

M. S. BAOUENDI

J. SJOSTRAND

**Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques  
singuliers en un point**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1974, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1974\\_\\_1\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1974__1_A4_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS  
ELLIPTIQUES SINGULIERS EN UN POINT

par

M.S. BAOUENDI - J. SJOSTRAND

-----

On considère un opérateur différentiel dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme :

$$(1) \quad P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

où  $a_\alpha$  est un polynôme de  $n$  variables homogène de degré  $|\alpha|$ . On suppose que  $P$  est elliptique en dehors de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le cas particulier suivant :

$$L_{\lambda, \mu} = r^2 \Delta + \mu r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  et  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  rentre dans ce cadre. Il a été

démontré dans [1] que, pour tous  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,  $L_{\lambda, \mu}$  n'est pas hypoelliptique dans  $\mathbb{R}^n$ , mais que pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , si  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $L_{\lambda, \mu} u$  est analytique dans  $\Omega$ ,  $u$  est aussi analytique dans  $\Omega$ .

On se propose de généraliser ces résultats pour des opérateurs de la forme (1).

On désigne par  $S_{n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . On a un difféomorphisme naturel

$$S_{n-1} \times \mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il en résulte le difféomorphisme

$$(2) \quad T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R} \simeq T^*(\mathbb{R}^n) \Big|_{S_{n-1}}$$

Soit  $p_0(x, \xi)$  le symbole principal de  $P$  défini sur  $T^*(\mathbb{R}^n)$ , et pour  $((\theta, \eta), \zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R}$ , soit  $q_0(\theta, \eta, \zeta)$  la composition de  $p_0$  avec le difféomor-

phisme (2). La fonction  $q_0(\theta, \eta, \zeta)$  est un polynôme homogène de degré  $m$  en les variables  $(\eta, \zeta)$ .

On note

$$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \exists (\theta, \eta) \in T^* S_{n-1} \setminus 0, q_0(\theta, \eta, -iz) = 0\}.$$

L'ellipticité de  $P$  en dehors de l'origine entraîne que  $\Gamma_+$  est un cône fermé dans  $\mathbb{C} - \{0\}$  ne rencontrant pas l'axe imaginaire.

On introduit l'hypothèse suivante :

Il existe des nombres  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l$  satisfaisant

$$(H) \quad \begin{cases} -\frac{M}{2} < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_l < \frac{M}{2}, \\ \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{n-1} \text{ pour } j=0, \dots, l-1, \\ \Gamma_+ \subset \bigcup_{j=0}^{l-1} \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\} \end{cases}$$

On a alors :

### Théorème 1.

*On suppose (H) vérifiée ; soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  telle que  $Pu$  soit analytique dans  $\Omega$ , alors  $u$  est aussi analytique dans  $\Omega$ .*

### Théorème 2.

*Sous l'hypothèse (H),  $P$  n'est pas hypoelliptique ; plus précisément, il existe  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $Pu = 0$ .*

### Exemples :

1°) Pour  $n=2$ , l'hypothèse (H) est toujours satisfaite.

2°) On suppose que  $m$  est pair et que l'on a la factorisation

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D_x^\alpha = q(x) (A(D))^{\frac{m}{2}}$$

où  $A(D)$  est un opérateur elliptique homogène d'ordre 2 à coefficients constants, à symbole réel. Après un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer

$A(D) = \Delta$ , dans le cas  $\Gamma_+ = \mathbb{R}_+$  et donc (H) est satisfaite.

Remarque :

La condition (H) n'est évidemment pas invariante sous des changements de coordonnées linéaires. Il existe des opérateurs  $P$  de la forme (1), elliptiques en dehors de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  pour lesquels la condition (H) n'est pas satisfaite, même après un changement linéaire des variables. On ignore si de tels opérateurs satisfont ou non les conclusions des théorèmes 1 et 2 ci-dessus.

Indications sur la démonstration du théorème 1.

Soit  $f \in \mathcal{E}^\infty(\bar{B})$  où  $\bar{B}$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$ ; on écrit le développement de Taylor de  $f$  à l'origine, en utilisant les coordonnées polaires, sous la forme :

$$(3) \quad f \sim \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k(\theta)$$

( $\theta \in S_{n-1}$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_k \in V_k$  = espace des restrictions à  $S_{n-1}$  des polynômes homogènes de degré  $k$ ).

La transformée de Mellin de  $f$  est donnée par :

$$(4) \quad \tilde{f}(z, \theta) = \int_0^1 f(r\theta) r^{-z-1} dr.$$

C'est une fonction méromorphe en  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{E}^\infty(S_{n-1})$ . Les seuls pôles sont les points de  $\mathbb{N}$ ; ils sont simples; le résidu en  $k$  vaut  $f_k(\theta)$ . On a aussi :

$$\tilde{f}(z, \theta) \sim \sum_{k=0}^N \frac{f_k(\theta)}{z-k} + g_N(z, \theta)$$

où

$$\|g_N(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})}$$

est uniformément bornée dans  $\{\operatorname{Re} z \leq N + \frac{1}{2}\}$ .

Enfin, l'analyticité de  $f$  implique l'existence de  $M$  tels que :

$$(5) \quad \|f_k(\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq M^{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et (5) implique que la série de Taylor de  $f$  converge vers une fonction analytique au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ .

On montre d'abord :

Lemme 1.

Sous l'hypothèse (H), si  $u \in \mathcal{E}^\infty(\bar{B})$ ,  $u$  plate à l'origine et  $Pu = 0$ , alors  $u = 0$ .

Pour cela, on prend la transformée de Mellin de  $Pu$  et on obtient :

$$(6) \quad (A_m(\theta, D_\theta) + A_{m-1}(\theta, D_\theta)z + \dots + A_0(\theta) z^m) \tilde{u}(z, \theta) = C_0(\theta) + \dots + C_{m-1}(\theta) z^{m-1},$$

où  $A_j(\theta, D_\theta)$  est un opérateur différentiel d'ordre  $j$  sur  $S_{n-1}$  à coefficients  $\mathcal{E}^\infty$  et  $C_j \in \mathcal{E}^\infty(S_{n-1})$ , en outre  $A_0(\theta) \neq 0$ .

On réduit alors (6) à une équation vectorielle du premier ordre de la forme

$$(7) \quad (z - \mathcal{A}(\theta, D_\theta)) U(z, \theta) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j$$

où  $\mathcal{A}(\theta, D_\theta)$  est une matrice pseudo-différentielle elliptique d'ordre 1 sur  $S_{n-1}$ ,  $\tilde{u}(z, \theta)$  étant la première composante du vecteur  $U(z, \theta)$ .

Comme  $u$  est plate à l'origine, il s'en suit que  $U(z, \theta)$  est entière en  $z$ ; on va montrer que  $U$  est un polynôme en  $z$  ce qui implique  $u = 0$ . Pour cela, il suffit de montrer une inégalité de la forme

$$(8) \quad \|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C (1 + |z|)^N$$

où  $C$  et  $N$  sont indépendants de  $\theta$ .

Mais on a :

$$(9) \quad \sup_{\operatorname{Re} z \leq k} \|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C_k < \infty \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

D'après [3] on a :

$$(10) \quad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{sur } \gamma_j = \{r e^{i\theta_j} \mid r > 0\} \text{ et } |z| \text{ assez grand.}$$

En utilisant des résultats de [2] et [4] on a :

$$(11) \quad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq e^{|z|^{\rho+\epsilon}} \quad \text{avec } \rho = n-1 \text{ et } \epsilon > 0$$

sur une suite de cercles centrés à l'origine de rayons tendant vers l'infini.

L'utilisation de (9), (10), (11) et du théorème de Phragmén-Lindelöf donne alors aisément (8), ce qui termine la démonstration du lemme 1.

Lemme 2.

Soit  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{B})$  et  $Pu = v$  où  $v$  est analytique, alors le développement de Taylor à l'origine de  $u$  est une série convergente.

Ici aussi, on prend la transformée de Mellin de l'équation  $Pu = v$ . Une réduction analogue à celle de la démonstration du lemme précédent donne :

$$(12) \quad (z - \mathcal{A}(\theta, D_\theta)) U(z, \theta) = V(z, \theta) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j.$$

On pose  $\hat{U}(z, \theta) = (\sin(2\pi z)) U(z, \theta)$  ; alors  $\hat{U}(z, \theta)$  est entière en  $z$ , et

$$\hat{U}(k, \theta) = (2\pi) U_k(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

( $U_k$  est un coefficient de Taylor de  $U$  comme dans (3)).

On va montrer que les  $U_k(\theta)$  vérifient une inégalité de la forme (5).

On déduit de (12) :

$$(13) \quad \hat{U}(z, \theta) = (z - \mathcal{A})^{-1} ((\sin(2\pi z)) (V(z, \theta) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j)).$$

L'analyticité de  $v$ , (10), (11) et de nouveau le théorème de Phragmén-Lindelöf donnent alors :

$$\|\hat{U}(z, \theta)\|_{L^2(\delta_{n-1})} \leq C e^{C|z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C},$$

ce qui implique bien une inégalité de la forme (5) sur  $U_k(\theta)$  et montre l'analyticité de  $u$ .

Indications sur la démonstration du théorème 2.

Soit  $\mathcal{A}$  l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 elliptique sur  $S_{n-1}$  introduit dans (7) et (12).

On montre alors :

Lemme 3.

*Sous l'hypothèse (H), il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z_0 < 0$  et  $z_0$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}$ .*

On ne montre pas ici le lemme 3.

Pour montrer le théorème 2, on considère  $U \in (\mathcal{E}^\infty(S_{n-1}))^m$  tel que  $U \neq 0$   
 $(z_0 - \mathcal{A}) U = 0$ .

Soit  $u_0(\theta)$  la première composante de  $U$  ; on a :  $u_0 \neq 0$ . On pose alors :  
 $f(x) = r^{z_0} u_0(\theta)$ .

On vérifie assez aisément que l'on a

$$P(x, D) f(x) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Soit  $F$  une distribution dans  $\mathbb{R}^n$  dont la restriction à  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  est  $f$ .

On a alors :

$$P(x, D) F = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Soit  $E_N$  l'espace des distributions de la forme  $\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha \delta$ .

$P$  est un opérateur dans  $E_N$  ; on distingue alors deux cas :

i)  $P$  est bijectif dans  $E_N$  ; dans ce cas, on modifie  $F$  par un élément de  $E_N$  pour avoir

$$P u = 0$$

et  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$   $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

ii)  $P$  n'est pas bijectif ; dans ce cas, il existe  $u \in E_N$   $u \neq 0$  et  $Pu = 0$ .

-----

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC and L.J. LIPKIN : "On the operator  $\Delta r^2 + \mu(\frac{\partial}{\partial r}) r + \lambda$ .  
J. Diff. Equ. 15 (1974), p. 499-509.
- [2] N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ : "Linear Operators part. II, John Wiley (1963).
- [3] R.T. SEELEY : Complex powers of an elliptic Operator. Proc. Symp. Pure  
Math A M S 10 (1967), p. 288-307.
- [4] E.C. TITCHMARSH : The theory of functions, second edition. London (1939).