PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ROLAND THÉBAULT

Extensions de groupes abéliens par des groupes bornés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1974, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974___2_A2_0>

EXTENSIONS DE GROUPES ABELIENS PAR DES GROUPES BORNES

par

Roland THEBAULT

Tous les groupes dont il sera question ici sont des p-groupes abéliens réduits. Si G est un tel groupe, $G[p] = \{x \in G \ / \ px = 0\}$ désigne le socle du groupe. Les invariants de Ulm sont les dimensions sur F_p des espaces vectoriels $p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1} G[p]$, où α est un ordinal quelconque.

A - GENERALITES

D'une manière générale, soit d'abord G un groupe quelconque, et B un groupe borné de longueur n.

La courte suite exacte

$$G[p^n] \rightarrowtail G \xrightarrow{p^n} p^n G$$

donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(p^n G,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G[p^n],B) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}(p^n G,B) \xrightarrow{p^n} \mathrm{Ext}(G,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(G[p^n],B) \longrightarrow 0.$$

Mais $p^n \,\mathrm{Ext}(p^n G,B) = 0$. Il vient donc :

$$\mathrm{Ext}(G,B) \simeq \mathrm{Ext}(G[p^n],B)$$

$G[p^n]$ est une somme directe de groupes cycliques de type $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$.

Soit I_q un ensemble de cardinal α_q pour tout $q \in [1,\ldots n]$ et posons

$$F = \sum_{q=1}^{n} \mathbb{Z}^{(I_q)}.$$

On a une suite exacte

$$F \overset{\xi}{\rightarrowtail} F \twoheadrightarrow G[p^n]$$

où est la multiplication par

$$(\underbrace{p,\ldots p,}_{\alpha_1}\ \underbrace{p^2,\ldots p^2}_{\alpha_2},\ldots,\underbrace{p^n,\ldots p^n}_{\alpha_n})$$

F étant libre, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(G[p^n],B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,B) \xrightarrow{\xi^*} \mathrm{Hom}(F,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(G[p^n],B) \longrightarrow 0.$$

Il vient donc finalement :

$$\mathrm{Ext}(G,B) \simeq \mathrm{Hom}(F,B)/\xi^{*}\mathrm{Hom}(F,B)$$

<u>Exemples</u>

1) Prenons par exemple $G = t \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Une extension H de B par G peut se décrire comme suit ; les éléments de H sont de la forme $((a_1,\dots a_n,\dots),\lambda)$ où $(a_1,\dots a_n\dots) \in H$ et $\lambda \in B$.
Il existe une application φ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \prod_{n\geq 2} (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_n$ dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ telle que

$$[(a_1,\dots a_n\dots),\lambda]+[(b_1,\dots b_n\dots),\mu]=[(r_1,\dots r_n,\dots),\lambda+\mu+\ (\bar{q}_1,\dots \bar{q}_n\dots)]$$

avec $a_n+b_n = p^n q_n + r_n \qquad 0 \leq r_n < p^n$

et $\bar{q}_1$ classe de q_1 modulo p

$\bar{q}_n$ classe de q_n modulo $p^2 \qquad (n \geq 2)$.

2) Si $G = t \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on obtient plus simplement

$\mathrm{Ext}(G,B) = E^{*}$ où $G[p]$ a été noté E,

espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La description de la structure est analogue à celle de l'exemple précédent.

Bien entendu, à des formes linéaires distinctes, peuvent correspondre des groupes isomorphes ; nous reviendrons ultérieurement sur cette difficulté.

On notera K_φ l'extension de ce type, déterminée par une forme linéaire φ .

Soit maintenant un groupe G de longueur $\omega+1$ et dont tous les invariants de Ulm sont égaux à 1. Désignons par G^1 le sous-groupe des éléments de hauteur infinie. On a $G^1 \simeq Z/pZ$.
G/G^1 est séparable, et on sait qu'il existe un homomorphisme injectif $\Theta : G/G^1 \longrightarrow A$ (cf. [1], p. 16) tel que $\Theta(G/G^1)$ soit pur et dense dans A.

La suite exacte $G/G^1 \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/G/G^1$ donne une suite exacte d'homologie se terminant par

$$\mathrm{Ext}(A, Z/pZ) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(G/G^1, Z/pZ).$$

Par conséquent, on voit que pour G donné, il existe une extension K_φ telle que G soit déterminé par le pull-back :

$$\begin{tikzcd}
Z/pZ \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\eta"] & G/G^1 \arrow[d, "\theta"] \\
Z/pZ \arrow[r, tail] & K \arrow[r, two heads, "\chi"] & A
\end{tikzcd}$$

où η est injectif et où $G = \{(x,y) \in K_\varphi \times G/G^1 \ / \ \chi(x) = \theta(y)\}$.

Le problème principal qui apparaît dans cette étude, est donc celui de classer les K_φ.

B. <u>ETUDE DES EXTENSIONS</u> K_φ

L'espace vectoriel E est filtré de manière naturelle par les sous-espaces E_n constitués des suites dont les n premiers termes sont nuls.

On vérifie que :

- Si ker φ ne contient aucun des E_n, les invariants de Ulm de K sont 1 pour $\alpha \leq \omega+1$ et nuls ensuite ; K_φ est réduit de longueur $\omega+1$.
- S'il existe un entier n qui soit le plus petit entier m tel que ker φ contienne E_m, K_φ est réduit de longueur ω, i.e. séparable.

Tous les invariants sont égaux à 1, sauf α_n qui est nul.

Nous ne nous intéresserons plus qu'au premier de ces deux cas; les formes linéaires qui correspondent au second constituent un sous-espace de dimension dénombrable de E^*.

D'après ([2], corollaire 1), des groupes K_φ et K_ψ sont isomorphes, si et seulement si il existe un automorphisme de E conservant la filtration (= isométrie), envoyant $\ker_\varphi$ sur $\ker_\psi$ tel que $\psi.g = \varphi$. De plus, on sait qu'il existe 2^c groupes K_φ non isomorphes.

Nous allons essayer d'améliorer ce résultat à l'aide de filtres.

Si A est une partie de N, on pose

$$H_A = \{x = (x_i) \ / \ i \in A \Longrightarrow x_i = 0\}.$$

<u>Lemme 1</u> : $H_{A \cap A'} = H_A + H_{A'}$.

Soit (x_i) nul sur $A \cap A'$ au moins.

$$y = (y_i) \qquad y_i = 0 \text{ si } i \in A \; ; \; y_i = x_i \text{ si } i \notin A$$
$$z = (z_i) \qquad z_i = x_i \text{ si } i \in A - A' \; ; \; z_i = 0 \text{ sinon.}$$

Alors, on a y et z éléments de H_A et $H_{A'}$ respectivement et $x = y + z$.

D'où $H_{A \cap A'} \subset H_A + H_{A'}$. La réciproque est évidente.

Si $\mathcal{F}$ est maintenant un filtre sur N, nous poserons $H_{\mathcal{F}} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} H_A$.

<u>Lemme 2</u> : *On a les résultats suivants :*

a) $H_{\mathcal{F}}$ *est un sous-espace de* E.

b) Il est de codimension 1 *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est un ultrafiltre.*

c) Il contient $\bigoplus_{N} Z/pZ$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est non principal.*

a) Résulte immédiatement du lemme 1.

b) Supposons que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre. Nécessairement, $(1,1,\dots,) \notin H_{\mathcal{F}}$. Soit alors (x_i) quelconque dans E, et posons :

$$A_j = \{i \,/\, x_i = j\} \qquad \forall\, j \in \mathbb{F}_p \;;$$

les A_j étant en nombre fini, l'un au moins A_{j_0} est élément de $\mathcal{F}$; alors, $x - j_0(1,1,\dots)$ est dans $H_{\mathcal{F}}$; on en déduit que $H_{\mathcal{F}}$ est de codimension 1 dans E.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas un ultrafiltre ; il existe donc une partie A telle que $A \notin \mathcal{F}$ et $\complement A \notin \mathcal{F}$; cela signifie qu'il existe x dont les composantes sont nulles sur A et y dont les composantes sont nulles sur $\complement A$, ces deux éléments n'appartenant pas à $H_{\mathcal{F}}$; de plus, quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{F}_p$, $\lambda x + \mu y$ n'est pas dans $H_{\mathcal{F}}$; $H_{\mathcal{F}}$ est donc de codimension deux au moins.

c) Immédiat.

Réciproquement, étant donné un sous-espace G de E, considérons la famille des sous-espaces fermés de G ; si K est un tel sous-espace, posons :

$$B_K = \{n \in N \ / \ K_n = K \cap E_n \neq K \cap E_{n+1} = K_{n+1}\}$$

Lemme 3 : *Les parties* $\complement B_K$ *où* K *parcourt l'ensemble des sous-espaces fermés de* G *déterminent sur* N *un filtre* $\mathcal{F}$ *. Si* $G \supset \bigoplus_N Z/pZ$*,* $\mathcal{F}$ *est non principal.*

Soient K et A tels que A contienne $\complement B_K$. Pour tout n dans $\complement A$, n appartenant à B_K, il existe $z_n \in K_n - K_{n+1}$. Soit K' le sous-espace engendré par les z_n pour n dans $\complement A$. Si $\overline{K'}$ est la fermeture de K' dans K, montrons que $B_{\overline{K'}} = \complement A$.

Si $n \in \complement A$, z_n appartient à $\overline{K}'_n - \overline{K}'_{n+1}$ et donc $n \in B_{\overline{K'}}$.

Si $n_o \in B_{K'}$, il existe $z \in \overline{K}'_{n_o} - \overline{K}'_{n_o+1}$; z est limite d'une suite $\lambda_n z_n$; soit n'_o le plus petit indice tel que λ_n soit non nul ; on a nécessairement $n_o = n'_o$; ainsi, n_o appartient à $\complement A$. C.Q.F.D.

On a pour tout couple de sous-espaces fermés K et K'

$$\complement B_K \cap \complement B_{K'} = \complement(B_K \cup B_{K'}).$$

Or, on vérifie immédiatement que

$$B_K \cup B_{K'} \subset B_{K+K'} \quad \text{(passer au gradué).}$$

Si $G \supset \bigoplus Z/pZ$, on a comme sous-espaces fermés $(\lambda,0,0,\ldots)$, $(0,\lambda,0,\ldots)$, etc..., et $\mathcal{F}$ contient donc les complémentaires des parties finies ; il est non principal.

Lemme 4 : *Soit* G *un sous-espace de* E*. On a alors* $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_{H_{\mathcal{F}_G}}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_G$. Alors H_A est fermé dans $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$, et il est clair que $\complement B_{H_A} = A$. Donc A est élément de $\mathcal{F}(H(\mathcal{F}(G)))$.

Il suffit de montrer maintenant que tout élément de $\mathcal{F}\,\mathcal{H}\,\mathcal{F}_G$ est obtenu. Soit A un tel élément. Alors $\complement A = \{n \ / \ K_n \neq K_{n+1}\}$ pour un certain K fermé dans $\mathcal{F}_G$. Tout élément de K est "limite" d'une suite $(\lambda_n z_n)$ où les z_n sont fixés, leurs indices correspondant aux éléments

de $\mathcal{C}A$. On peut choisir les λ_n tels que $u = \sum \lambda_n z_n$ n'ait aucune composante nulle sur $\mathcal{C}A$. Cet élément u appartient à un certain H_B, et tous les éléments de K appartiennent donc à cet H_B ; donc, $\mathcal{C}B_K \supset B$.
Ainsi, $\mathcal{C}B_K = A$.

Rappelons qu'on dit que deux filtres sur N sont isomorphes, si et seulement s'il existe une bijection de N sur N envoyant les éléments de $\mathcal{F}$ sur ceux de $\mathcal{F}'$.

Proposition : *Si deux ultrafiltres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont isomorphes, les sous-espaces de codimension* 1 *correspondants* H *et* H' *sont isométriquement isomorphes, si et seulement si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident.*

(Considérer les parties à un élément, et constater élément par élément, que la bijection entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ est l'identité sur N).

C - ETUDE DES SOUS-ESPACES DE E.

$$E = \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E_n = \prod_{i \geq n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

A tout sous-espace H de E, on associe le treillis $\mathcal{C}$ des sous-espaces de H fermés dans E. Si K est un tel sous-espace, on pose $K_n = K \cap E_n$; l'injection canonique de K dans E induit des injections

$$\tau_n : K_n/K_{n+1} \longrightarrow E_n/E_{n+1}.$$

Les invariants de Ulm de K sont donc égaux à 0 ou 1 ; soit B_K défini par

$$B_K = \{n/n \in N \ ; \ \dim K_n/K_{n+1} = 1\}.$$

On obtient ainsi une application ρ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(N)$ définie par $\rho(K) = B_K$.

Alors, si g est un isomorphisme de H sur H' conservant les hauteurs, il existe un isomorphisme $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ (isomorphisme de Treillis), tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathcal{C} \arrow[dl, "\rho'"] \\ & \mathcal{T}(N) & \end{tikzcd}$$

commute.

Réciproquement, supposons maintenant l'existence d'un tel diagramme commutatif où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les treillis associés à deux sous-espaces H et H' de E.

Les sous-espaces K de H de dimension finie (égale à card (B_K)) sont fermés et transformés par f en des sous-espaces K' de même dimension ; si l'on ne considère que des sous-espaces de dimension 1, on peut de plus ajouter que leurs valuations sont conservées.

A H et H', on peut associer par le passage au quotient habituel des espaces projectifs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ filtrés, et f définit une application h de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$ compatible avec la filtration.

<u>Nous étudierons d'abord le cas où p est différent de 2.</u>

Soit $\mathcal{T}_1$ une variété projective de $\mathcal{T}$ de dimension 2, et soit $h(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}'_1$; soit D une droite de $\mathcal{T}_1$ et soit $D' = h(D)$.
h induit une application φ de $\mathcal{T}_1 - D$ sur $\mathcal{T}'_1 - D'$; on peut munir ces ensembles d'une structure de plan affine sur F_p. φ possède alors la propriété de transformer droites en droites. Si $p \neq 2$, on sait alors que φ est une application affine ; on en déduit alors immédiatement que h est une homographie de $\mathcal{T}_1$ sur $\mathcal{T}'_1$.

Considérons les couples (W, h_W) formés d'une sous-variété W de $\mathcal{T}$ et d'une application homographique h_W de W sur h(w) telle que $h/w = h_W$. L'ensemble de ces couples n'est pas vide d'après ce qui précède, et peut être ordonné par inclusion. Appliquant Zorn, on obtient alors l'existence d'un élément maximal (W_o, h_{W_o}). Supposons $W_o \subsetneq \mathcal{T}$ et soit $M_1 \in \mathcal{T} - W_o$ et $\begin{cases} M_o \in W_o \\ M'_o \end{cases}$. Alors h est projective sur la sous-variété de dimension 2 engendrée par M_o, M'_o et M_1. Posons $W_1 = \langle W_o, M_1\rangle$; on peut alors définir hw_1 telle que $h/w_1 = h_{w_1}$. Contradiction.

D'où le résultat : h est projective de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$.
On en déduit l'existence d'un isomorphisme d'espaces vectoriels g de H sur H', et cet isomorphisme conserve les hauteurs.

Etude du cas p = 2.

Si p = 2, les "parallèlogrammes" n'étant plus conservés, le théorème utilisé sur la géométrie plane sur F_p est en défaut ; il suffit en fait, de reprendre l'étude en remplaçant $\mathcal{T}_1$ par une sous-variété de dimension 3, et en remarquant que h conserve la notion de plan.

On a ainsi démontré le résultat :

Théorème : *Deux sous-espaces* H *et* H' *de* E *sont isométriquement isomorphes, si et seulement si il existe un isomorphisme entre les treillis associés qui "commute aux invariants de Ulm".*

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. FUCHS Infinite abelian groups (1973) Tome 2

[2] F. RICHMAN Extensions of p. bounded groups
Archiv des Mathematik, Vol. XXI, (1970).