

M. R. HERMAN

**Sur les mesures invariantes**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S4*

« International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics », , p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1975\\_\\_S4\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975__S4_A12_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES MESURES INVARIANTES

-----

par M. R. HERMAN

. Construction d'un homéomorphisme PL du cercle

On se donne  $\lambda > 1$ .

- Soit  $f$  l'homéomorphisme PL de  $[0,1]$  défini par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x & 0 \leq x \leq a \\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda} (x-1) + 1 & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec  $\lambda a = \frac{1}{\lambda} (a-1) + 1$ .

On définit  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\tilde{f}(x+n) = \tilde{f}(x) + n \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [0,1] .$$

Soit pour  $b \in \mathbb{R}$  fixé, l'homéomorphisme PL

$$\tilde{f}_b(x) = \tilde{f}(x) + b \quad x \in \mathbb{R} .$$

Soit  $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Par passage au quotient de  $\tilde{f}_b$  on a l'homéomorphisme PL de  $T^1$   $f_b$ .

Remarquons que  $f_b$  et  $f_b^{-1}$  laissent invariants les ensembles de mesure de Haar nulle sur  $T^1$ .

. Nombre de rotation de  $f_b$

On montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}_b^{\text{on}}(0)}{n} = \rho(\tilde{f}_b)$  existe et dépend continuellement de  $b$ ,

de plus on a  $\rho(\tilde{f}_{b+1}) = \rho(\tilde{f}_b) + 1$ .

On pose  $\rho(f_b) = \rho(\tilde{f}_b) \pmod{1}$ .

- Soit  $b$  tel que  $\rho(f_b) = \alpha \in T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , alors on a le :

Théorème : 1)  $f_b$  est topologiquement conjugué sur  $T^1$  à la translation  
 $R_\alpha : x \rightarrow x + \alpha$ .

2)  $f_b$  n'a pas de mesure  $\sigma$  finie (non nulle) invariante et  
absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

On trouvera la démonstration dans M.R. Herman "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations".

La partie 1) est le théorème de A. Denjoy.

Le premier exemple de 2) (non continue) a été donné par D. Ornstein, puis un exemple a été donné par A. Brunel.

Remarque : Si  $\mu$  est l'unique mesure de probabilité invariante par  $f_b$  alors  $\mu$  est étrangère à la mesure de Haar ; de plus, si on écrit  $f_b = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$ , on a  $Dh = Dh^{-1} = 0$  p.p. p.p.

Problème : Est-ce que  $f_b$  est ergodique par rapport à la mesure de Haar  $m$  au sens suivant : si  $A$  est  $m$ -mesurable et si  $f_b(A) = A$  p.p., alors  $m(A) = 0$  ou  $1$  ?

-----

Centre de Mathématiques  
de l'École Polytechnique  
Plateau de Palaiseau

91120 PALAISEAU