G}(0)$, <u>par</u> $\{T=\zeta\}$ <u>et par les</u> $A\cap\{R_n<T\}$ <u>et les</u> $A\cap\{(R_n)_g < R_n \leq T\}$, <u>avec</u> $n\in\bar{\mathbb{N}}$ <u>et</u> $A\in\mathcal{G}(n)$.

D'après (H-2) il est clair que $R_n\in\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}_{R_n-} \subset \mathcal{G}(n) \subset \mathcal{G}_{R_n}$. De plus $\mathcal{G}_{0-} = \mathcal{G}(0)$ et $\mathcal{G}_\zeta = \mathcal{G}$. Pour simplifier les notations, on désigne par $\mathcal{R}$ la famille des R_n et des $(R_n)_g$, pour $n\in\bar{\mathbb{N}}$: on verra que $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$.

Voici, rassemblées en une longue proposition, l'ensemble des propriétés des temps d'arrêt qui nous seront utiles.

(1-2) PROPOSITION: <u>Soient</u> $S, T, T_n \in \mathcal{S}$. <u>Alors</u>

(a) <u>Pour que</u> $A\in\mathcal{G}_T$, <u>il faut et il suffit que</u> $A\in\mathcal{G}$ <u>et que</u> $T_A\in\mathcal{S}$.

(b) On a $\underline{\underline{G}}_{T-} \subset \underline{\underline{G}}_T$.

(c) Si $A \in \underline{\underline{G}}_T$ on a $A \cap \{T < S\} \in \underline{\underline{G}}_{S-}$ et $A \cap \{T = S\} \in \underline{\underline{G}}_S$.

(d) Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$ on a $(R_n)_g \in \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}}(n) \subset \underline{\underline{G}}_{(R_n)_g}$, donc en particulier $\underline{\underline{R}} \subset \underline{\underline{S}}$.

(e) Pour qu'une application T' soit un temps d'arrêt, il faut et il suffit que $[T'] \subset N$ et que $\{T' \leq R\} \in \underline{\underline{G}}_R$ pour tout $R \in \underline{\underline{R}}$.

(f) On a $\{T_g < T\} \in \underline{\underline{G}}_{T-}$ et $\hat{T} \in \underline{\underline{S}}$.

(g) Si $S \leq T$ on a $\underline{\underline{G}}_S \subset \underline{\underline{G}}_T$ et $\underline{\underline{G}}_{S-} \subset \underline{\underline{G}}_{T-}$. Si de plus $S < T$, on a $\underline{\underline{G}}_S \subset \underline{\underline{G}}_{T-}$.

(h) On a $S \vee T \in \underline{\underline{S}}$, $S \wedge T \in \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}}_{S \wedge T} = \underline{\underline{G}}_S \cap \underline{\underline{G}}_T$.

(i) Si $T_n \downarrow R$, on a $\check{R} \in \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}}_{\check{R}} = \bigcap \underline{\underline{G}}_{T_n}$.

(j) Si $T_n \uparrow R$, on a $R \in \underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{G}}_{R-} = \bigvee \underline{\underline{G}}_{(T_n)-}$. Si de plus $A = \bigcap \{T_n < R\}$, on a $A \cap \underline{\underline{G}}_{R-} = A \cap (\bigvee \underline{\underline{G}}_{T_n})$.

(k) Si $A \in \underline{\underline{G}}_{T-} \cup \underline{\underline{G}}_{\gamma-}$, on a $A \cap \{T = \gamma\} \in \underline{\underline{G}}_{T-} \cap \underline{\underline{G}}_{\gamma-}$.

Démonstration: (a) Il suffit de remarquer que $\{T_A < R_n\} = A \cap \{T < R_n\}$.

(b) Il est évident que $\underline{\underline{G}}(0) \subset \underline{\underline{G}}_T$ et que $\{T = \gamma\} \in \underline{\underline{G}}_T$. Le résultat découle alors de ce que pour tout $A \in \underline{\underline{G}}(n)$ on a

$$A \cap \{R_n < T\} \cap \{T < R_p\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (A \cap \{T < R_m\}^c \cap \{T < R_p\} \cap \{R_n < R_m < R_p\}) \in \underline{\underline{G}}(p) ;$$

$$A \cap \{(R_n)_g < R_n \leq T\} \cap \{T < R_p\} = A \cap \{T < R_n\}^c \cap \{(R_n)_g < R_n < R_p\} \cap \{T < R_p\} \in \underline{\underline{G}}(p) .$$

(c) La première partie découle de l'égalité

$$A \cap \{T < S\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap \{T < R_n\} \cap (\{R_n < S\} \cup \{(R_n)_g < R_n \leq S\}))$$

et de ce que $A \cap \{T < R_n\} \in \underline{\underline{G}}(n)$ par hypothèse. Quant à la seconde partie, il suffit de remarquer que

$$A \cap \{T = S\} \cap \{S \leq R_n\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Big[\{R_n \leq R_m\} + A \cap \{T < R_m\} \cap \{S < R_m\} \cap \{R_m < R_n\} + A \cap \{R_m \leq T < R_n\} \cap \{R_m \leq S < R_n\}\Big]$$

appartient à $\underline{\underline{G}}(n)$ et que, d'après (b), $\{T = S\} \in \underline{\underline{G}}$, donc $A \cap \{T = S\} \in \underline{\underline{G}}$.

(d) Soit $S = (R_n)_g$. On remarque d'abord que $[S] \subset N$. Si $A \in \underline{\underline{G}}(n)$ il vient

$$A \cap \{S < R_p\} = A \cap (\{R_n < R_p\} + \{R_n = R_p = \gamma\} \cap \{\gamma_g < \gamma\}) \in \underline{\underline{G}}(p) ;$$

on en déduit que $S \in \underline{\underline{S}}$ (prendre $A = \Omega$) et que $\underline{\underline{G}}(n) \subset \underline{\underline{G}}_S$.

(e) La condition est évidemment nécessaire. Inversement, on a $\{T' < R_n\} = \bigcup_{R \in \underline{\underline{R}}} \{T' \leq R < R_n\}$, qui appartient à $\underline{\underline{G}}_{R_n-}$ d'après (c). Mais $\underline{\underline{G}}_{R_n-} \subset \underline{\underline{G}}(n)$, donc $T' \in \underline{\underline{S}}$.

(f) Le résultat repose sur les deux égalités suivantes:

$$\{T_g < T\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(R_n)_g < R_n = T\} \in \underline{\underline{G}}_{T-}$$

$$\{\hat{T} < R_n\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\{T < R_m < R_n\} \cap (\bigcap_{p \in \mathbb{N}} (\{R_p \leq T\} + \{R_m \leq R_p\}))) \in \underline{\underline{G}}(p).$$

(g) Découle immédiatement de (c).

(h) Il est évident que $[S \wedge T] \subset N$ et $[S \vee T] \subset N$; on a $\{S \vee T < R_n\} = \{S < R_n\} \cap \{T < R_n\}$; enfin si $A \in \underline{\underline{G}}_S \cap \underline{\underline{G}}_T$, on a $A \cap \{S \wedge T < R_n\} = (A \cap \{S < R_n\}) \cup (A \cap \{T < R_n\}) \in \underline{\underline{G}}(n)$, d'où le résultat.

(i) Si $A \in \bigcap \underline{\underline{G}}_{T_n}$, on a $A \cap \{\check{R} < R_p\} = \bigcup (A \cap \{T_n < R_p\}) \in \underline{\underline{G}}(p)$.

(j) On remarque d'abord que $[R] \subset N$. Par ailleurs si $S \in \underline{\underline{R}}$ on a $\{R \leq S\} = \bigcap \{T_n \leq S\} \in \underline{\underline{G}}_S$, donc $R \in \underline{\underline{S}}$ d'après (e). Si $B \in \underline{\underline{G}}(p)$, on a $B \cap \{R_p < R\} = \bigcap (B \cap \{R_p < T_n\})$ et de même $B \cap \{(R_p)_g < R_p \leq R\} = \bigcap (A \cap \{(R_p)_g < R_p \leq T_n\})$: ces deux ensembles sont dans $\bigvee \underline{\underline{G}}_{(T_n)-}$ et on en déduit la première égalité entre tribus. Si enfin $B \in \underline{\underline{G}}_{T_n}$ on a clairement $A \cap B \in \underline{\underline{G}}_{R-}$, d'où l'on déduit la seconde égalité entre tribus.

(k) On a $\{T = \gamma\} \in \underline{\underline{G}}_{T-}$ par hypothèse, et $\{T = \gamma\} = \{T < \gamma\}^c \in \underline{\underline{G}}_{\gamma-}$ d'après (c). Il est clair que $\underline{\underline{G}}(0) \subset \underline{\underline{G}}_{T-} \cap \underline{\underline{G}}_{\gamma-}$. Enfin si $A \subset \Omega$, $A \cap \{R_n < T\} \cap \{T = \gamma\} = A \cap \{R_n < \gamma\} \cap \{T = \gamma\}$ et $A \cap \{(R_n)_g < R_n \leq T\} \cap \{T = \gamma\} = A \cap \{(R_n)_g < R_n \leq \gamma\} \cap \{T = \gamma\}$: le résultat en découle alors facilement.■

Remarque 2: La propriété (d) est assez curieuse pour des temps d'arrêt, puisque $(R_n)_g$ anticipe en quelque sorte sur le futur (pour un $T \in \underline{\underline{S}}$ quelconque, on n'a pas en général $T_g \in \underline{\underline{S}}$) : ces anomalies tiennent à notre choix particulier de l'ensemble N.■

2 - LES TRIBUS OPTIONNELLE ET PREVISIBLE.

De même qu'en [1] on peut définir sur $\tilde{\Omega}$ une série de tribus emboitées les unes dans les autres: mesurable, progressive, optionnelle (ou: bien-mesurable), accessible, prévisible. Nous nous contenterons ici des tribus optionnelle et prévisible, plus d'une troisième tribu contenue dans la tribu prévisible, et qui sera définie plus loin (la tribu "mesurable" apparaitra aussi dans la démonstration du théorème de section).

Soit $\tilde{\Omega}' = [\gamma, \infty]$. Définissons les intervalles stochastiques par

$$(1)\begin{cases} [\![S,T[\![= [S,T[\cup \tilde{\Omega}' \\ [\![S,T]\!] = ([S,\tilde{T}] \cap [S,\hat{T}[) \cup \tilde{\Omega}' , \qquad [\![S]\!] = [\![S,S]\!] \\ ]\!]S,T[\![= ([\![S,T[\![\setminus [\![S]\!]) \cup \tilde{\Omega}', \quad]\!]S,T]\!] = ([\![S,T]\!] \setminus [\![S]\!]) \cup \tilde{\Omega}' . \end{cases}$$

(2-1) DEFINITIONS: (a) On appelle optionnelle et on note $\underline{\underline{O}}$ la tribu de $\tilde{\Omega}$ engendrée par les $[\![S,T[\![$ pour $S,T \in \underline{\underline{S}}$ et les $A \times [\gamma, \infty]$ pour $A \in \underline{\underline{G}}$ (on désigne par là l'ensemble $\{(\omega,t): \omega \in A, \gamma(\omega) \leq t \leq \infty\}$).

(b) On appelle prévisible et on note $\underline{\underline{P}}$ la tribu de $\tilde{\Omega}$ engendrée par les $]\!]S,T]\!]$ pour $S,T \in \underline{\underline{S}}$, par les $[\![0_A]\!]$ pour $A \in \underline{\underline{G}}(0)$ et par les $A \times [\gamma, \infty]$ pour $A \in \underline{\underline{G}}_{\gamma-}$.

(c) Un processus $X = (X_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est dit adapté si

(2) $\forall T \in \underline{\underline{S}}$, X_T est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable.

(3) Pour tout intervalle $]s,t[$ contigu à $\bar{m}(\omega)$, $X_.(\omega)$ est constant sur $[s,t[$ (resp. $[s,t]$) si $t \in f(\omega)$ (resp. $t \notin f(\omega)$).

On remarquera la forme particulière de (3): là encore, il s'agit d'une définition adaptée aux processus invariants par changement de temps. Commençons par étudier la tribu $\underline{\underline{O}}$.

(2-2) PROPOSITION: (a) Si $S,T \in \underline{\underline{S}}$, toutes les formes d'intervalles stochastiques (1) sont dans $\underline{\underline{O}}$.

(b) $\underline{\underline{O}}$ est engendrée par les $[\![S,T]\!]$ avec $S,T \in \underline{\underline{S}}$ et les $A \times [\gamma, \infty]$ avec $A \in \underline{\underline{G}}$.

(c) Tout processus optionnel est adapté.

(d) Soient $S,T \in \underline{\underline{S}}$ et Y une variable $\underline{\underline{G}}_S$-mesurable. Si A est un intervalle stochastique de la forme (1), alors le processus $Y 1_A$ est optionnel.

(e) Soient $T \in \underline{\underline{S}}$ et Y une variable aléatoire. Pour que Y soit $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un processus optionnel X tel que $Y = X_T$.

(f) Soit une application: $\Omega \xrightarrow{T} [0,\infty]$. Pour que $T \in \underline{\underline{S}}$, il faut et il suffit que $T \leq \gamma$ et que $[\![T,\gamma]\!] \in \underline{\underline{O}}$.

Démonstration: (a) On pose $R'_n = (R_n)_{\{T < R_n\}}$. D'après la définition de T et des intervalles stochastiques, il est clair que $[\![S,T]\!] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\![S,R'_n[\![\in \underline{\underline{O}}$. Comme $\tilde{\Omega}' = [\![\zeta]\!]$, (1) entraine évidemment le résultat.

(b) découle immédiatement de (a), étant donné que $[\![S,T[\![= ([\![S,T]\!] \setminus [\![T]\!]) \bigcup [\![\zeta]\!]$.

(c) Cette propriété, vraie lorsque X est l'indicatrice de $[\![S,T[\![$ pour $S,T \in \underline{\underline{S}}$, ou de $A \times [\zeta,\infty]$ pour $A \in \underline{\underline{G}}$, reste vraie par un argument de classe monotone pour tout processus optionnel.

(d) Toujours par un argument de classe monotone, il suffit de montrer le résultat lorsque $Y = 1_A$, avec $A \in \underline{\underline{G}}_S$. Mais cela découle alors de $1_A 1_{(S,T)} = 1_{(S_A,T)} - 1_{A^c} 1_{[\![\zeta]\!]}$, où $(.,.)$ désigne la forme d'intervalle stochastique en question.

(e) La condition nécessaire vient de (c), la condition suffisante de (d).

(f) Seule la condition suffisante reste à montrer. Comme l'indicatrice de $[\![T,\zeta]\!]$ est adaptée, (3) entraine que $[T] \subset N$, tandis que (2) implique $\{T \leq R\} \in \underline{\underline{G}}_R$ $\forall R \in \underline{\underline{R}}$, d'où le résultat d'après (1-2)(e).■

(2-3) PROPOSITION: $\underline{\underline{O}}$ <u>est engendrée par les processus adaptés, continus à droite, limités à gauche sur</u> $]0,\zeta[$.

<u>Démonstration</u>: Il suffit évidemment de montrer que si X est un processus adapté, continu à droite, limité à gauche sur $]0,\zeta[$, alors il est optionnel. Nous allons suivre [3]. Soit $a > 0$; on définit par récurrence $T_0^a = 0$ et

$$T_{n+1}^a = \zeta \wedge \inf(t > T_n^a : |X_{T_n^a} - X_{t-}| \geq a, \text{ ou } |X_{T_n^a} - X_t| \geq a).$$

On a bien-sûr $T_0^a \in \underline{\underline{S}}$. Supposons que $S = T_n^a \in \underline{\underline{S}}$. On pose $T = T_{n+1}^a$ et $T_y = \zeta \wedge \inf(t > S, |X_S - X_t| > y)$; si $R \in \underline{\underline{R}}$, on a

$$\{T_y \leq R\} = \{S < R\} \bigcap [\bigcup_{R' \in \underline{\underline{R}}} \{S < R' \leq R\} \bigcap \{|X_S - X_{R'}| > y\}] \in \underline{\underline{G}}_R$$

(car $\underline{\underline{R}}$ est dénombrable). Remarquons toutefois qu'en général $T_y \notin \underline{\underline{S}}$, car $[T_y] \not\subset N$. Par ailleurs $\lim_{y \uparrow a} \uparrow T_y = T$, donc $\{T \leq R\} = \bigcap_{y \in \mathbb{Q}, y < a} \{T_y \leq R\} \in \underline{\underline{G}}_R$ et comme (3) implique $[T] \subset N$, on a $T \in \underline{\underline{S}}$ d'après (1-2)(e). Donc par récurrence, $T_n^a \in \underline{\underline{S}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a > 0$. Posons maintenant

$$X(n,a) = X_\zeta 1_{[\![\zeta]\!]} + \sum_{0 \leq m < n} X_{T_m^a} (1_{[\![T_m^a, T_{m+1}^a[\![} - 1_{[\![\zeta]\!]}).$$

D'après (2-2)(d), $X(n,a)$ est optionnel. D'autre part X est limité à gauche sur $]0,\zeta[$, donc $\lim_{n \uparrow \infty} \uparrow T_n^a = \zeta$, et $X(n,a)$ tend vers une limite optionnelle X^a lorsque $n \uparrow \infty$. Enfin d'après les définitions de T_n^a et $X(n,a)$, on a $X = X^a$ sur $[\zeta,\infty]$ et $|X - X^a| \leq a$ partout. En faisant tendre a vers 0, on voit que X est optionnel.■

Passons maintenant à l'étude de $\underline{\underline{P}}$. On définit l'ensemble aléatoire $\hat{F} \subset F$ par $\hat{F} = \{(\omega,t) : t \in f(\omega), t_g < t\}$.

(2-4) PROPOSITION: (a) <u>On a</u> $\underline{\underline{P}} \subset \underline{\underline{O}}$.

(b) <u>Soient</u> $S,T \in \underline{\underline{S}}$ <u>et</u> Y <u>une variable</u> $\underline{\underline{G}}_S \bigcap \underline{\underline{G}}_{\zeta-}$-<u>mesurable. Alors le processus</u> $Y 1_{]\!]S,T]\!]}$ <u>est prévisible</u>.

(c) <u>Soient</u> $T \in \underline{\underline{S}}$ <u>et</u> Y <u>une variable aléatoire. Pour que</u> Y <u>soit</u> $\underline{\underline{G}}_{T-}$-<u>mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un processus prévisible</u> X <u>tel que</u> $Y = X_T$.

<u>Démonstration</u>: (a) decoule de (2-2)(a).

(b) Il suffit de montrer le résultat lorsque $Y = 1_A$, avec $A \in \underline{\underline{G}}_S \bigcap \underline{\underline{G}}_{\zeta-}$. Mais cela découle alors de ce que $Y 1_{]\!]S,T]\!]} = 1_{]\!]S_A,T]\!]} - 1_{A^c} 1_{[\![\zeta]\!]}$.

(c) **Si** X est l'indicatrice de $]\!]S,T]\!]$ avec $S,T \in \underline{\underline{S}}$, de $[\![0_A]\!]$ avec $A \in \underline{\underline{G}}(0)$ ou de $A \times [\zeta,\infty]$ avec $A \in \underline{\underline{G}}_{\zeta-}$, il est clair que X_T est $\underline{\underline{G}}_{T-}$-mesurable (utiliser (1-2)(c,k)) et, par un argument de classe monotone, c'est vrai pour tout processus prévisible. Inversement, supposons que Y soit $\underline{\underline{G}}_{T-}$-mesurable. Il nous suffit de prouver l'existence de X prévisible tel que $Y = X_T$ dans les cas suivants:

- $Y = 1_A$, $A \in \underline{\underline{G}}(0)$: on prend $X = 1_{[\![0_A]\!] \bigcup]\!]0_A,\zeta]\!]} - 1_{A^c} 1_{[\![\zeta]\!]}$;
- $Y = 1_{\{T=\zeta\}}$: on prend $X = 1_{[\![\zeta]\!]}$;
- $Y = 1_{A \bigcap \{R_n < T\}}$, $A \in \underline{\underline{G}}(n)$: on prend $X = 1_A (1_{]\!]R_n,\zeta]\!]} - 1_{\{R_n = \zeta\}} 1_{[\![\zeta]\!]})$;
- $Y = 1_{A \bigcap \{(R_n)_g < R_n \leq T\}}$, $A \in \underline{\underline{G}}(n)$: on prend $X = 1_{A \bigcap \{(R_n)_g < R_n\}} 1_{]\!](R_n)_g,\zeta]\!]}$.■

(2-5) PROPOSITION: $\underline{\underline{P}}$ <u>est engendrée par les processus adaptés, continus à gauche sur</u> $]0,\zeta[\bigcap \hat{F}^c$, <u>tels que</u> X_ζ <u>soit</u> $\underline{\underline{G}}_{\zeta-}$-<u>mesurable</u>.

<u>Démonstration</u>: Les indicatrices d'ensembles générateurs de $\underline{\underline{P}}$ vérifient clairement ces propriétés. Il nous reste donc à montrer que si X est un processus vérifiant les conditions de l'énoncé, il est prévisible.

Posons $R'_n = (R_n)_{\{(R_n)_g < R_n\}}$. Si Y est une variable $\underline{\underline{G}}_{(R_n)_g}$-mesurable, le processus $Y 1_{\{(R_n)_g < R_n\}} 1_{[\![R'_n]\!]} = Y 1_{\{(R_n)_g < R_n\}} 1_{]\!](R_n)_g, R'_n]\!]}$ est prévisible. Par ailleurs il est très facile de trouver pour tout $n \geq 1$ une suite croissante $(R(n,m))_{m \geq 0}$ d'éléments de $\underline{\underline{S}}$ telle que $R(n,0) = 0$, que $R(n,m) < R(n,m+1)$ sur $\{R(n,m) < \zeta\}$, et que $F = \bigcup_{(m)} [R(n,m)]$. On pose alors $A(n,m) =]\!]R(n,m), R(n,m+1)]\!] \bigcap (\bigcup_{p \in \mathbb{N}} [\![R'_p]\!])^c \in \underline{\underline{P}}$ et

$$X^n = X_0 1_{[\![0]\!]} + X_\zeta 1_{[\![\zeta]\!]} + \sum_{m \geq 0} X_{R(n,m)} 1_{A(n,m)} + \sum_{p \in \mathbb{N}} X_{R'_p} 1_{\{(R_p)_g < R_p\}} (1_{[\![R'_p]\!]} - 1_{[\![\zeta]\!]}).$$

Il est clair que cette formule définit sans ambiguité un processus X^n. Les considérations précédentes concernant les R'_n, ainsi que (2-4)(b), montrent que X^n est prévisible. Mais $\hat{F} \bigcap]0,\zeta[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [R'_n] \bigcap]0,\zeta[$, donc $X^n = X$ sur $\hat{F} \bigcup [\zeta,\infty] \bigcup [0]$. De plus, la continuité à gauche de X sur $\hat{F}^c \bigcap]0,\zeta[$ entraine clairement que X^n tend vers X sur cet ensemble, donc partout, et X est prévisible.■

3 - TEMPS D'ARRET PREVISIBLES.

Habituellement, il y a deux manières de définir les temps d'arrêt prévisibles T: soit T est "annoncé" par une suite de temps d'arrêt, soit $[\![T,\infty]\!]$ est prévisible; et, dans [4], il est montré que ces deux manières sont équivalentes, du moins lorsqu'il y a une probabilité et que les tribus sont complètes par rapport à cette probabilité. Ici, ces deux méthodes conduisent à des classes différentes de temps d'arrêt, même lorsque toutes les tribus sont complètes par rapport à une certaine probabilité.

Nous commençons par étudier l'une de ces classes.

(3-1) DEFINITION: <u>On appelle prévisibles et on note</u> $\underline{\underline{S}}_p$ <u>l'ensemble des</u> $T \in \underline{\underline{S}}$ <u>tels que</u> $[\![T,\zeta]\!] \in \underline{\underline{P}}$.

(3-2) PROPOSITION: <u>Soient</u> S, T, $T_n \in \underline{\underline{S}}_p$. <u>Alors</u>

(a) <u>Si</u> $R \in \underline{\underline{S}}$ <u>et</u> $R_A \in \underline{\underline{S}}_p$, <u>alors</u> $A \bigcap \{R < \zeta\} \in \underline{\underline{G}}_{R-}$.

(b) <u>Pour que</u> $A \in \underline{\underline{G}}_{T-}$, <u>il faut et il suffit que</u> $T_A \in \underline{\underline{S}}_p$ <u>et que</u> $A \bigcap \{T = \zeta\} \in \underline{\underline{G}}_{\zeta-}$.

(c) Si $R\in\mathcal{S}$ et $A\in\mathcal{G}_{T-}$, alors $A\cap\{T=R\}\in\mathcal{G}_{R-}$.

(d) $0\in\mathcal{S}_p$, $\zeta\in\mathcal{S}_p$, et $R'_n=(R_n)_{\{(R_n)_g<R_n\}}\in\mathcal{S}_p$ $\forall n\in\overline{\mathbb{N}}$.

(e) On a $S\vee T\in\mathcal{S}_p$, $S\wedge T\in\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{G}_{(S\wedge T)-}=\mathcal{G}_{S-}\cap\mathcal{G}_{T-}$.

(f) Si $T_n\downarrow R$ et si la suite (T_n) est stationnaire, alors $R\in\mathcal{S}_p$.

(g) Si $T_n\uparrow R$, on a $R\in\mathcal{S}_p$.

(h) Si $R\in\mathcal{S}$ et si Y est une variable $\mathcal{G}_{S-}$-mesurable, le processus $Y1_{\rrbracket S,R\rrbracket}$ est prévisible.

Démonstration: (a) Découle de l'égalité $1_{\llbracket R_A,\zeta\rrbracket}(R)=1_{A\cap\{R<\zeta\}}+1_{\{R=\zeta\}}$ et de (2-4)(c).

(b) D'après (a) la condition est suffisante. Inversement soit $A\in\mathcal{G}_{T-}$. (1-2)(k) entraine $A\cap\{T=\zeta\}\in\mathcal{G}_{\zeta-}$. (2-4)(c) entraine l'existence d'un processus prévisible X tel que $X_T=1_{A\cap\{T<\zeta\}}$. Mais alors $\llbracket T_A\rrbracket=\llbracket T\rrbracket\cap(\{X=1\}\cup\llbracket\zeta\rrbracket)\in\mathcal{P}$, et $\llbracket T_A,\zeta\rrbracket=\rrbracket T_A,\zeta\rrbracket\cup\llbracket T_A\rrbracket\in\mathcal{P}$, donc $T_A\in\mathcal{S}_p$.

(c) On a $A\cap\{T=R=\zeta\}\in\mathcal{G}_{R-}$ d'après (1-2)(k). D'autre part $X=1_{\llbracket T_A\rrbracket}-1_{\llbracket\zeta\rrbracket}$ est prévisible d'après (b), et $X_R=1_{A\cap\{T=R<\zeta\}}$ est $\mathcal{G}_{R-}$-mesurable d'après (2-4)(c).

(d) Il est évident que 0 et ζ sont dans $\mathcal{S}_p$. Si $S_n=((R_n)_g)_{\{(R_n)_g<R_n\}}$, on a $S_n\in\mathcal{S}$ d'après (1-2) et $\llbracket R'_n,\zeta\rrbracket=\rrbracket S_n,\zeta\rrbracket$, donc $R'_n\in\mathcal{S}_p$.

(e), (f) et (g) sont évidents. Enfin pour montrer (h), il suffit de remarquer que si $A\in\mathcal{G}_{S-}$, on a $1_A1_{\llbracket S,R\rrbracket}=1_{\llbracket S_A,R\rrbracket}$, qui est prévisible d'après (b), et d'appliquer un argument de classe monotone.∎

(3-3) DEFINITIONS: (a) On appelle annonçables et on note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des $T\in\mathcal{S}$ tels que $\{T=0\}\in\mathcal{G}(0)$ et pour lesquels il existe une suite (S_n) (dite "annonçante") d'éléments de $\mathcal{S}$ croissant vers $T'\leq T$, avec $T=T'$

(resp. $T=\hat{T}'=\tilde{T}'$) si $S_n<T'$ pour tout n (resp. s'il existe n avec $S_n=T'>0$).

(b) On note $\mathcal{S}_b$ l'ensemble des T_A, où $T\in\mathcal{S}_a$ et $A\in\mathcal{G}_{T-}$.

(3-4) PROPOSITION: (a) On a $\mathcal{S}_a\subset\mathcal{S}_b\subset\mathcal{S}_p$; $0\in\mathcal{S}_a$, $\zeta\in\mathcal{S}_a$, $R'_n\in\mathcal{S}_a$ $\forall n\in\overline{\mathbb{N}}$ (ces temps d'arrêt sont définis dans (3-3)).

(b) Si $S\in\mathcal{S}_a$ est annoncé par (S_n), $\{0<S<\zeta\}\cap\mathcal{G}_{S-}=\{0<S<\zeta\}\cap(\bigvee\mathcal{G}_{S_n})$.

(c) Si $S,T\in\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_b$), on a $S\wedge T$, $S\vee T\in\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_b$).

(d) Si $T_n\in\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_b$) et $T_n\uparrow R$, on a $R\in\mathcal{S}_a$ (resp. $\mathcal{S}_b$).

(e) Soit $T\in\mathcal{S}_b$; pour que $A\in\mathcal{G}_{T-}$ il faut et il suffit que $A\cap\{T=\zeta\}\in\mathcal{G}_{\zeta-}$ et que $T_A\in\mathcal{S}_b$.

Démonstration: (a) Il est clair que $\mathcal{S}_a\subset\mathcal{S}_b$. Si $S\in\mathcal{S}_a$ est annoncé par (S_n) et si $A=\{S=0\}\in\mathcal{G}(0)$, on a $\llbracket S,\zeta\rrbracket=\llbracket 0_A\rrbracket\cup(\bigcap\rrbracket S_n,\zeta\rrbracket)\in\mathcal{P}$, donc $S\in\mathcal{S}_p$. Le fait que $\mathcal{S}_b\subset\mathcal{S}_p$ découle alors immédiatement de (3-2)(b). Enfin il est clair que 0 et ζ sont annonçables, tandis que R'_n est annoncé par la suite constante $S_p=((R_n)_g)_{\{(R_n)_g<R_n\}}$.

(b) Soient $S'=\lim S_n$, $A=\{0<S<\zeta\}$, $B=\bigcap\{S_n<S'\}$, $A'=A\cap B$ et $A''=A\cap B^c$. (1-2) entraine $B\cap\mathcal{G}_{S'-}=B\cap(\bigvee\mathcal{G}_{S_n})$ et $B^c\cap\mathcal{G}_{S'}=B^c\cap(\bigvee\mathcal{G}_{S_n})$. Mais $S'=S$ sur A', donc $A'\cap\mathcal{G}_{S'-}=A'\cap\mathcal{G}_{S-}$ d'après (3-2)(c), car $S\in\mathcal{S}_p$. D'autre part sur A'' on a $\hat{S}'=S$, donc $C\cap\{R_p<S\}=C\cap\{R_p\leq S'\}$ et $C\cap\{(R_p)_g<R_p\leq S\}=C\cap\{(R_p)_g<R_p\}\cap\{(R_p)_g\leq S'\}$ sur A''; comme $\mathcal{G}(p)\subset\mathcal{G}_{(R_p)_g}$, on en déduit $A''\cap\mathcal{G}_{S-}=A''\cap\mathcal{G}_{S'}$, d'où le résultat.

(c) est évident; (e) découle de (a) et de (3-2). Montrons (d): si $T_n\in\mathcal{S}_a$ est annoncé par $(S(n,m))_{m\geq 0}$, il est clair que R est annoncé par $S_n=\bigvee_{p\leq n}S(p,n)$. Si maintenant $T_n\in\mathcal{S}_b$, pour chaque n il existe $S_n\in\mathcal{S}_a$ et $A_n\in\mathcal{G}_{S_n-}$, avec $T_n=(S_n)_{A_n}$. On pose $S'_n=\bigvee_{p\leq n}S_p$ et $B_n=\bigcap_{p\leq n}A_p$: on a $B_n\in\mathcal{G}_{S'_n-}$ et d'après ce qui précède, $S'=\lim S'_n\in\mathcal{S}_a$, donc $B=\bigcap B_n\in\mathcal{G}_{S'-}$ et il nous suffit de remarquer que, comme la suite (T_n) est croissante, on a nécessairement $R=S'_B$.∎

(3-5) DEFINITION: On note $\mathcal{Q}$ la tribu de $\tilde{\Omega}$ engendrée par les $\llbracket S,T\llbracket$ avec $S,T\in\mathcal{S}_b$ et les $A\times[\zeta,\infty]$ avec $A\in\mathcal{G}_{\zeta-}$.

(3-6) PROPOSITION: (a) On a $\mathcal{Q}\subset\mathcal{P}$.

(b) Soient S, $T\in\mathcal{S}_b$ et Y une variable $\mathcal{G}_{S-}$-mesurable. Alors le processus $Y1_{\llbracket S,T\llbracket}$ est $\mathcal{Q}$-mesurable.

(c) Soient $T\in\mathcal{S}_b$ et Y une variable aléatoire. Pour que Y soit $\mathcal{G}_{T-}$-mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un processus $\mathcal{Q}$-mesurable X tel que $Y=X_T$.

(d) Tout processus adapté, continu sur $[0,\zeta[$, tel que X_0 soit $\mathcal{G}(0)$-mesurable et X_ζ, $\mathcal{G}_{\zeta-}$-mesurable, est $\mathcal{Q}$-mesurable.

Démonstration: (a) découle de (3-4)(a). (b) se montre comme en (3-2)(a), en utilisant (3-4)(e). Pour (c), la condition necessaire découle de (b), tandis que la condition suffisante se montre par un argument de classe monotone à partir des indicatrices des ensembles engendrant $\mathcal{Q}$.

Montrons (e): on reprend la démonstration de (2-3). Si $S=T^a_n$, soient $T=T^a_{n+1}$ et $T_n=\zeta\wedge\inf(t>S,\ |X_S-X_t|\geq a-\frac{1}{n}$ ou $|X_S-X_{t-}|\geq a-\frac{1}{n})$. On montre comme en (2-3) que $T_n\in\mathcal{S}$. Mais, comme X est continu sur $[0,\zeta[$, il est facile de voir que la suite (T_n) annonce T. Par suite $T^a_n\in\mathcal{S}_a$ pour tous $n\in\mathbb{N}$, $a>0$, donc d'après (b) les processus $X(n,a)$ sont $\mathcal{Q}$-mesurables, d'où le résultat.∎

Remarque: On peut définir, de manière naturelle, deux autres tribus sur $\tilde{\Omega}$: soient $\mathcal{Q}_p$ (resp. $\mathcal{Q}_a$), angendrée par les $\llbracket S,T\llbracket$ avec $S,T\in\mathcal{S}_p$ (resp. $\mathcal{S}_a$) et par les $A\times[\zeta,\infty]$ avec $A\in\mathcal{G}_{\zeta-}$. On a alors les inclusions $\mathcal{Q}_a\subset\mathcal{Q}\subset\mathcal{Q}_p\subset\mathcal{P}$. Les propriétés de $\mathcal{Q}_p$ sont tout à fait analogues à celles de $\mathcal{Q}$, et on les signalera au passage (sans démonstration); par contre, les propriétés de $\mathcal{Q}_a$ sont différentes, car si $T\in\mathcal{S}_a$ et $A\in\mathcal{G}_{T-}$, on n'a pas nécessairement $T_A\in\mathcal{S}_a$.∎

Nous allons terminer ce paragraphe par une caractérisation des sauts d'un processus continu à droite et limité à gauche.

(3-7) LEMME: Soit X un processus adapté, continu à droite, limité à gauche sur $]0,\zeta[$. Pour tout $T\in\mathcal{S}$, X_{T-} est $\mathcal{G}_{T-}$-mesurable sur $\{T<\zeta\}$.

Démonstration: Soit $\mathcal{T}$ la famille des $T^{1/m}_n$ $(n,m\in\mathbb{N})$ construite dans la démonstration de (2-3). On pose $D=]0,\zeta[\cap(\bigcup_{R\in\mathcal{T}}[R])$ et, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$H_a=\bigcup_{S\in\mathcal{T}}\Big[\{S<T\}\cap\Big(\bigcap_{S'\in\mathcal{T}}(\{S'\leq S\}+\{S'>T\}+\{S\leq S'<T\}\cap\{X_{S'}>a\})\Big)\Big]\in\mathcal{G}_{T-}$$

d'après (1-2). Mais, comme $\overline{D}$ (qui est la "fermeture" de D) est l'ensemble des points de discontinuité de X sur $[0,\zeta]$ lorsque $\mathbb{R}$ est muni de la topologie discrète, tandis que D contient tous les instants de saut de X sur $]0,\zeta[$ (pour la topologie ordinaire de $\mathbb{R}$ cette fois-ci), il n'est pas difficile de voir que

$$\{X_{T-}>a\}\cap\{T<\zeta\}=\{T<\zeta\}\cap(\bigcup_{b>a,\,b\in\mathbb{Q}}H_b)\in\underline{\underline{G}}_{T-}.\ \blacksquare$$

<u>Remarque</u>: Le processus X_- vérifie donc (2), et il est continu à gauche sur $]0,\zeta[$. Cependant il n'est pas prévisible en général, car il ne vérifie pas (3). $\blacksquare$

(3-8) PROPOSITION: <u>Soit X un processus adapté, continu à droite, limité à gauche sur $]0,\zeta[$. Il existe alors une suite (S_n) d'éléments de $\underline{\underline{S}}$, qu'on peut choisir dans $\underline{\underline{S}}_p$ si X **est prévisible**, et tels que $\{S_n=S_m<\zeta\}=\emptyset$ si $m\neq n$ et que $\{X_-\neq X\}\cap]0,\zeta[=]0,\zeta[\cap(\bigcup[S_n])$.</u>

<u>Démonstration</u>: Soit $\underline{\underline{T}}$ comme dans (3-7). On pose $G=\{X\neq X_-\}\cap]0,\zeta[$. Lorsque X est seulement optionnel, on note $\underline{\underline{T}}'$ l'ensemble des $T_{\{X_{T-}\neq X_T\}}$ lorsque T parcourt $\underline{\underline{T}}$. (3-7) entraine $\underline{\underline{T}}'\subset\underline{\underline{S}}$, et il est clair que

$$(4)\qquad G=]0,\zeta[\cap(\bigcup_{S\in\underline{\underline{T}}'}[S]).$$

Supposons maintenant X prévisible. Soient $S=T_n^{1/m}$ et $T=T_{n+1}^{1/m}$: il est évident que $A=\{|X_S-X_T|\geq\frac{1}{m}\}$ est dans $\underline{\underline{G}}_T$ donc $T_A\in\underline{\underline{S}}$. La définition de T entraine que $[T_A]=]S,T]\cap\{|X_S-X_\cdot|\geq\frac{1}{m}\}$, et par hypothèse cet ensemble aléatoire est dans $\underline{\underline{P}}$, donc $T_A\in\underline{\underline{S}}_p$. Enfin (3-7) entraine que $B=\{T_A<\zeta\}\cap\{X_{T_A-}\neq X_{T_A}\}\in\underline{\underline{G}}_{T_A-}$. Par suite $T'=(T_A)_B\in\underline{\underline{S}}_p$: à chaque $T\in\underline{\underline{T}}$ on associe ainsi un $T'\in\underline{\underline{S}}_p$, et on note $\underline{\underline{T}}'$ l'ensemble de ces T'. Il n'est pas difficile de voir que (4) est encore satisfaite par cet ensemble $\underline{\underline{T}}'$.

Soit alors $(T_n)_{n\geq1}$ un rangement quelconque des éléments de $\underline{\underline{T}}'$. Pour obtenir le résultat, il suffit de définir par récurrence $S_1=T_1$ et $S_n=(T_n)_{A_n}$, avec $A_n=\bigcap_{1\leq p<n}\{T_n\neq S_p\}$. $\blacksquare$

4 - INTRODUCTION D'UNE PROBABILITE.

On suppose donnée, à partir de maintenant, une probabilité P sur $(\Omega,\underline{\underline{G}})$. On note $\bar{\underline{\underline{G}}}$ la complétée de $\underline{\underline{G}}$ pour P, et $\underline{\underline{N}}$ l'ensemble des parties P-négligeables de $\bar{\underline{\underline{G}}}$. Soit $\bar{\underline{\underline{G}}}(n)=\underline{\underline{G}}(n)\vee\underline{\underline{N}}$. On note également $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ l'ensemble des parties $A\subset\tilde{\Omega}$ telles que $\{\omega,$ il existe t avec $(\omega,t)\in A\}\in\underline{\underline{N}}$.

On fait les conventions de notation suivantes: si X, Y sont des applications sur Ω (resp. $\tilde{\Omega}$) et si A, B sont des parties de Ω (resp. $\tilde{\Omega}$), on écrit $X\doteq Y$, $A\mathrel{\dot\subset}B$, etc.. lorsque ces relations sont vraies à un ensemble de $\underline{\underline{N}}$ (resp. $\tilde{\underline{\underline{N}}}$) près.

On note $\bar{\underline{\underline{S}}}$ l'ensemble des applications: $\Omega\xrightarrow{T}[0,\infty]$ telles qu'il existe $T'\in\underline{\underline{S}}$ avec $T\doteq T'$. La proposition suivante montre que $\bar{\underline{\underline{S}}}$ est la classe "naturelle" des temps d'arrêt par rapport à la famille $(\bar{\underline{\underline{G}}}(n))$ de tribus.

(4-1) PROPOSITION: <u>Pour que $T\in\bar{\underline{\underline{S}}}$ il faut et il suffit que $[T]\mathrel{\dot\subset}N$ et que $\{T<R_n\}\in\bar{\underline{\underline{G}}}(n)$ pour tout $n\in\bar{\mathbb{N}}$.</u>

<u>Démonstration</u>: La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, supposons la condition de l'énoncé satisfaite. Pour tout $n\in\bar{\mathbb{N}}$ il existe $A_n\in\underline{\underline{G}}(n)$ tel que $\{T<R_n\}\doteq A_n$. Etant données les relations d'inclusion des $\{T<R_n\}$ et le fait que $[T]\mathrel{\dot\subset}N$, on a évidemment

$$(5)\begin{cases}\{R_n<R_m\}\cap A_n\mathrel{\dot\subset}\{R_n<R_m\}\cap A_m\\ \{(R_n)_g=R_n\}\cap A_n\doteq\{(R_n)_g=R_n\}\cap(\bigcup_{m\in\bar{\mathbb{N}}}(\{R_m<R_n\}\cap A_m)).\end{cases}$$

On pose alors $S(\omega)=\zeta(\omega)\wedge\inf(R_n(\omega):\omega\in A_n)$, et

$$T'(\omega)=\begin{cases}S(\omega) & \text{si } \omega\in\bigcup_{n\in\bar{\mathbb{N}}}(\{S=R_n\}\cap A_n^c)\\ S_g(\omega) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Il est clair que $[T']\subset N$ et que

$$\{T'<R_n\}=\left[\{(R_n)_g<R_n\}\cap A_n\right]\cup\left[\bigcup_{m\in\bar{\mathbb{N}}}(A_m\cap\{R_m<R_n\})\right]\in\underline{\underline{G}}(n),$$

donc $T'\in\underline{\underline{S}}$. Par ailleurs en utilisant la première partie de (5) on voit que $\{T'<R_n\}\mathrel{\dot\subset}A_n$, tandis que la seconde partie montre que $A_n\mathrel{\dot\subset}\{T'<R_n\}$: par suite $\{T'<R_n\}\doteq A_n\doteq\{T<R_n\}$. Si alors $B=\{\omega;\ T(\omega)\in n(\omega)$, et $T(\omega)<R_n(\omega)\Leftrightarrow T'(\omega)<R_n(\omega)\}$, il est clair que $B\in\underline{\underline{N}}$ et que $T=T'$ sur B^c, d'où le résultat. $\blacksquare$

Lorsque $T\in\bar{\underline{\underline{S}}}$ on définit alors $\bar{\underline{\underline{G}}}_T$ et $\bar{\underline{\underline{G}}}_{T-}$ par (1-1) à l'aide des $\bar{\underline{\underline{G}}}(n)$. Puis on définit $\bar{\underline{\underline{O}}}$ et $\bar{\underline{\underline{P}}}$ par (2-1) à l'aide de $\bar{\underline{\underline{S}}}$, $\bar{\underline{\underline{G}}}(0)$ et $\bar{\underline{\underline{G}}}$. Un processus est dit $\bar{\underline{\underline{G}}}$-adapté s'il vérifie (3) en dehors d'un ensemble de $\underline{\underline{N}}$, et s'il vérifie (2) pour tout $T\in\bar{\underline{\underline{S}}}$, avec $\bar{\underline{\underline{G}}}_T$. Ensuite on définit $\bar{\underline{\underline{S}}}_p$ à l'aide de $\bar{\underline{\underline{P}}}$, $\bar{\underline{\underline{S}}}_a$ et $\bar{\underline{\underline{S}}}_b$ par (3-3) à l'aide de $\bar{\underline{\underline{G}}}(0)$ et de $\bar{\underline{\underline{S}}}$ en remplaçant égalités et inégalités par égalités et inégalités P-ps, et enfin $\bar{\underline{\underline{Q}}}$ par (3-5) à l'aide de $\bar{\underline{\underline{S}}}_b$.

Etant donné (4-1), il est facile de voir que <u>tous les résultats des paragraphes précédents restent valides si on considère</u> $\bar{\underline{\underline{S}}}$, $\bar{\underline{\underline{S}}}_p$, $\bar{\underline{\underline{S}}}_a$, $\bar{\underline{\underline{S}}}_b$, $\bar{\underline{\underline{O}}}$, $\bar{\underline{\underline{P}}}$, $\bar{\underline{\underline{Q}}}$, à condition de remplacer "adapté" par "$\bar{\underline{\underline{G}}}$-adapté", et les inclusions dans N par des inclusions à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près.

On peut bien entendu comparer ces nouveaux concepts à ceux définis précédemment, ce qui est très facile en utilisant la définition de $\bar{\underline{\underline{S}}}$ et (4-1). Nous laissons donc au lecteur le soin de montrer que:

(4-2) PROPOSITION: (a) <u>Si $T\in\bar{\underline{\underline{S}}}$ et si $T'\in\underline{\underline{S}}$ avec $T\doteq T'$, alors $\bar{\underline{\underline{G}}}_T=\underline{\underline{G}}_{T'}\vee\underline{\underline{N}}$ et $\bar{\underline{\underline{G}}}_{T-}=\underline{\underline{G}}_{T'-}\vee\underline{\underline{N}}$.</u>

(b) <u>On a $\bar{\underline{\underline{S}}}_p=\{T:\ \exists T'\in\underline{\underline{S}}_p,\ T\doteq T'\}$, $\bar{\underline{\underline{S}}}_a=\{T:\ \exists T'\in\underline{\underline{S}}_a,\ T\doteq T'\}$ et $\bar{\underline{\underline{S}}}_b=\{T:\ \exists T'\in\underline{\underline{S}}_b,\ T\doteq T'\}$.</u>

(c) <u>On a $\underline{\underline{O}}\subset\bar{\underline{\underline{O}}}\subset\underline{\underline{O}}\vee\tilde{\underline{\underline{N}}}$, $\underline{\underline{P}}\subset\bar{\underline{\underline{P}}}\subset\underline{\underline{P}}\vee\tilde{\underline{\underline{N}}}$, $\underline{\underline{Q}}\subset\bar{\underline{\underline{Q}}}\subset\underline{\underline{Q}}\vee\tilde{\underline{\underline{N}}}$.</u>

Enfin, on peut améliorer (2-3):

(4-3) PROPOSITION: <u>Tout processus $\bar{\underline{\underline{G}}}$-adapté, continu à droite, est $\bar{\underline{\underline{O}}}$-mesurable.</u>

<u>Démonstration</u>: On reprend la preuve de (2-3), en définissant cette fois-ci les T_i^a par récurrence transfinie pour tout ordinal dénombrable i. De manière classique, on sait que pour tout $a>0$ il existe un tel ordinal i tel que $P(T_i^a=\zeta)=1$. Le processus $X^a=X(i,a)$ est $\bar{\underline{\underline{O}}}$-mesurable, et X^a tend vers X lorsque $a=1/n\to0$, sauf sur un ensemble de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$, d'où le résultat. $\blacksquare$

5 - LES THEOREMES DE SECTION.

Dans ce paragraphe, on reprend essentiellement la méthode de [1]. Nous donnons cependant des démonstrations complètes car il s'introduit quelques difficultés techniques.

Commençons par quelques notations. Si $A\subset\tilde{\Omega}$, on pose $p(A)=\{\omega:\ \exists t<\zeta(\omega),\ (\omega,t)\in A\}$ (ce n'est donc pas exactement la "projection" de A). Soit $R\in\underline{\underline{S}}$ fixé. On pose $\tilde{\Omega}^R=[0,R]\cap(\{R<\zeta\}\times[0,\zeta[)$ et pour tout $A\subset\tilde{\Omega}$ on écrit $A^R=A\cap\tilde{\Omega}^R$. Pour tout $n\in\bar{\mathbb{N}}$ on pose $R_n^R=(R_n)_{\{R_n\leq R\}}$ et $\underline{\underline{G}}^R(n)=\underline{\underline{G}}_R$: remarquons que la famille $(\underline{\underline{G}}^R(n))^n$ est constante. Il est facile de voir que la famille $(R_n^R,\underline{\underline{G}}^R(n))_{n\in\bar{\mathbb{N}}}$

verifie (H-1) et (H-2) (avec $R^R_\infty = \zeta$), et on peut donc lui associer par (1-1) et (2-1) une famille $\underline{\underline{S}}^R$ de temps d'arrêt et une tribu optionnelle $\underline{\underline{O}}^R$.

Il n'y a pas de relation d'inclusion entre $\underline{\underline{O}}$ et $\underline{\underline{O}}^R$. Cependant si $T \in \underline{\underline{S}}$ on a $T \wedge R \in \underline{\underline{S}}^R$; comme $\llbracket \zeta \rrbracket^R = \emptyset$ et $\llbracket S,T\llbracket^R = \llbracket S\wedge R, T\wedge R\llbracket^R$, il vient alors

$$(6) \qquad \underline{\underline{O}} \cap \tilde{\Omega}^R \subset \underline{\underline{O}}^R \cap \tilde{\Omega}^R .$$

On note $\underline{\underline{H}}^R$ la classe des intervalles $\llbracket S,T\rrbracket^R$, où $S, T \in \underline{\underline{S}}^R$. On considère les classes $\underline{\underline{K}}^R$ et $\underline{\underline{L}}^R$, stabilisées de $\underline{\underline{H}}^R$ pour $(\cup f, \cap f)$ et $(\cup d, \cap d)$. Enfin à tout $A \subset \tilde{\Omega}^R$ on associe $I^R(A) = P^*(p(A))$, où P^* désigne la probabilité extérieure associée à P.

(5-1) LEMME: <u>On a</u> $\underline{\underline{L}}^R = \underline{\underline{O}}^R \cap \tilde{\Omega}^R$.

<u>Démonstration</u>: Comme $\llbracket \zeta \rrbracket^R = \emptyset$, $\underline{\underline{O}}^R \cap \tilde{\Omega}^R$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{H}}^R$, et il nous suffit de montrer que le complémentaire de $\llbracket S,T\rrbracket^R$ dans $\tilde{\Omega}^R$ est, pour tous $S, T \in \underline{\underline{S}}^R$, dans $\underline{\underline{L}}^R$. Or ce complémentaire n'est autre que $\llbracket 0,S\llbracket^R \cup \rrbracket T,\zeta\rrbracket^R$ (rappelons que $\zeta \in \underline{\underline{S}}^R$). Mais d'une part $T_n = (R^R_n)_{\{T<R^R_n\}} \in \underline{\underline{S}}^R$ et $\rrbracket T,\zeta\rrbracket^R = \bigcup \llbracket T_n,\zeta\rrbracket^R$. D'autre part $S' = 0_{\{S>0\}} \in \underline{\underline{S}}^R$ et, comme les tribus $\underline{\underline{G}}^R(n)$ sont constantes, les applications suivantes appartiennent aussi à $\underline{\underline{S}}^R$:

$$S_n = \begin{cases} R^R_n & \text{si } R^R_n < S \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad S'' = \begin{cases} \bigvee S_n & \text{si } S_g < S \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

il suffit alors de remarquer que $\llbracket 0,S\llbracket^R = [(\bigcup_{(n)} \llbracket 0,S_n\rrbracket^R) \cup \llbracket 0,S''\rrbracket^R] \cap \llbracket S',\zeta\rrbracket^R$. ■

Si A est une partie de $\tilde{\Omega}$, on note D_A le "début" de A, défini par $D_A(\omega) = \inf(t: (\omega,t) \in A)$.

(5-2) LEMME: (a) <u>Si</u> $A \in (\underline{\underline{K}}^R)_\delta$, <u>on a</u> $p(A) \in \underline{\underline{G}}_R$, $[D_A]^R \subset A$ <u>et</u> $D_A \in \underline{\underline{S}}^R$.
(b) I^R <u>est une</u> $\underline{\underline{K}}^R$<u>-capacité sur</u> $\tilde{\Omega}^R$.

<u>Démonstration</u>: Si $A \in \underline{\underline{K}}^R$ les propriétés (a) sont évidentes. Soit maintenant (A_n) une suite de $\underline{\underline{K}}^R$ décroissant vers A. Les coupes $A_n(\omega)$ des A_n sont constituées de réunion finies d'intervalles de la forme $[s,t]$ (resp. $[s,t[$), avec $s \in n(\omega)$ et $t \in n(\omega)$ (resp. $t \in \overline{m}(\omega) \setminus f(\omega)$); mais dans ce dernier cas, on a $t_g < t$, et il est facile de voir que la classe constituée de tels intervalles est une classe compacte. On en déduit que $p(A) = \lim\downarrow p(A_n) \in \underline{\underline{G}}_R$, et donc $I^R(A) = P(p(A)) = \lim P(p(A_n)) = \lim I^R(A_n)$; par suite on a (b).

Soit maintenant $T = \lim\uparrow D_{A_n} \in \underline{\underline{S}}^R$. On a $p(A_n) = p(A_n \cap \llbracket 0,T\rrbracket)$ car $T \geq D_{A_n}$, et pour la même raison que ci-dessus, $p(A \cap \llbracket 0,T\rrbracket) = \bigcap p(A_n \cap \llbracket 0,T\rrbracket) = p(A)$, d'où il découle clairement que $T = D_A$ et $[T]^R \subset A$ (car, a-priori, $T \leq D_A$), et on a le résultat. ■

(5-3) THEOREME: <u>Soit</u> $A \in \overline{\underline{\underline{O}}}$. <u>Alors</u> $p(A) \in \overline{\underline{\underline{G}}}$ <u>et</u> $\check{D}_A \in \overline{\underline{\underline{S}}}$.

<u>Démonstration</u>: D'après (4-2) il suffit de montrer le résultat lorsque $A \in \underline{\underline{O}}$. Soit $R \in \underline{\underline{S}}$. (6), (5-1) et (5-2)(b) montrent que A^R est I^R-capacitable, donc (5-2)(a) entraine que $p(A^R) \in \overline{\underline{\underline{G}}}_R$. Comme $p(A) = \bigcup_{R \in \underline{\underline{R}}} p(A^R)$ on a $p(A) \in \overline{\underline{\underline{G}}}$. Par ailleurs $p(A^R) = \{\check{D}_A \leq R < \zeta\}$, et $\{\check{D}_A \leq R = \zeta\} = \{R = \zeta\} \in \underline{\underline{G}}_R$, donc $\{\check{D}_A \leq R\} \in \overline{\underline{\underline{G}}}_R$. Comme $[\check{D}_A] \subset N$, on a le résultat. ■

(5-4) COROLLAIRE: <u>Soit</u> $A \in \overline{\underline{\underline{O}}}$ (<u>resp.</u> $\overline{\underline{\underline{P}}}$). <u>Si</u> $[D_A] \cap [0,\zeta[\,\dot{\subset}\, A$, <u>on a</u> $D_A \in \overline{\underline{\underline{S}}}$ (<u>resp.</u> $\overline{\underline{\underline{S}}}_p$).

<u>Démonstration</u>: Comme on a alors $D_A \doteq \check{D}_A$, lorsque $A \in \overline{\underline{\underline{O}}}$ le résultat n'est autre que (5-4). De plus $\llbracket D_A\rrbracket = \llbracket \zeta\rrbracket \cup (\llbracket 0,D_A\rrbracket \cap A)$, qui est $\overline{\underline{\underline{P}}}$-mesurable si A l'est, d'où la fin. ■

(5-5) PROPOSITION (<u>Section complete</u>): <u>Soit</u> $A \in \overline{\underline{\underline{O}}}$. <u>Il existe une variable</u> T (dite "section complète de A") <u>vérifiant</u> $\{T < R_n\} \in \overline{\underline{\underline{G}}}$ $\forall n \in \overline{\mathbb{N}}$, <u>telle que</u> $[T] \subset N$, $[T] \cap [0,\zeta[\subset A$ <u>et</u> $P(p(A)) = P(T<\zeta)$.

<u>Démonstration</u>: Comme dans (5-3) on peut supposer $A \in \underline{\underline{O}}$. Comme nous cherchons une variable "mesurable", mais pas un temps d'arrêt, ce n'est pas une restriction que de supposer dans cette proposition que $\underline{\underline{G}}(n) = \underline{\underline{G}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$: autrement dit, on va obtenir un théorème de section complète, non seulement pour les ensembles optionnels, mais pour tous les ensembles "mesurables", en un sens évident.

Soit $R \in \underline{\underline{S}}$. On va d'abord montrer le théorème pour $A \subset \tilde{\Omega}^R$. Là encore, tout $B \in \underline{\underline{O}} \cap \tilde{\Omega}^R$ est I^R-capacitable, donc il existe $B' \subset B$, $B' \in (\underline{\underline{K}}^R)_\delta$, avec $P(p(B)) \leq 2P(p(B'))$, et $T(B) = D_{B'}$ vérifie $[T(B)]^R \subset B \cap N$ et $P(p(B)) \leq 2P(T(B)<\zeta)$. On construit alors par récurrence $A_1 = A$, $T_n = T(A_n)$, $A_{n+1} = A_n \cap (\{T_n<\zeta\} \times [0,\infty])^c$; comme tous les $\underline{\underline{G}}(n)$ sont égaux, chaque A_n appartient à $\underline{\underline{O}}$ et cette construction est donc possible. Il nous reste alors, pour obtenir une section complète T de A, à poser $T = \bigwedge T_n$ et à remarquer que $P(p(A_{n+1})) \leq \frac{1}{2} P(p(A_n))$ tend vers 0 quand $n \uparrow \infty$.

Passons maintenant au cas général. On range en une suite (S_n) les éléments de $\underline{\underline{R}}$. On pose $A_1 = A^{S_1}$ et $A_{n+1} = A^{S_{n+1}} \cap (\bigcup_{q<n} (\{T_n<\zeta\} \times [0,\infty]))^c$, où T_n désigne une section complète de A_n. Là encore, tous les $\underline{\underline{G}}(n)$ étant égaux, on a $A_n \in \underline{\underline{O}} \cap \tilde{\Omega}^{S_n}$, et cette construction est possible. Il suffit encore de poser $T = \bigwedge T_n$ pour obtenir la section cherchée, en remarquant que les $p(A_n)$ sont disjoints deux-à-deux et que la réunion des A_n est $A \cap [0,\zeta[$. ■

(5-6) THEOREME (<u>Section</u>): <u>Soient</u> $A \in \overline{\underline{\underline{O}}}$ (<u>resp.</u> $\overline{\underline{\underline{Q}}}$) <u>et</u> $a > 0$. <u>Il existe</u> $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$ (<u>resp.</u> $\overline{\underline{\underline{S}}}_b$) <u>tel que</u> $[T] \cap [0,\zeta[\subset A$ <u>et</u> $P(p(A)) \leq P(T<\zeta) + a$.

<u>Démonstration</u>: Nous suivons [1] de très près. On a $\tilde{\Omega}'' = [0,\zeta[= \llbracket \zeta\rrbracket^c \in \underline{\underline{Q}}$. D'après (4-2) on peut donc supposer que $A \subset \tilde{\Omega}''$ et $A \in \underline{\underline{O}}$ (resp. $\underline{\underline{Q}}$). Soit R une section complète de A. Pour tout processus borné X on pose $m(X) = E(X_R 1_{\{R<\zeta\}})$, ce qui définit une mesure positive m sur $(\tilde{\Omega}'', \underline{\underline{O}} \cap \tilde{\Omega}'')$, portée par A et de masse $m(A) = P(p(A))$.

Notons $\underline{\underline{H}}$ ((resp. $\underline{\underline{K}}$) l'ensemble des réunions finies d'intervalles $\llbracket S,T\llbracket$ avec $S, T \in \underline{\underline{S}}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_b$); il est facile de voir que $\underline{\underline{H}} \cap \tilde{\Omega}''$ et $\underline{\underline{K}} \cap \tilde{\Omega}''$ sont des algèbres engendrant $\underline{\underline{O}} \cap \tilde{\Omega}''$ et $\underline{\underline{Q}} \cap \tilde{\Omega}''$; si $B \in \underline{\underline{H}}$ (resp. $\underline{\underline{K}}$) on a $[D_B] \cap [0,\zeta[\subset B$ et $D_B \in \underline{\underline{S}}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_b$); enfin si $B \in (\underline{\underline{H}})_\delta$ (resp. $(\underline{\underline{K}})_\delta$) on a aussi $[D_B] \cap [0,\zeta[\subset B$.

D'après un résultat classique de théorie de la mesure, il existe $B \subset A$, $B \in (\underline{\underline{H}})_\delta$ (resp. $(\underline{\underline{K}})_\delta$) avec $m(B) \geq m(A) - a$. Si $T = D_B$ on a donc $[T] \cap [0,\zeta[\subset A$ et $P(p(A)) = m(A) \leq m(B) + a = P(T<\zeta) + a$. D'après (5-3) on a $\check{T} = T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$.

Il nous reste à montrer que $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$ lorsque $A \in \underline{\underline{Q}}$. Mais B est limite d'une suite décroissante $B_n \in \underline{\underline{K}}$. Comme $\underline{\underline{S}}_b$ est stable pour $(\vee d)$, il existe $S \in \underline{\underline{S}}_b$ tel que S soit l'enveloppe supérieure essentielle de la classe $\underline{\underline{S}}' = \{V \in \underline{\underline{S}}_b, V \leq T\}$. Soit $C_n = B_n \cap \llbracket S,\zeta\llbracket$. On a $S \leq T$, donc $B \subset C_n \subset B_n$

et $B=\bigcap C_n$; on a $C_n \in \underline{\underline{K}}$, donc $D_{C_n} \in \underline{\underline{S}}_b$ et comme $S \leq D_{C_n} \leq T$ on doit avoir $S \doteq D_{C_n}$ d'après la propriété d'ess-sup de S. Mais alors $[S]\bigcap[0,\zeta[\,\dot{\subset}\, C_n$, ce qui entraine $[S]\bigcap[0,\zeta[\,\dot{\subset}\, B$, et comme $S \leq T$ on doit avoir $S \doteq T$. Autrement dit $T \in \underline{\underline{S}}_b$. ∎

Remarque: On a un résultat analogue concernant les éléments de $\underline{\underline{Q}}_p$, avec des sections appartenant à $\overline{\underline{\underline{S}}}_p$. Par contre on ne sait rien sur les sections prévisibles d'ensembles prévisibles. ∎

6 - MARTINGALES ET SURMARTINGALES.

Il nous faut maintenant une définition des martingales adaptée à notre propos. Nous nous contenterons de donner les propriétés qui nous seront indispensables pour la suite. On pose $\widetilde{F}=\bigcup_{R\in \underline{\underline{R}}}[R]$, et on ordonne les éléments de $\underline{\underline{R}}$ en une suite (S_n).

(6-1) DEFINITIONS: (a) *Une surmartingale (resp. martingale) est un processus $\overline{\underline{\underline{G}}}$-adapté X tel que pour tous $S,T\in \overline{\underline{\underline{S}}}$,*

$$(7) \qquad X_T \geq E(X_S|\overline{\underline{\underline{G}}}_T) \quad (\text{resp. } = E(X_S|\overline{\underline{\underline{G}}}_T)) \quad \text{sur } \{T\leq S\}$$

(cette définition suppose bien-sûr que ces espérances conditionnelles ont un sens, par exemple si $X_S \geq 0$ ou si X_S est intégrable).

(b) *Une $\widetilde{F}$-surmartingale (resp. martingale) est une application: $\widetilde{F} \xrightarrow{X} \mathbb{R}$ telle que pour tous $S,T\in\overline{\underline{\underline{S}}}$ avec $[S]\subset\widetilde{F}$ et $[T]\subset\widetilde{F}$, X_T est $\overline{\underline{\underline{G}}}_T$-mesurable et (7) est vérifiée.*

Nous voyons que la définition (a) introduit automatiquement la variable "terminale" $X_\infty = X_\zeta$. On dit qu'une surmartingale X est *de classe (D)* si la famille $(X_T)_{T\in\overline{\underline{\underline{S}}}}$ est uniformément intégrable. Dans les définitions ci-dessus on peut évidemment remplacer $\overline{\underline{\underline{S}}}$ par $\underline{\underline{S}}$. Enfin, toute surmartingale est une $\widetilde{F}$-surmartingale.

Le lemme suivant se montre comme son équivalent classique, étant donné que F est à coupes dénombrables:

(6-2) LEMME: *Toute $\widetilde{F}$-surmartingale X de classe (D), ou positive et telle que $E(X_0)<\infty$, est P-ps limitée à droite et à gauche le long de $\widetilde{F}$.*

Soit maintenant une application: $\widetilde{F}\xrightarrow{X}\mathbb{R}$, P-ps limitée à droite et à gauche le long de $\widetilde{F}$, telle que X_T soit $\overline{\underline{\underline{G}}}_T$-mesurable pour tout $T\in\underline{\underline{S}}$ tel que $[T]\subset\widetilde{F}$. On pose

$$(8) \qquad Y_t = \begin{cases} X_\zeta & \text{si } t \geq \zeta \\ X_{(R_n)_g} & \text{si } (R_n)_g \leq t < R_n \\ \lim\sup(X_s;\ s\in\widetilde{F}, s>t, s\downarrow) & \text{sinon.}\end{cases}$$

(6-3) LEMME: *Y est un processus $\overline{\underline{\underline{G}}}$-adapté, P-ps continu à droite et limité à gauche.*

Démonstration: Si $\hat{N}\in\underline{\underline{N}}$ est l'ensemble en dehors duquel X est limité à droite et à gauche le long de $\widetilde{F}$, il est clair que Y est continu à droite, limité à gauche et vérifie (3), en dehors de $\hat{N}$. Soit alors $T\in\overline{\underline{\underline{S}}}$. Par construction on a $Y_T=X_T$ sur l'ensemble $\overline{\underline{\underline{G}}}_T$-mesurable $A=\{T=\zeta\}\bigcup(\bigcup\{(R_n)_g = T<R_n\})$. Soit $S=T_{A^c}$: si $S'_n=(S_n)_{\{S<S_n\}}$ (rappelons que (S_n) désigne un dénombrement des éléments de $\underline{\underline{R}}$), on peut de manière classique modifier cette suite (S'_n) de façon à obtenir une suite décroissante (S''_n) de temps d'arrêt tels que $[S''_n]\subset\widetilde{F}$, et $S'=\lim\downarrow S''_n=\bigwedge S'_n$. De plus, d'après la définition de S, on a $S=\overset{\vee}{S}{}'$. Mais $Y_S=\lim_n X_{S''_n}$, donc Y_S est $\overline{\underline{\underline{G}}}_S=\bigcap\overline{\underline{\underline{G}}}_{S''_n}$-mesurable d'après (1-2)(i). Comme $T=S\bigwedge T_A$, le résultat découle de (1-2)(h). ∎

(6-4) PROPOSITION: *Soit X une surmartingale de classe (D), ou positive et telle que $E(X_0)<\infty$. Pour qu'il existe une surmartingale Y continue à droite et limitée à gauche, telle que $Y_T\doteq X_T$ $\forall T\in\overline{\underline{\underline{S}}}$ il faut et il suffit que $\lim\uparrow E(X_{T_n}) = E(X_{\overset{\vee}{T}})$ pour toute suite $T_n\in\overline{\underline{\underline{S}}}$ décroissant vers T.*

Démonstration: La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons la condition vérifiée. D'après (6-2), la restriction de X à $\widetilde{F}$ vérifie les conditions de (6-3) et on définit donc Y par (8). Soit $T\in\overline{\underline{\underline{S}}}$; on reprend les notations de (6-3): comme X est une surmartingale vérifiant de "bonnes" hypothèses, on a $Y_S=\lim_n E(X_{S''_n}|\overline{\underline{\underline{G}}}_S)\leq X_S$; par ailleurs $E(Y_S)=\lim\uparrow E(X_{S''_n})=E(X_S)$ par hypothèse puisque $\overset{\vee}{S}{}'=S$, et on en déduit $Y_S\doteq X_S$, d'où $Y_T\doteq X_T$ et on obtient le résultat (on trouve une version satisfaisant les conditions demandées en posant $Y=0$ sur l'ensemble où les trajectoires ne sont pas continues à droite et limitées à gauche). ∎

Il découle de ce résultat que toute martingale de classe (D) admet une "modification" continue à droite et limitée à gauche.

Dans la suite, on fait les *conventions suivantes*: le terme "martingale" désigne une martingale *de classe (D)* dont *toutes* les trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche, et on identifie deux martingales si elles diffèrent seulement sur une partie de $\underline{\underline{N}}$.

(6-5) PROPOSITION: *La formule $X_T=E(Z|\underline{\underline{G}}_T)$ $(T\in\underline{\underline{S}})$ définit une correspondance bi-univoque entre les éléments $Z\in L^1(\Omega,\overline{\underline{\underline{G}}},P)$ et les martingales X.*

Démonstration: Si X est une martingale, on pose $Z=X_\zeta$. Inversement, soit $Z\in L^1(\Omega,\overline{\underline{\underline{G}}},P)$. On définit une application: $\widetilde{F}\xrightarrow{X}\mathbb{R}$ en posant $X_\zeta=Z$ et $X_{S_n}=E(Z|\underline{\underline{G}}_{S_n})$ sur l'ensemble $\{S_n<\zeta\}\bigcap(\bigcap_{p<n}\{S_n\neq S_p\})$. Il est évident que X est une $\widetilde{F}$-martingale. On définit Y par (8) et on montre comme en (6-3) et (6-4) que Y est une martingale, solution de notre problème. ∎

Jusqu'à présent, on s'est contenté de dire que ζ est annonçable; mais on peut préciser un peu la structure de ζ. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des familles $\underline{T}=(T_n)$ croissantes de temps d'arrêt, de limite ζ_g, et posons $B(\underline{T})=\bigcap\{T_n<\zeta\}$. Comme $B(\underline{T})\bigcup B(\underline{T}')=B(\underline{T}'')$ avec $\underline{T}''=(T_n\bigwedge T'_n)$, on peut définir une version $A(\zeta)$ de l'ess-sup des $B(\underline{T})$ lorsque $\underline{T}$ parcourt $\mathcal{T}$. Il est clair que $A(\zeta)\in\overline{\underline{\underline{G}}}_{\zeta-}$, et $A(\zeta)^c$ a le sens de la partie "totalement inaccessible" de ζ.

(6-6) PROPOSITION: *Soit X une martingale. Si $T_n\in\overline{\underline{\underline{S}}}$ croit vers T, on a $\lim_n X_{T_n}=E(X_T|\bigvee\overline{\underline{\underline{G}}}_{T_n})$. Si $T\in\overline{\underline{\underline{S}}}_b$, on a $X_{T-}=E(X_T|\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-})$ sur $\{0<T<\zeta\}\bigcup(\{T=\zeta\}\bigcap A(\zeta))$.*

Démonstration: La première partie découle simplement de ce que $(X_{T_n},\overline{\underline{\underline{G}}}_{T_n})$ est une martingale discrète. Si $T\in\overline{\underline{\underline{S}}}_a$ est annoncé par (T_n) on a $\lim_n X_{T_n}=X_{T-}$ sur $\{0<T<\zeta\}$ et on déduit de la première partie et de (3-4)(b) que $X_{T-}=E(X_T|\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-})$ sur $\{0<T<\zeta\}$. On a de même $X_{\zeta-}=E(X_\zeta|\overline{\underline{\underline{G}}}_{\zeta-})$ sur $B(\underline{T})$ pour tout $\underline{T}\in\mathcal{T}$. D'après la définition même de $\overline{\underline{\underline{S}}}_b$ on en déduit alors la seconde partie de l'énoncé. ∎

7 - LES PROCESSUS CROISSANTS.

Nous introduisons maintenant, avant de parler des processus croissants, les ensembles "mesurables" (qu'on a déjà vu timidement apparaître lors des théorèmes de section). Pour tout $n \in \bar{\mathbb{N}}$ on pose $\mathcal{G}^\circ(n) = \mathcal{G}$: par (1-1) et (2-1) on peut associer à la famille $(\mathcal{G}^\circ(n))_{n \in \bar{\mathbb{N}}}$, qui vérifie (H-2), une famille $\mathcal{S}^\circ$ et une tribu "optionnelle" $\mathcal{O}^\circ$, dite tribu <u>mesurable</u>. On introduit également $\bar{\mathcal{S}}^\circ$ et $\bar{\mathcal{O}}^\circ \vee \tilde{\mathcal{N}}$.

Enfin, une <u>notation</u>: si $T \in \bar{\mathcal{S}}^\circ$ on pose

$$(9) \qquad [0,T\mathclose{[\![} = [\![0,T]\!] \cap (\{T < \zeta\} \times [\zeta,\infty])^c .$$

(7-1) LEMME: <u>Si $\mathcal{H}$ est la tribu engendrée par les processus $Z1_{[0,S_n[\![}$ où Z est une variable $\mathcal{G}$-mesurable quelconque, on a $\mathcal{H} = \mathcal{O}^\circ$</u>. (On désigne encore par (S_n) un dénombrement de $\mathcal{R}$).

<u>Démonstration</u>: Soit d'abord $T \in \mathcal{S}^\circ$ tel que $[T] \subset \tilde{F}$. Si $A_n = \{T = S_n\} \cap (\bigcap_{p<n} \{T \neq S_p\})$, les (A_n) constituent une partition $\mathcal{G}$-mesurable de Ω, et on a

$$1_{[0,T[\![} = \sum_{(n)} 1_{A_n} 1_{[\![0,S_n[\![} ,$$

donc $[0,T[\![\in \mathcal{H}$. Si $T \in \mathcal{S}^\circ$, soit $T_n = (S_n)_{\{S_n < T\}} \wedge 0_{\{S_n \geq T\}}$, qui appartient à $\mathcal{S}^\circ$ et vérifie $[T_n] \subset \tilde{F}$. On a $[\![0,T[\![= \bigcup [\![0,T_n]\!]$ et $[\![0,T_n]\!] = [\![0,T_n[\![\cup [\![\zeta]\!]$; par ailleurs $A \times [0,\infty] \in \mathcal{H}$ si $A \in \mathcal{G}$, et $A \times [\zeta,\infty] = (A \times [0,\infty]) \cap [\![\zeta]\!]$. Il nous reste donc à montrer que $[\![\zeta]\!] \in \mathcal{H}$. Mais si on associe T_n à ζ comme ci-dessus à T, on a $[\![\zeta]\!]^c = \bigcup_{(n)} \big[[\![0,T_n[\![\cap (\{T_n < \zeta\} \times [0,\infty])\big] \in \mathcal{H}$. ∎

Par définition, un <u>processus croissant</u> est un processus $\mathcal{O}^\circ$-mesurable dont toutes les trajectoires sont croissantes, continues à droite, nulles en 0. On note $\mathcal{A}^\circ$ l'ensemble de ces processus, et $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_p$) la partie de $\mathcal{A}^\circ$ constituée des éléments optionnels (resp. prévisibles). Soit $\bar{\mathcal{V}}^\circ$ (resp. $\bar{\mathcal{V}}$, $\bar{\mathcal{V}}_p$) l'ensemble des processus A qui diffèrent d'un élément de $\mathcal{A}^\circ$ (resp. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_p$) sur une partie de $\tilde{\mathcal{N}}$ seulement, et qui sont <u>intégrables</u>, i.e. $E(A_\zeta) < \infty$.

Une suite d'applications (T_n) est dite <u>à graphes disjoints</u> si $\forall m \neq n$, $\{T_n = T_m < \zeta\} = \emptyset$. Soit $A \in \mathcal{A}^\circ$, A^c sa "partie continue" définie de manière classique. D'après (3-8) il existe une suite (T_n) d'éléments de $\mathcal{S}^\circ$, à graphes disjoints, telle que

$$(10) \qquad A = A^c + \sum_{(n)} \Delta A_{T_n} 1_{\{T_n < \zeta\}} 1_{[\![T_n,\zeta[\![} + \Delta A_\zeta 1_{[\![\zeta]\!]} ;$$

de plus si A est optionnel (resp. prévisible), on peut choisir les T_n dans $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_p$), et on a alors ΔA_{T_n} $\mathcal{G}_{T_n}$ (resp. $\mathcal{G}_{T_n-}$) -mesurable. On peut d'ailleurs montrer que tout processus croissant prévisible est $\mathcal{Q}_p$-mesurable.

Par un argument de classe monotone, on voit que pour tout processus $\mathcal{O}^\circ$-mesurable, les trajectoires $X_{\cdot}(\omega)$ sont boréliennes. On peut donc poser, pour $A \in \mathcal{A}^\circ$:

$$X \cdot A_t = \begin{cases} \lim_{s \downarrow t} \int_0^s X_u dA_u & \text{si cette expression a un sens,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui définit un processus $X \cdot A$ continu à droite. Si $X \geq 0$ on a bien-sûr $X \cdot A \in \mathcal{A}^\circ$. De même lorsque $A \in \bar{\mathcal{V}}^\circ$ et X est $\bar{\mathcal{O}}^\circ$-mesurable, on définit $X \cdot A$ de manière évidente, en dehors d'une partie de $\tilde{\mathcal{N}}$.

En prenant d'abord pour X les indicatrices d'ensembles qui engendrent les tribus $\mathcal{O}^\circ$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$, et en utilisant encore un argument de classe monotone, on montre facilement:

(7-2) PROPOSITION: <u>Soient $A \in \mathcal{A}^\circ$ et X un processus $\mathcal{O}^\circ$-mesurable. Alors $X \cdot A$ est $\mathcal{O}^\circ$-mesurable. Si de plus X et A sont optionnels (resp. prévisibles), $X \cdot A$ est optionnel (resp. prévisible)</u>.

Soit $A \in \mathcal{A}^\circ$ (ou $A \in \bar{\mathcal{V}}^\circ$). La formule $M_A(X) = E(X \cdot A_\zeta)$, où X est un processus $\bar{\mathcal{O}}^\circ$-mesurable positif, définit une mesure M_A sur $(\tilde{\Omega}, \bar{\mathcal{O}}^\circ)$, finie lorsque A est intégrable, et qui vérifie évidemment:

$$(11) \qquad M_A([\![0]\!]) = 0 , \qquad B \in \tilde{\mathcal{N}} \Rightarrow M_A(B) = 0 .$$

(7-3) THEOREME: <u>Soit m une mesure finie sur $(\tilde{\Omega}, \bar{\mathcal{O}}^\circ)$, vérifiant (11). Il existe un $A \in \bar{\mathcal{V}}^\circ$ tel que $M_A = m$. Cet A est unique à une partie de $\tilde{\mathcal{N}}$ près, et on peut en choisir une version dans $\mathcal{A}^\circ$</u>.

<u>Démonstration</u>: Là encore, on suit [1]. Pour tout n on définit une mesure Q_n sur $(\Omega, \bar{\mathcal{G}})$ en posant $Q_n(H) = m(1_H 1_{[\![0,S_n[\![})$. D'après (11) on a $Q_n \ll P$, et on note $X(n)$ une version de la dérivée de Radon-Nikodym dQ_n/dP. Si $H \subset \{S_n \leq S_m\}$, il est clair que $1_H 1_{[\![0,S_n[\![} \leq 1_H 1_{[\![0,S_m[\![}$, donc $Q_n(H) \leq Q_m(H)$: on en déduit facilement que $X(n) \stackrel{\bullet}{\leq} X(m)$ sur $\{S_n \leq S_m\}$. Il est alors facile de construire une application: $\tilde{F} \xrightarrow{X} \mathbb{R}$ telle que $X_{S_n} \stackrel{\bullet}{=} X(n)$ pour tout n, et qui est croissante le long de $\tilde{F}$. On définit alors Y par (8), et (6-3) implique que Y est $\bar{\mathcal{O}}^\circ$-mesurable. D'autre part Y est évidemment croissant et $E(Y_0) = E(X_0) = m([\![0]\!]) = 0$, donc $Y_0 = 0$. De plus $E(Y_\zeta) = E(X_\zeta) = m([\![0,\zeta[\![) = m(\tilde{\Omega}) < \infty$, donc $Y \in \bar{\mathcal{V}}^\circ$. Par définition de M_Y on a

$$M_Y(1_H 1_{[\![0,S_n[\![}) = E(1_H Y_{S_n}) = E(1_H X(n)) = Q_n(H) = m(1_H 1_{[\![0,S_n[\![})$$

et d'après (7-1) on a donc $M_Y = m$. Le même type de raisonnement montre que si $Y' \in \bar{\mathcal{V}}^\circ$ vérifie $M_{Y'} = M_Y$, on a

$Y'_{S_n} \stackrel{\bullet}{=} Y_{S_n}$ pour tout n, d'où l'unicité à une partie de $\tilde{\mathcal{N}}$ près. Enfin le fait de pouvoir choisir une version de Y appartenant à $\mathcal{A}^\circ$ est laissé au lecteur. ∎

(7-4) PROPOSITION: <u>Soit $A \in \mathcal{A}$. Soient X et Y deux processus $\bar{\mathcal{O}}^\circ$-mesurables positifs, tels que $E(X_S 1_{\{S < \zeta\}}) = E(Y_S 1_{\{S < \zeta\}})$ $\forall S \in \mathcal{S}$. Alors $E(X \cdot A_{\zeta-}) = E(Y \cdot A_{\zeta-})$</u>.

<u>Démonstration</u>: Posons $c(s) = \zeta \wedge \inf(t : A_t > s)$. (5-3) implique que $\check{c}(s) \in \bar{\mathcal{S}}$. Comme X vérifie (3), la formule de changement de temps entraine

$$E(X \cdot A_{\zeta-}) = E\Big(\int X_s 1_{\{s < \zeta\}} dA_s\Big) = E\Big(\int X_{\check{c}(s)} 1_{\{\check{c}(s) < \zeta\}} ds\Big) .$$

Or, comme $\check{c}(s) \in \bar{\mathcal{S}}$, il est facile de voir que, en utilisant (8-1) et un argument de classe monotone, l'application $(\omega, s) \leadsto X_{\check{c}(s)(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurable. D'après le théorème de Fubini on a alors

$$E(X \cdot A_{\zeta-}) = \int ds\, E(X_{\check{c}(s)} 1_{\{\check{c}(s) < \zeta\}}) = \int ds\, E(Y_{\check{c}(s)} 1_{\{\check{c}(s) < \zeta\}})$$

par hypothèse, et le même raisonnement sur Y montre que cette expression égale $E(Y \cdot A_{\zeta-})$. ∎

8 - PROJECTION OPTIONNELLE DE PROCESSUS.

Jusqu'à présent, tout ce qui concerne les processus optionnels s'étend presque textuellement du cas classique au cas présent (aux modifications dûes à la présence du temps de mort ζ près). Il n'est donc pas étonnant qu'on puisse étendre également la notion de projection optionnelle d'un processus, ce qui est fait dans le théorème suivant.

(8-1) THEOREME: <u>Soit X un processus $\bar{\mathcal{O}}^\circ$-mesurable, borné ou</u>

positif. Il existe un processus $\overline{\underline{\underline{O}}}$-mesurable $^{\circ}X$ et un seul à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, vérifiant $^{\circ}X_{\zeta} = X_{\zeta}$ et, $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$, $E(^{\circ}X_T 1_{\{T<\zeta\}}) = E(X_T 1_{\{T<\zeta\}})$. Ce processus $^{\circ}X$ s'appelle la "projection optionnelle" de X.

Démonstration: Pour l'existence, il suffit de prouver le résultat lorsque $X = Z1_{[0,R[}$, où Z est $\overline{\underline{\underline{G}}}$-mesurable et $R \in \overline{\underline{\underline{S}}}$, d'après (7-1). Mais si Y désigne la martingale associée à Z par (6-5), il est immédiat que $^{\circ}X = Y1_{[0,R[}$ vérifie les conditions requises.

Soient maintenant X et X' deux processus optionnels. Si $E(X_T 1_{\{T<\zeta\}}) = E(X'_T 1_{\{T<\zeta\}})$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$, une application classique du théorème de section montre que $p(X \neq X') \in \underline{\underline{N}}$. Si de plus $X_{\zeta} = X'_{\zeta}$, il est clair que $\{X \neq X'\} \in \tilde{\underline{\underline{N}}}$. ∎

Remarque: La définition de la projection optionnelle diffère du cas classique par le traitement de la variable terminale X_{ζ}. Cependant on se rapproche de la formulation usuelle en donnant une définition équivalente: $E(^{\circ}X_T) = E(X_T)$ et $E(^{\circ}X_T 1_{\{T<\zeta\}}) = E(X_T 1_{\{T<\zeta\}})$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$. ∎

Des preuves tout-à-fait classiques permettent alors de montrer la

(8-2) PROPOSITION: (a) On a $^{\circ}X_T = E(X_T | \overline{\underline{\underline{G}}}_T)$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$.
(b) Si Y est optionnel, on a $^{\circ}(XY) = Y\,^{\circ}X$.

(8-3) THEOREME: Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^{o}$. Pour que A soit $\overline{\underline{\underline{O}}}$-mesurable, il faut et il suffit que $M_A(X) = M_A(^{\circ}X)$ pour tout processus $\overline{\underline{\underline{O}}}^{o}$-mesurable positif X.

Démonstration: Comme $X \cdot A_{\zeta} = X \cdot A_{\zeta-} + X_{\zeta}\Delta A_{\zeta}$, la condition nécessaire découle de (7-4) et (8-1). Inversement soient Z une variable bornée $\overline{\underline{\underline{G}}}$-mesurable, et $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$. Les processus $X = Z1_{[0,T[}$ et $X' = E(Z|\overline{\underline{\underline{G}}}_T)1_{[0,T[}$ ont même projection optionnelle, donc $M_A(X) = M_A(X')$. Or $M_A(X) = E(ZA_T)$ et $M_A(X') = E(E(Z|\overline{\underline{\underline{G}}}_T)A_T)$, et on en conclut que A_T est $\overline{\underline{\underline{G}}}_T$-mesurable, d'où le résultat. ∎

On construit maintenant la projection duale optionnelle d'un processus croissant:

(8-4) THEOREME: Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^{o}$. Il existe un élément $A^{o} \in \overline{\underline{\underline{V}}}$ et un seul, à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, telle que $M_A(X) = M_{A^o}(X)$ pour tout processus optionnel positif X.

Etant donnés (7-3) et (8-3), la démonstration de ce théorème est analogue à celle de [1]. Terminons ce paragraphe par une série d'assertions bien connues (cf. [1]).

(8-5) PROPOSITION: Soient $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^{o}$ et X un processus $\overline{\underline{\underline{O}}}^{o}$-mesurable positif.
(a) Si A est optionnel et si M est une martingale, $E(M_T A_T) = E(M \cdot A_T)$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$.
(b) Si $S, T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$ on a $E(\int_S^T {}^{\circ}X_s dA_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S) = E(\int_S^T X_s dA^o_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S) = E(\int_S^T {}^{\circ}X_s dA^o_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S)$.
(c) Supposons que $X \cdot A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^{o}$. Si X (resp. A) est $\overline{\underline{\underline{O}}}$-mesurable, on a $(X \cdot A)^o = X \cdot A^o$ (resp. $(X \cdot A)^o = {}^{\circ}X \cdot A$).

Démonstration: Pour (a) il suffit d'appliquer (7-4) à $X = M1_{[0,T[}$ et à $Y = M_T 1_{[0,T[}$, en remarquant de plus que $X_{\zeta} = Y_{\zeta}$. (c) est une conséquence de (8-2) et des définitions de $^{\circ}X$ et A^o ; de même (b) est une conséquence des mêmes faits, appliqués à $X' = 1_H X 1_{]S,T[}$, pour $H \in \overline{\underline{\underline{G}}}_S$. ∎

9 - PROJECTION PREVISIBLE DE PROCESSUS.

Contrairement à ce qui se passe pour la projection optionnelle, on ne peut pas définir la projection prévisible d'un processus sans hypothèse supplémentaire: cela tient à ce qu'il faut à la fois un théorème de section, la relation $M_{T-} = E(M_T | \underline{\underline{G}}_{T-})$ pour les martingales (ces deux propriétés sont valables pour $\underline{\underline{Q}}$ et $T \in \underline{\underline{S}}_b$), et la mesurabilité de l'opération "arrêt à un temps d'arrêt", qui n'est valable que pour $\underline{\underline{P}}$. On est donc amené à faire l'hypothèse: $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$.

(9-1) LEMME: Supposons $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$.
(a) Si $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$ il existe $A \in \overline{\underline{\underline{G}}}_T$ et une suite (T_n) d'éléments de $\underline{\underline{S}}_b$, avec $[T_{A^c}] \subset \bigcup [T_n]$ et $P(T_A = S < \zeta) = 0$ $\forall S \in \underline{\underline{S}}_b$.
(b) Si $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_p$ il existe une partition $\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-}$-mesurable (A_n) de Ω telle que $T_{A_n} \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$ pour tout n.
(c) Si A est un processus croissant prévisible, il se met sous la forme (10), avec $T_n \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$.

Démonstration: (a) Il s'agit d'une décomposition de T en partie "accessible" et totalement inaccessible. L'ensemble des $B \in \overline{\underline{\underline{G}}}_T$ tels que $P(T_B = S < \zeta) = 0$ $\forall S \in \underline{\underline{S}}_b$ étant stable par $(\bigcup d)$, on prend pour A l'ess-sup de cette famille, et l'existence de la suite (T_n) est classique.

(b) Comme $[\![T]\!] \in \overline{\underline{\underline{P}}}$ il existe d'après (5-6), pour tout n, un $T_n \in \underline{\underline{S}}_b$ tel que $[\![T_n]\!] \subset [\![T]\!]$ et $P(T < \zeta = T_n) \leq \frac{1}{n}$. On pose alors $A_n = \{T = T_n\} \cap (\bigcap_{p<n} \{T_p \neq T\})$, ce qui constitue une partition de Ω ; comme les T_n et T sont prévisibles, et que $T = T_n$ sur A_n, on a $A_n \in \overline{\underline{\underline{G}}}_{T-} \cap \overline{\underline{\underline{G}}}_{T_n}$ et d'après (3-4) (e), on a $(T_n)_{A_n} \in \underline{\underline{S}}_b$.

(c) Il suffit de mettre A sous la forme (10) avec des T_n prévisibles, et d'appliquer (b). ∎

(9-2) THEOREME: Supposons $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. Soit X un processus $\overline{\underline{\underline{O}}}^{o}$-mesurable, borné ou positif. Il existe un processus $\overline{\underline{\underline{P}}}$-mesurable ^{p}X, unique à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, tel que $^{p}X_{\zeta} = E(X_{\zeta} | \underline{\underline{G}}_{\zeta-})$ et $E(^{p}X_T 1_{\{T<\zeta\}}) = E(X_T 1_{\{T<\zeta\}})$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$. Le processus ^{p}X s'appelle la "projection prévisible" de X.

Démonstration: On reprend la preuve de (8-1). L'unicité se montre de la même manière. Quant à l'existence, il nous suffit de poser

$$^{p}X = Y_{-} 1_{[0,R]} 1_{[0,\zeta[} + 1_{[\![\zeta]\!]} 1_{\{R=\zeta\}} E(Z | \underline{\underline{G}}_{\zeta-}).$$

Comme Y est limité à gauche, Y_- existe, est continu à gauche sur $]0,\zeta[$, vérifie (3), et est $\overline{\underline{\underline{G}}}$-adapté d'après (3-7), donc prévisible d'après (2-5): par suite ^{p}X est prévisible. Par construction on a $^{p}X_{\zeta} = E(X_{\zeta} | \underline{\underline{G}}_{\zeta-})$, et (6-6) montre que ^{p}X répond à la question. ∎

On a alors l'analogue de (8-2) (pour (c), il suffit de montrer le résultat pour $X = Z1_{[0,R[}$, ce qui, avec les notations de la preuve précédente, decoule de (3-8) appliqué à Y).

(9-3) PROPOSITION: Soit $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$.
(a) On a $^{p}X_T = E(X_T | \overline{\underline{\underline{G}}}_{T-})$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$.
(b) Si Y est prévisible, on a $^{p}(YX) = Y\,^{p}X$.
(c) L'ensemble $\{^{\circ}X \neq {}^{p}X\}$ est épuisé par une suite de temps d'arrêt.

(9-4) THEOREME: Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^{o}$. Pour que A soit $\overline{\underline{\underline{P}}}$-mesurable, il faut et il suffit que $M_A(X) = M_A(^{p}X)$ pour tout processus $\overline{\underline{\underline{O}}}^{o}$-mesurable positif X.

Démonstration: Supposons d'abord A prévisible. (8-3) implique $M_A(X) = M_A({}^oX)$, donc on peut supposer X optionnel. (9-3)-(c) implique alors $M_{A^c}(X) = M_{A^c}({}^pX)$, et on peut supposer que $A^c = 0$. Mais on peut mettre A sous la forme (10) avec $T_n \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$, et (9-3)(a) entraine alors:

$$M_A(X) = \sum_{(n)} E(1_{\{T_n<\zeta\}}\Delta A_{T_n} X_{T_n}) + E(\Delta A_\zeta X_\zeta)$$
$$= \sum_{(n)} E(1_{\{T_n<\zeta\}}\Delta A_{T_n}\, {}^pX_{T_n}) + E(\Delta A_\zeta\, {}^pX_\zeta) = M_A({}^pX).$$

Montrons la réciproque. Il est clair que ${}^p({}^oX) = {}^pX$, donc (8-3) entraine que A est optionnel. On le met alors sous la forme (10), avec $T_n \in \overline{\underline{\underline{S}}}$. A chaque T_n on associe par (9-1)(a) une partie A_n de Ω ; soit X l'indicatrice de $[\![(T_n)_{A_n}]\!]$; la définition même de A_n entraine alors que ${}^pX = 0$ sur $[0,\zeta[$, donc $M_A(X1_{[0,\zeta[}) = 0$ et $P(A_n \cap \{T_n<\zeta\}) = 0$; mais alors chaque graphe de T_n est contenu dans une réunion dénombrable de graphes d'éléments de $\overline{\underline{\underline{S}}}_b$ et, quitte à modifier le nom des temps d'arrêt, on peut supposer que dans (10), chaque T_n est dans $\overline{\underline{\underline{S}}}_b$.

Comme A^c, étant continu et optionnel, est prévisible, il nous reste à montrer que ΔA_{T_n} est $\overline{\underline{\underline{G}}}_{T_n-}$-mesurable. Pour simplifier les notations, on pose $T = T_n$. Soit Z une variable $\overline{\underline{\underline{G}}}$-mesurable. On considère les processus $X = Z1_{[\![0,T[\![}$ et $X' = E(Z|\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-})1_{[\![0,T[\![}$. Si Y est la martingale associée à Z par (6-5), on a ${}^pX = {}^pX' = Y_-1_{[\![0,T[\![\cap[0,\zeta[} + 1_{[\![\zeta]\!]}X'_\zeta$. Donc $E(Z\Delta A_T) = M_A(X) = M_A(X') = E(E(Z|\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-})\Delta A_T)$, ce qui prouve que ΔA_T est $\overline{\underline{\underline{G}}}_{T-}$-mesurable.■

On peut alors décalquer la preuve de [1], pour obtenir le théorème d'existence de la projection prévisible duale:

(9-5) THEOREME: Soit $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^o$. Il existe un $A^p \in \overline{\underline{\underline{V}}}_p$ et un seul à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, tel que $M_A(X) = M_{A^p}(X)$ pour tout processus prévisible positif X.

Soit M une martingale. D'après la démonstration de (9-2) la projection prévisible de M est

$$(12) \qquad {}^pM = M_-1_{[0,\zeta[} + 1_{[\![\zeta]\!]}E(M_\zeta|\underline{\underline{G}}_{\zeta-}),$$

qui en général diffère de M_-. On a alors (cf. [1])

(9-6) PROPOSITION: Soit $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. Soient $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^o$ et X un processus $\overline{\underline{\underline{O}}}^o$-mesurable positif.

(a) Pour que $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}_p$ il faut et il suffit que pour tout $T \in \underline{\underline{S}}$ et toute martingale M, $E(M_TA_T) = E({}^pM_TA_T)$.

(b) Si $S, T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$, $E(\int_S^T {}^pX_s dA_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S) = E(\int_S^T X_s dA^p_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S) = E(\int_S^T {}^pX_s\, dA^p_s | \overline{\underline{\underline{G}}}_S)$.

(c) Supposons que $X \cdot A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^o$. Si X (resp. A) est prévisible, on a $(X\cdot A)^p = X\cdot A^p$ (resp. $(X\cdot A)^p = {}^pX\cdot A$).

Voici encore une liste de résultats faciles, dont la démonstration est laissée au lecteur (cf. [1]).

(9-7) PROPOSITION: Soit $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. (a) Soient $A, B \in \overline{\underline{\underline{V}}}^o$ et $M = A - B$. Pour que $A^p = B^p$ il faut et il suffit que $E(\Delta M_\zeta|\underline{\underline{G}}_{\zeta-}) = 0$ et que $E(M_T) = 0$ $\forall T \in \underline{\underline{S}}$.

(b) Soient $A, B \in \overline{\underline{\underline{V}}}$ et $M = A - B$. Pour que $A^p = B^p$ il faut et il suffit que $E(\Delta M_\zeta|\underline{\underline{G}}_{\zeta-}) = 0$ et que M soit une martingale.

(c) Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}$. On a $\Delta A^p_T = E(\Delta A_T|\underline{\underline{G}}_{T-})$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_b$.

(d) Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}$. Pour que A^p soit continu, il faut et il suffit que $P(\Delta A_T > 0) = 0$ $\forall T \in \underline{\underline{S}}_b$.

(e) Soit $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$ tel que $P(T = S < \zeta) = 0$ $\forall S \in \underline{\underline{S}}_b$. Il existe alors une martingale M telle que $\Delta M = 1_{\{T<\zeta\}}1_{[T]}$.

(f) Soit $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$. Pour que $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}_p$ il faut et il suffit que pour toute martingale M, $E(\Delta M_T 1_{\{T<\zeta\}}) = 0$.

10 - DECOMPOSITION DE DOOB-MEYER D'UNE SURMARTINGALE.

Dans ce paragraphe, nous sommes également amenés à faire l'hypothèse $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. On appelle potentiel une surmartingale positive X, à trajectoires continues à droite et limitées à gauche, telle que $X_\zeta \doteq 0$.

(10-1) PROPOSITION: Soit $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}^o$. Il existe un potentiel de classe (D) X, et un seul à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, tel que $E(X_T) = E(A_\zeta - A_T)$ $\forall T \in \underline{\underline{S}}$. On a alors $X_T = E(A_\zeta - A_T|\overline{\underline{\underline{G}}}_T)$ $\forall T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$.

Démonstration: Si X est solution, on a $X_T = A_\zeta - A_T = 0$ sur $\{T = \zeta\}$: la seconde partie de l'énoncé découle donc de la première de manière classique, d'où l'unicité.

Soit $B_n = \bigcap_{p<n}\{S_n \neq S_p\}$. Sur B_n on pose $\tilde{X}_{S_n} = E(A_\zeta - A_{S_n}|\underline{\underline{G}}_{S_n})$, ce qui définit une application: $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{X}} \mathbb{R}$. Il est immédiat de vérifier que pour tout $T \in \underline{\underline{S}}$ tel que $[T] \subset \tilde{F}$, on a $\tilde{X}_T = E(A_\zeta - A_T|\underline{\underline{G}}_T)$, donc $\tilde{X}$ est une $\tilde{F}$-surmartingale (car A est croissant). On définit X à l'aide de $\tilde{X}$ par (8), ce qui définit un processus $\overline{\underline{\underline{G}}}$-adapté, dont on peut prendre une version continue à droite et limitée à gauche. Soit $T \in \underline{\underline{S}}$; on reprend les notations de (6-3), en espérant qu'il n'y aura pas de confusion entre les deux significations du symbole "A". D'abord $X_{T_A} = \tilde{X}_{T_A}$ et $[T_A] \subset \tilde{F}$. Ensuite $X_S = \lim E(\tilde{X}_{S'_n}|\underline{\underline{G}}_{S'_n}) = \lim E(A_\zeta - A_{S'_n}|\underline{\underline{G}}_{S'_n}) = E(A_\zeta - A_S|\underline{\underline{G}}_S)$ puisque A satisfait (3). Comme $T = T_A \wedge S$ on a donc bien $X_T = E(A_\zeta - A_T|\underline{\underline{G}}_T)$, et a-fortiori $E(X_T) = E(A_\zeta - A_T)$. Enfin il est clair que X est alors une surmartingale, de classe (D) car A est intégrable, que $X \geq 0$, et $E(X_\zeta) = 0$, donc $X_\zeta \doteq 0$, ce qui achève la démonstration.■

On dit que X est le potentiel engendré par A. Il est facile de voir que X est aussi le potentiel engendré par A^o et A^p. Inversement, on a le théorème suivant (remarquer que, contrairement au cas usuel, deux processus croissants prévisibles peuvent engendrer le même potentiel; cela tient à ce que ζ, quoiqu'annonçable, a une partie "totalement inaccessible" $A(\zeta)^c$: cf. avant (6-6)).

(10-2) THEOREME: Soit $\overline{\underline{\underline{P}}} = \overline{\underline{\underline{Q}}}$. Soit X un potentiel de classe (D). Il existe un $A \in \overline{\underline{\underline{V}}}_p$ unique, à une partie de $\tilde{\underline{\underline{N}}}$ près, engendrant X et tel que $\Delta A_\zeta = 0$ sur $A(\zeta)^c$.

Démonstration: Montrons d'abord l'unicité. Soit A une solution. Un raisonnement analogue à celui de (6-6) montre que $X_{\zeta-} = E(\Delta A_\zeta|\underline{\underline{G}}_{\zeta-}) = \Delta A_\zeta$ sur $A(\zeta)$, donc $\Delta A_\zeta = 1_{A(\zeta)}X_{\zeta-}$. Mais $\overline{\underline{\underline{P}}}$ est engendrée par les $[\![0_B]\!]$ avec $B \in \overline{\underline{\underline{G}}}(0)$, les $[\![0,T[\![$ avec $T \in \overline{\underline{\underline{S}}}$, et les $B\times[\zeta,\infty]$ avec $B \in \overline{\underline{\underline{G}}}_{\zeta-}$; comme A engendre X, on a $M_A([\![0,T[\![) = E(X_0 - X_T)$ et $M_A([\![0_B]\!]) = M_A(B^c\times[\zeta,\infty]) = E(X_{\zeta-}1_{B^c\cap A(\zeta)})$ pour tout $B \in \overline{\underline{\underline{G}}}_{\zeta-}$: donc la restriction de M_A à $(\tilde{\Omega}, \overline{\underline{\underline{P}}})$ est déterminée entièrement par X, donc A est unique.

Passons à l'existence. On pose $Z = X_{\zeta-}1_{A(\zeta)}$. $A' = Z1_{[\![\zeta]\!]}$ est un processus croissant prévisible, qui engendre un potentiel X', et on pose $X'' = X - X'$. On a évidemment $X'_T = 1_{\{T<\zeta\}}E(Z|\underline{\underline{G}}_T)$ $\forall T \in \underline{\underline{S}}$; donc si $S, T \in \underline{\underline{S}}$ un calcul simple montre que sur $\{S \leq T\} \cap \{S < \zeta\}$,

$$X''_S - E(X''_T|\underline{\underline{G}}_S) = X_S - E(X_T|\underline{\underline{G}}_S) + E(1_{\{T<\zeta\}}E(Z|\underline{\underline{G}}_T)|\underline{\underline{G}}_S) - E(Z|\underline{\underline{G}}_S)$$