FRANÇOIS BERRONDO

Critère d'irréductibilité d'un polynôme sur un anneau de valuation hensélien

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. n° 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A7_0>

CRITERE D'IRREDUCTIBILITE D'UN POLYNOME SUR UN ANNEAU DE VALUATION HENSELIEN

par

François BERRONDO

Notations

Soient K un corps, v une valuation hensélienne de K, A l'anneau de v et G son groupe de valeurs. Soit $\hat{K}$ le complété de K pour v.

Pour tout h de G, soit I_h l'idéal de A défini par

$I_h = \{x \in A : v(x) \geq h\}$.

Pour tout polynôme f de $A[X]$ on note $f^{(h)}$ la classe de f dans $\frac{A}{I_h}[X]$.

On veut ramener la recherche de l'irréductibilité d'un polynôme f unitaire de $A[X]$ à celle de l'irréductibilité de $f^{(h)}$ pour un h convenable. Ceci est possible pour tout polynôme si K est de caractéristique 0 ou si A est un anneau de valuation discrète complet (théorème 3). Ceci est possible également lorsque f est séparable (théorème 2).

Théorème 2

Soit f un polynôme de $A[X]$, unitaire, irréductible et séparable, de degré n, et soit Δ son discriminant. Pour tout h appartenant à G tel que $2h > n\, v(\Delta)$ $f^{(h)}$ n'est pas produit de deux polynômes unitaires de degré non nul.

Démonstration

Soient $z_1, \ldots z_n$ les racines de f dans une extension de K.

On a $\Delta = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2$ donc $v(\Delta) \geq 2 \sup_{i \neq j} v(z_i - z_j)$ car les z_i sont entiers sur A.

Soit g unitaire de degré n tel que $f - g \in I_h A[X]$, et soient $y_1, \ldots, y_n$ ses racines.

$g(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - y_i)$ et $v \circ g(z) = v \circ (f - g)(z) \geq h$.

Par suite, il existe y_ℓ tel que $n\, v(z - y_\ell) \geq h$.

Si $2h > n\, v(\Delta)$, on a $2\, v(z - y_\ell) > v(\Delta)$ donc

$v(z - y_\ell) > \sup_{i \neq j} v(z_i - z_j)$.

On conclut par (2, § 8, ex. 12,b) que $K[z_k] = K[y_\ell] \cdot y_\ell$ est donc de degré n sur K et g est irréductible.

S'il existait deux polynômes unitaires de degré non nul, φ_1, φ_2 tels que $f^{(h)} = \varphi_1 \cdot \varphi_2$. Soient g_1 et g_2 des polynômes unitaires de $A[X]$ tels que $g_1^{(h)} = \varphi_1$, $g_2^{(h)} = \varphi_2$ et posons $g = g_1 \cdot g_2$. On a $f^{(h)} = g^{(h)}$ donc $f - g \in I_h A[X]$ et g est réductible, d'où la contradiction.

Lorsque la valuation v est discrète, nous donnerons une meilleure détermination de l'élément h qui est alors un nombre entier.

Théorème 3

Soit A un anneau de valuation discrète hensélien et f un polynôme unitaire irréductible de $A[X]$ tel que la clôture intégrale de $\frac{A[X]}{(f)}$ soit un A-module de type fini. Il existe un entier h tel que les propriétés équivalentes a) et b) soient vérifiées :

a) $f^{(h)}$ est irréductible.

b) $f^{(h)}$ n'est pas produit de polynômes unitaires de degré non nul.

Montrons que, $\forall$ h, a) et b) sont équivalentes.

b) implique a) car un polynôme unitaire de degré non nul n'est pas inversible.

a) implique b) car, $\frac{A}{\mu_h}$ étant local et complet, tout polynôme n'appartenant pas à $\mu A[X]$ est associé à un polynôme unitaire (10, th. 3, 8).

A étant hensélien, $f^{(1)}$ est une puissance d'un polynôme irréductible ; posons $f^{(1)} = \overline{\varphi}^r$, et soit $\varphi \in A[X]$, un polynôme tel que $\varphi^{(1)} = \overline{\varphi}$.

L'anneau $C = \frac{A[X]}{(f)}$ est local d'idéal maximal. $\mathfrak{m} = \omega C + \varphi(\alpha)C$, ω désignant une uniformisante de A et α la classe de X (théorème de Kummer [7] vol. 1, § 13). Soit w la fonction d'ordre $\mathfrak{m}$-adique de C.

Etablissons le

LEMME 1 :

Il existe un entier T tel que $\forall z, z' \in C - \{0\}$, $w(z\,z') - w(z) - w(z') \leqslant T$.

Soit B la clôture intégrale de C. B est un A-module de type fini et donc un anneau de Dedekind. Comme A est hensélien, B est local ([3], ch. I, § 1, Prop. 5) c'est donc un anneau de valuation discrète. Soit v la valuation de B et P son idéal maximal. Remarquons que si C est intégralement clos, w se confond avec v et nous avons T = 0. Si non, comme B est un C-module de type fini, le théorème d'Artin-Rees établit l'existence d'un entier q tel que, $\forall n$, $\mathfrak{m}^{q+n} B \cap C \subset \mathfrak{m}^{n+1}$. Nous poserons $\mathfrak{m} B = P^{\ell}$. Considérons deux éléments z et z' de C - {0} et posons w(z) = a, w(z') = a'. $z \notin \mathfrak{m}^{a+1}$ donc $z \in \mathfrak{m}^{a+q} B = P^{\ell(a+q)}$; $v(z) \leqslant \ell(a + q) - 1$ et de même $v(z') \leqslant \ell(a' + q) - 1$. Par suite $v(z\,z') \leqslant \ell(a + a' + 2q) - 2$.
$z\,z' \notin P^{\ell(a+a'+2q)} = \mathfrak{m}^{a+a'+2q} B$. Ce qui prouve que $w(z\,z') \leqslant a + a' + 2q$ d'où le lemme en choisissant $T = 2q - 1$.

LEMME 2

Soient P et Q deux polynômes de A[X], unitaires de degré non nul, tels que $f^{(1)} = P^{(1)} Q^{(1)}$. Alors $w[P(\alpha)] + w[Q(\alpha)] \leqslant r$.

Posons $P^{(1)} = (\bar{\varphi})^{r_1}$ et $Q^{(1)} = \bar{\varphi}^{r_2}$ avec $r_1 + r_2 = r$.
Si $P(\alpha) \in \mathfrak{m}^t = (\omega, \varphi(\alpha))^t$, $P \in (\omega, \varphi)^t + (f)$ et $P^{(1)} \in (\bar{\varphi})^t + (f^{(1)})$, soit $\bar{\varphi}^{r_1} \in (\bar{\varphi})^t + (\bar{\varphi})^r$ d'où la relation $r_1 \geqslant \inf(r, t)$. Mais $r_1 < r$, donc $r_1 \geqslant t$, ce qui prouve que $w[P(\alpha)] \leqslant r_1$. De même $w[Q(\alpha)] \leqslant r_2$, donc $w[P(\alpha)] + w[Q(\alpha)] \leqslant r$.

Démontrons maintenant le théorème 1 en montrant que l'on peut choisir h = r + T + 1.
Si $f^{(r+T+1)}$ était réductible, nous aurions $f^{(r+T+1)} = P^* Q^*$ où P^* et Q^* sont des polynômes unitaires de degré non nul. Désignons par P et Q des polynômes unitaires de A[X] tels que $P^{(r+T+1)} = P^*$ et $Q^{(r+T+1)} = Q^*$.
La relation $f^{(r+T+1)} = P^{(r+T+1)}$ entraîne que $f^{(1)} = P^{(1)} Q^{(1)}$ et, par le lemme 2, nous aurions $w[P(\alpha)] + w[Q(\alpha)] \leqslant r$. Par le lemme 1, $w[P(\alpha) \cdot Q(\alpha)] \leqslant w[P(\alpha)] + w[Q(\alpha)] + T \leqslant r + T$. Mais $f - P\,Q \in \omega^{r+T+1} A[X]$ donc $P(\alpha)\,Q(\alpha) \in \omega^{r+T+1} C \subset \mathfrak{m}^{r+T+1}$, d'où la contradiction.
$f^{(r+T+1)}$ est irréductible.

Donnons des conditions sur A et f qui entraînent que la clôture intégrale de $\frac{A[X]}{(f)}$ soit un A-module de type fini. Cette hypothèse est réalisée,

1°) si f est séparable ([2], ch. V, § 1, n° 6 Cor. 2, prop. 18) donc en particulier si A est de caractéristique 0.

2°) Si A est complet, ou plus généralement, si l'extension $\hat{K} : K$ est séparable, K désignant le corps des fractions de A et $\hat{K}$ son complété.

3°) Si A est entier sur un anneau géométrique ayant même corps des fractions que A.

Démonstration lorsque $\hat{K} : K$ est séparable :

Soit v' la valuation de B, L son corps des fractions et $\hat{L}$ le complété de L.

Comme $\hat{K}$ est séparable sur K, $\hat{K} \underset{K}{\otimes} L = \hat{L}$ ([2], ch. VI, § 8, n° 2, Cor. 2). Soit n le degré de f et α la classe de X dans C. 1, , ... α^{n-1} est une base de L sur K et donc aussi de $\hat{K} \underset{K}{\otimes} L = \hat{L}$ sur $\hat{K}$.

Comme $\hat{K}$ est complet, l'isomorphisme entre $(\hat{K})^n$ et $\hat{L}$ défini par $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \xrightarrow{g} x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1}$ est un homéomorphisme topologique (Bourbaki E.V.T. Ch. I, § 1, th. 2) et sa restriction à K^n établit un homéomorphisme entre K^n et L puisque K^n est sous-espace topologique de $(\hat{K})^n$ et L de $\hat{L}$.

A^n est voisinage de 0 dans K^n donc $g(A^n) = C$ contient un voisinage de 0 dans L_v.. $\exists\, k : v'(z) \geq k \Longrightarrow z \in C$, $B \subset \frac{1}{\omega^k} C$ qui est un A-module de type fini, donc B aussi.

Démonstration lorsque A est entier sur un anneau géométrique E ayant K pour corps des fractions.

Montrons que dans ce cas, B est encore un C-module de type fini. E est le localisé par un idéal premier d'une algèbre affine sur un corps k ([11], appendice 1, page 102).

Posons $E = S^{-1} k[x_1, \ldots, x_s]$, S étant le complémentaire de cet idéal premier dans $k[x_1, \ldots, x_s]$.

$C = \frac{A[X]}{(f)} = A[\alpha]$ est entier sur $S^{-1} k[x_1, \ldots, x_s, \alpha] = E[\alpha]$

Le corps des fractions de E est K donc celui de $E[\alpha]$ est L, corps des fractions de C. B est donc la clôture intégrale de $E[\alpha]$.

La clôture intégrale $\overline{k[x_1, \ldots, x_s, \alpha]}$ de $k[x_1, \ldots, x_s, \alpha]$ est un $k[x_1, \ldots, x_s, \alpha]$-module de type fini ([11], appendice 1, page 102, lemme 1).

Or, $B = S^{-1} \overline{K[x_1, \ldots x_s, \alpha]}$ est un $E[\alpha]$ -module de type fini, et à fortiori, un C-module de type fini.

Montrons sur un contre-exemple qu'il existe un anneau de valuation discrète hensélien A et un polynôme unitaire irréductible $f \in A[X]$ tel que $\forall$ h, $f^{(h)}$ soit réductible.

D'après ([2], ch. V, § 1, Ex. 20), posons $K = F_p(X_0, \ldots, X_n, \ldots)$ (p nombre premier) et $L = K((Z))$, $B = K[[Z]]$ est un anneau de valuation discrète complet.

Soit E le sous-corps de L engendré par L^p, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Z. E est différent de L, en effet dans les éléments de E, presque tous les X_n ne figurent que par leur puissance p-ième et par suite la série $c = \Sigma X_n Z^n$, par exemple, n'appartient pas à E.

Posons $A = B \cap E$, c'est un anneau de valuation discrète, montrons qu'il est hensélien.

Il suffit pour cela que tout polynôme de $A[X]$ $f = X^s + a_1 X^{s-1} + \ldots$ $\ldots + a_{s-1} X + a_s$ où $v(a_s) > 0$ et $v(a_{s-1}) = 0$ ait une racine α dans A telle que $v(\alpha) > 0$ ([11], Lemme, page 94).

Or B étant complet, f a une racine α dans B telle que $v(\alpha) > 0$. Montrons que $\alpha \in A$. Comme $L^p \subset E$, le polynôme minimal de α sur E est $X^p - \alpha^p$ si $\alpha \notin E$ ([4], ch. II, § 5, th. 7) $X^p - \alpha^p$ diviserait f ; $(X^p - \alpha^p)(X^t + \ldots + b_{t-1} X + b_t) = f$ et $a_{s-1} = - \alpha^p b_{t-1}$. Mais A est intégralement clos, donc les b_i appartiennent à A. $v(b_{t-1}) \geqslant 0$ et $v(\alpha) > 0$ donc $v(\alpha^p b_{t-1}) > 0$ ce qui contredit l'hypothèse $v(a_{s-1}) = 0$. α appartient donc à E et à $E \cap B = A$. A est hensélien.

Comme E contient K(Z), E est partout dense dans L et A est partout dense dans B qui est donc le complété de A.

Z est une uniformisante et $\forall\, h \quad \frac{A}{Z^h A} = \frac{B}{Z^h B}$. Considérons le polynôme $f = X^p - c^p \in A[X]$. f est irréductible puisque $c \notin A$ mais $f = (X - c)^p$ dans $B[X]$ donc $\forall\, h$, $f^{(h)} = (X - \bar{c})^p$ dans $\frac{B}{Z^h B} = \frac{A}{Z^h A}$. D'où le contre-exemple.

Calcul de l'entier h du théorème 3 dans le cas où f est séparable.

Avec les notations du théorème 1, supposons de plus que f est séparable et soit Δ son discriminant qui est donc non nul.

Désignons par M la matrice de passage d'une base du A-module B à une base du A-module C. Nous avons $\Delta = \mathrm{Discr}(C) = [\mathrm{Det}(M)]^2 . \mathrm{Discr}(B)$ ([7], ch. 2 § 7, prop. 1). D'où $v[\mathrm{Det}(M)] \leqslant \frac{1}{2} v(\Delta)$. L'inclusion $B \subset \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} C$ montre que $\omega^E B \subset C$, où E désigne la partie entière de $\frac{1}{2} v(\Delta)$. Si $v(\Delta) = 0$ ou 1, $B = C$ donc $T = 0$ et on peut choisir $h = r + 1$. Si $v(\Delta) \geqslant 2$, $\omega^E B$ est un idéal propre donc $\omega^E B \subset \mathfrak{M}$. Remarquons que $\mathfrak{M}^r \subset \omega C$ car $\mathfrak{M} = (\omega, \varphi(\alpha))$ et, puisque $f - \varphi^r \in \omega A[X]$, $\varphi^r(\alpha) \in \omega C$. Nous avons donc $\mathfrak{M}^{Er} B \subset \omega^E B \subset \mathfrak{M}$ ce qui montre que le nombre q du théorème 1 peut être pris égal à E r, d'où $T = 2 E r - 1$ et $h = (2 E + 1) r$. Comme $2 E \leqslant v(\Delta)$,

nous avons démontré le :

Théorème 4

Soient A un anneau de valuation discrète hensélien et v sa valuation. Soit f un polynôme de $A[X]$, unitaire et séparable de discriminant Δ et tel que $f^{(1)}$ soit la puissance r-ième d'un polynôme irréductible.

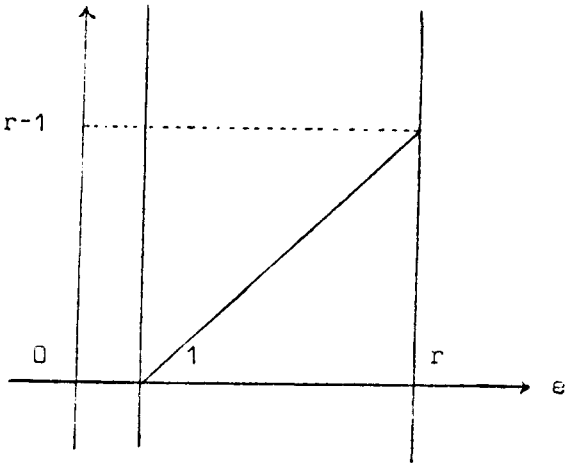
Posons $h = \begin{cases} r+1 & \text{si } v(\Delta) = 0 \text{ ou } 1 \\ [v(\Delta)+1]r & \text{si } v(\Delta) \geqslant 2 \end{cases}$

Alors f est irréductible si et seulement si $f^{(h)}$ l'est.

En faisant intervenir la différente, on obtient une meilleure majoration pour h.

Soit e l'indice de ramification de la valuation de B par rapport à celle de A. On a $\omega B = p^e$. Soit F son degré résiduel. Posons $d = v[\mathrm{Det}(M)]$. Si $d = 0$, $B = C$. Si $d > 0$, $\omega^d B \subset C$, et comme $\omega^d B$ est un idéal propre, $\omega^d B \subset \mathfrak{M}$. Ce qui montre que le nombre q du lemme 1 peut être pris égal à $d.e$ et donc $h = 2q + r$, égal à $2 d.e + r$.

Soit δ la différente, et m l'exposant différentiel. On a $\delta = P^m$. La norme de δ est $\omega^{mF} A$. C'est aussi l'idéal engendré par le discriminant de B, donc $v(\Delta) - 2d = mF = m\frac{n}{e}$; $2de = e\,v(\Delta) - mn$. Majorons la quantité $e\,v(\Delta) - mn$ considérée comme fonction de e et m. Les inclusions de corps $\frac{A}{\omega A} \subset \frac{C}{\mathfrak{M}} \subset \frac{B}{P}$ montrent que $\left[\frac{C}{\mathfrak{M}} : \frac{A}{\omega A}\right]$ = degré de φ divise $\left[\frac{B}{P} : \frac{A}{\omega A}\right] = F$, comme le degré φ est $\frac{n}{r}$ et comme $F = \frac{n}{e}$ on déduit que e divise r. D'autre part e et m sont liés par l'inégalité $m \geqslant e-1$ ([4], ch. V, § 11, th. 28). Le domaine de variation de e et m est le suivant.



Les courbes e $v(\Delta) - mn$ = Constante sont des droites de pente $\frac{v(\Delta)}{n}$.

Si cette pente est inférieure à 1, le maximum est atteint au point (1, 0) et vaut $v(\Delta)$. Si cette pente est supérieure à 1, le maximum est atteint au point (r, r-1) et vaut $r\,v(\Delta) - (r-1)n$. On a démontré le

Théorème 5

Soient A un anneau de valuation discrète hensélien et v sa valuation. Soit f un polynôme de $A[X]$, unitaire et séparable de degré n, de discriminant Δ et tel que $f^{(1)}$ soit la puissance r-ième d'un polynôme irréductible.

Posons h = $\begin{cases} r+1 & \text{si} \quad v(\Delta) = 0 \text{ ou } 1 \\ r+v(\Delta) & \text{si} \quad 1 \leqslant v(\Delta) \leqslant n \\ n+r[v(\Delta)+1-n] & \text{si} \quad v(\Delta) \geqslant n \end{cases}$

Alors f est irréductible si et seulement si $f^{(h)}$ l'est.

Remarque

Lorsque A est à corps résiduel fini, on peut programmer sur machine un test d'irréductibilité des $f^{(k)}$ successifs. Une réponse affirmative pour un $k \leqslant h$ signifie que f est irréductible. Des réponses négatives pour $k = 1, 2, \ldots, h$ signifient que f ne l'est pas.

Exemples

1) $f = X^4 - 3X^2 + 4$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, l'est-il sur $\mathbb{Q}_7$ corps des nombres 7-adiques ?

$f^{(1)} = X^4 + 4X^2 + 4 = (X^2 + 2)^2$ $\qquad r = 2$

Le discriminant de f est $\Delta = 2^6 \times 7^2$; $v(\Delta) = 2$ $\qquad v(\Delta) < n = 4$

donc $h = 4$.

Nous sommes ramenés à chercher si $X^4 - 3X^2 + 4$ est produit de polynômes unitaires dans $\frac{Z}{(7^4)} = \frac{Z}{(2401)}$. Un calcul montre qu'il n'en est rien donc f est irréductible sur $\mathbb{Q}_7$. En fait f n'a pas de diviseurs unitaires dans $\frac{Z}{(7^2)} = \frac{Z}{(49)}$.

2) $f = X^4 + 2X + 4$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, l'est-il sur $\mathbb{Q}_2$?

$f^{(1)} = X^4$. $r = 4$

$\Delta = 4^7 - 3^3 \times 2^4$ $\qquad v(\Delta) = 4$ $\qquad h = 8$

On trouve que dans $\frac{Z}{(2^8)}$, f a la racine - 10 car $(-10)^4 - 20 + 4 = +9984 = 2^8 \times 3 \times 13$.

f est donc réductible dans $\mathbb{Q}_2$.

Un calcul montre que $X^4 + 2X + 4$ n'a pas de diviseur unitaire de degré 2 dans $\frac{Z}{(4)}$, il en est donc de même dans $\mathbb{Q}_2$ et par suite f admet une racine et une seule dans $\mathbb{Q}_2$.

APPLICATION I

CRITERE D'UNICITE DU PROLONGEMENT D'UNE VALUATION DISCRETE

Comme application du théorème 3 nous obtenons le :

Théorème 0

Soient K un corps muni d'une valuation discrète v et A l'anneau de v. Soit $L = K[\alpha]$ une extension finie de K où α est racine d'un polynôme f à coefficients dans A, unitaire, irréductible et séparable, de degré n et discriminant Δ, tel que $f^{(1)}$ soit la puissance r-ième d'un polynôme irréductible.

Posons $h = \begin{cases} r[(\Delta)+1-n] + n & \text{si } v(\Delta) \geqslant n \\ v(\Delta)+r & \text{si } 2 < v(\Delta) \leqslant n \\ r+1 & \text{si } v(\Delta) = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$

Alors le prolongement de v à L est unique si et seulement si $f^{(h)}$ est irréductible.

Nous savons par ([2], ch. 6, § 8, n° 2, corollaire 2) que le nombre de prolongements de v à L est égal au nombre de facteurs irréductibles figurant dans la décomposition de f dans $\hat{K}[X]$ ($\hat{K}$ désignant le complété de K pour la métrique de v).

Par suite le prolongement de v est unique si et seulement si f est irréductible dans $\hat{K}[X]$ ou dans $\hat{A}[X]$.

Or $\hat{A}$ étant hensélien, on peut appliquer le théorème 3 à $\hat{A}$ et à f.

Comme $\forall k,\ \frac{\hat{A}}{\omega^{k}_{\hat{A}}} = \frac{A}{\omega^{k}_{A}}$, l'irréductibilité de f dans $\hat{A}[X]$ équivaut à celle de $f^{(h)}$.

Exemples

1°) Soit $L = \mathbb{Q}[\alpha]$ où α est racine de $X^4 - 3X^2 + 4$ (en fait $L = \mathbb{Q}[i, \sqrt{7}]$)

La valuation 7-adique a un prolongement unique à L puisque $X^4 - 3X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{Q}_7$.

2°) Soit $L = \mathbb{Q}[\alpha]$ où α est racine de $X^4 + 2X + 4$.

La valuation 2-adique admet deux prolongements à L puisque $X^4 + 2X + 4$ est produit dans $\mathbb{Q}_2[X]$ d'un polynôme du premier degré et d'un polynôme du troisième degré irréductible.

B I B L I O G R A P H I E

[1] SAMUEL — Théorie algébrique des nombres. *(Hermann 1967).*

[2] BOURBAKI — Algèbre commutative, ch. V et ch. VI. *(Hermann 1964).*

[3] RAYNAUD — Anneaux henséliens. *(Springer-Verlag (169) 1970).*

[4] ZARISKI-SAMUEL — Commutative algebra vol. 1 *(Van Nostrand 1958).*

[5] LANG — Algebra. *(Addison-Wesley 1965).*

[6] KNUTH — The art of Computer Programming, vol. 2, semi numerical Algorithms Reading Mass. *(Addison Wesley 1969).*

[7] GROTHENDIECK — Eléments de Géométrie Algébrique. (ch. IV, part. 1) *(Publ. Math. n° 20, Inst. Hautes Etudes Sci. 1960).*

[8] BERLEKAMP — On the factorization of polynomials over finite field *(Bell Teleph. Lab. Inc. Murray Hill N.J. 1967).*

[9] GRECO — Henselization of a ring with respect to an ideal. *(Trans. A.M.S. 144, 1969).*

[10] GRECO-SALMON — Topics in $\mathfrak{M}_0$-adic topologies. *(Springer Verlag 1971).*

[11] LAFON — Anneaux henséliens. *(Bul. Soc. Math. 91 1963).*

[12] MATSUMARA — Commutative Algebra *(Benjamin, New-York, 1970).*

[13] ENDLER — Valuation Theory *(Springer Verlag)*