Daniel Ferrand

Morphismes entiers universellement ouverts

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 4
« Séminaire d'algèbre et de logique », , exp. nº 3, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___4_A3_0>

MORPHISMES ENTIERS UNIVERSELLEMENT OUVERTS

par

Daniel FERRAND

Le "deuxième théorème de Cohen-Seidenberg" est étendu en un critère pour qu'un morphisme entier soit universellement ouvert.
Une méthode naturelle (1.3) pour démontrer ce résultat, consiste à faire apparaître les algèbres finies monogènes, qui interviennent comme des quotients d'algèbres finies libres par un nilidéal.
On montre ensuite (2.5) que l'existence, après un changement de base fini, d'une telle factorisation caractérise les algèbres finies monogènes qui sont universellement ouvertes. Enfin des exemples (3.1) enlèvent tout espoir de généraliser cette caractérisation aux algèbres finies non monogènes.

1. Retour au "Going down"

(1.1) Soit $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On dit que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est <u>générisant</u> (E.G.A.I.3.9.2), si pour tout idéal premier q de B, de trace p dans A, l'application $\mathrm{Spec}(B_q) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_p)$ est surjective ; en anglais, on dit que $A \longrightarrow B$ vérifie le "going down".
On vérifie facilement (loc. cit.) que <u>si $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est ouvert, alors il est générisant</u>.
Le célèbre deuxième théorème de Cohen-Seigenberg apparaît donc comme un cas particulier de l'énoncé suivant :

<u>Proposition</u> (1.2). Soit $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.
Alors $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est universellement ouvert dans chacun des trois cas suivants :

a) B est un A-module projectif de type fini.

b) A est intégralement clos, B est entier sur A et est un A-module sans torsion.

c) Il existe un groupe fini G, opérant sur la A-algèbre B, pour lequel $B^G = A$.

Notons que sous l'hypothèse a), l'énoncé est un cas très particulier d'un théorème de Grothendieck, disant qu'un morphisme plat localement de présentation finie est universellement ouvert. Dans leur théorème, Cohen et Seidenberg se plaçaient sous les hypothèses de b) ; la démonstration donnée par Bourbaki (Alg. Comm., ch. V, parag. 2, th. 3), consiste à se ramener au cas où B est intègre et intégralement clos de corps des fractions une extension galoisienne de celui de A, ce qui est une situation analogue à c). Nous allons esquisser une démonstration unifiée pour les trois cas qui nous semble plus clairement montrer "pourquoi ça marche".

(1.3) On montre d'abord que pour tout $t \in B$, il existe un polynome unitaire $F \in A[T]$ tel que $F(t) = 0$, et tel que le noyau de $A[T]/(F) \longrightarrow B$ soit un nilidéal.

Dans le cas a), on se ramène au cas où B est de rang constant, et F est alors le polynôme caractéristique de t.

Dans le cas b), c'est le polynôme minimal de l'image de t dans $K \otimes_A B$, où K est le corps des fractions de A (F est à coefficients dans A d'après le lemme de Kronecker).

Dans le cas c), on prend $F(T) = \prod_{g \in G} (T-g(t))$.

Pour vérifier que le noyau de $A[T]/(F) \longrightarrow B$ est un nilidéal, on se ramène, sous l'hypothèse a) au cas où A est un corps ; le noyau est alors engendré par le polynôme minimal de t, et, d'après un résultat classique, une puissance du polynôme minimal est un multiple du polynôme caractéristique.

Sous l'hypothèse b), le noyau est nul.

Sous l'hypothèse c), on fait le changement de base entier injectif $A \longrightarrow B$ qui fait apparaître le polynôme F choisi comme le polynôme caractéristique, relativement au revêtement trivial $B \longrightarrow \prod_G B$, de l'élément $(g(t))_{g\in G}$ de $\prod_G B$, ce qui ramène au cas a).

On vérifie ensuite que si $F(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_o$ est un polynôme unitaire à coefficients dans un anneau A, et si t désigne l'image de T dans $C = A[T]/(F)$, alors l'image de l'ouvert $D(t)$ par l'application $\mathrm{Spec}(C) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est égale à l'ouvert $\bigcup_i D(a_i)$. Cela montre que les morphismes considérés sont ouverts.

Pour voir qu'ils le sont universellement, on peut se restreindre aux changements de base de la forme $A \longrightarrow A[X_1,\ldots,X_n]$; or, dans chacun des trois cas, les hypothèses sont conservées par de tels changements de base.

Au vu de la démonstration qui précède, il est bien naturel de se demander si réciproquement une algèbre finie monogène et universellement ouverte est isomorphe au quotient d'une algèbre libre par un nilidéal ; l'objet du paragraphe suivant, est de démontrer qu'une telle factorisation existe après un changement de base fini (2.5).

2. Une réciproque

(2.1) On appelle degré local d'un polynôme F à coefficients dans un anneau A l'application de Spec(A) dans N qui associe à l'idéal premier p le degré du polynôme image de F dans $A_p[T]$.

On dira que F est localement unitaire, si pour tout idéal premier p, l'image de F dans $A_p[T]$ est un polynôme unitaire ; le degré local de F est alors une application localement constante.

Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un A-module projectif de type fini E. Le polynôme caractéristique $Pc(u,T) = \det(T\otimes 1 - 1\otimes u)$ est un polynôme localement unitaire, dont le degré local est égal au rang (local) de E.

(2.2) Si F est un polynôme localement unitaire, $A[T]/(F)$ est une A-algèbre localement libre. Réciproquement, soit $A \longrightarrow B$ une A-algèbre finie localement libre et monogène ; soit $F(T) = Pc_{B/A}(t,T)$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de B défini par la multiplication par t ; on a $F(t) = 0$ (Hamilton-Cayley) et l'homomorphisme $A[T]/(F) \longrightarrow B$ est un isomorphisme.

On utilisera de façon essentielle la variante suivante du lemme de Kronecker :

<u>Lemme</u> (2.3) Soient $A \longrightarrow K$ un homomorphisme d'anneaux tel que A soit intégralement fermé dans K, $A \longrightarrow A_1$ une A-algèbre finie monogène, et K_2 un quotient de $K \otimes_A A_1$ localement libre sur K. Alors l'image A_2 de A_1 dans K_2 est localement libre sur A, et K_2 est isomorphe à $K \otimes_A A_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, hook] \\ K \arrow[r] & K \otimes_A A_1 \arrow[r] & K_2 \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, A_1 s'écrit comme quotient d'une A-algèbre A' finie monogène et <u>libre</u> ; on peut remplacer A_1 par A' et $K \otimes_A A_1$ par $K' = K \otimes_A A'$. Soit F le polynôme caractéristique d'un générateur t de A' ; son image dans $K[T]$ est le polynôme caractéristique (relativement à $K \longrightarrow K'$) de l'image de t dans K' ; enfin, soit $P \in K[T]$ le polynôme caractéristique relatif à $K \longrightarrow K_2$ de l'image de t dans K_2.

Comme K_2 est un quotient de K', il existe un polynôme $Q \in K|T|$ tel que

$$F = PQ.$$

Comme F est unitaire et P localement unitaire, Q est localement unitaire. Comme A est intégralement fermé dans K et F à coefficients dans A, on déduit du lemme de Kronecker classique que P est à coefficients dans A ; il est alors clair que $A_2 = A[T]/(P)$ et que $K_2 \cong K \otimes_A A_2$.

Lemme (2.4) Soient $A \longrightarrow A'$ et $A \longrightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux. On suppose que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est générisant (par exemple, ouvert), et que le noyau de $A \longrightarrow A'$ est un nilidéal. Alors le noyau de $B \longrightarrow A' \otimes_A B$ est un nilidéal.

Il s'agit de montrer qu'un idéal premier minimal q de B se relève à $A' \otimes_A B$. Comme $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est générisant, la trace p de q dans A est un idéal premier minimal, donc se relève à A' puisque le noyau de $A \longrightarrow A'$ est un nilidéal. D'où le résultat.

Proposition (2.5) Soit $A \longrightarrow B$ une A-algèbre finie monogène. Pour que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit universellement ouvert, il faut et il suffit qu'il existe une A-algèbre finie $A \longrightarrow A'$ telle que $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit surjectif, et une factorisation de $A' \longrightarrow A' \otimes_A B$ en

$$A' \longrightarrow C' \longrightarrow A' \otimes_A B$$

où C' est fini localement libre sur A', et où $C' \longrightarrow A' \otimes_A B$ est surjectif de noyau un nilidéal.

Pour montrer que la condition est suffisante, on va considérer le diagramme commutatif suivant où $B' = A' \otimes_A B$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spec}(A) & \xleftarrow{\ f\ } & \mathrm{Spec}(B) \\
{\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} \\
\mathrm{Spec}(A') & \xleftarrow[\ f'\ ]{} & \mathrm{Spec}(B')
\end{array}$$

Comme l'hypothèse est stable par changements de base, il suffit de montrer que f est ouvert. Soit donc V un ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$; pour montrer que $f(V)$ est ouvert, il suffit de montrer que $u^{-1}(f(V))$ est ouvert puisque u est fermé et surjectif. Or $u^{-1}(f(V) = f'(v^{-1}(V))$ et f' est ouvert d'après (1.2 a).

Pour montrer que la condition est nécessaire, on utilisera le résultat suivant :

<u>Proposition</u> (2.6) Soient A un anneau tel que tout idéal premier de A soit maximal, $A \longrightarrow A_1$ une A-algèbre finie localement libre, et B un quotient de A_1, tel que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit universellement ouvert. Alors $A_1 \longrightarrow B$ se factorise par un quotient A_2 localement libre sur A, tel que le noyau de $A_2 \longrightarrow B$ soit un nilidéal.

Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$; on a le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "\Delta"] & S_1 \times_S S_1 & \\
X \arrow[u] \arrow[r, "u"] & S_1 \times_S X \arrow[u] \arrow[r, "w"] \arrow[d] & S_1 \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "v"'] & S
\end{tikzcd}$$

Comme $S_1 \times_S X$ est fini sur S, tous ses points sont fermés ; par suite, l'espace topologique $S_1 \times_S X$ est séparé. Comme S_1 est fini sur S, Δ et par suite u, sont de présentation finie ; le complémentaire du fermé $u(X)$ est donc quasi-compact dans $S_1 \times_S X$; comme cet espace topologique est séparé, $u(X)$ est ouvert. Comme v est universellement ouvert par hypothèse, w est ouvert ; bref, $wu(X)$ est un ouvert et fermé de S_1 ; soit S_2 le schéma induit par S_1 sur cet ouvert ; comme c'est un facteur de S_1, S_2 est fini localement libre sur S ; enfin, l'immersion fermée $X \longrightarrow S_2$ déduite de wu est surjective. D'où le résultat.

(2.7) Démonstration de la nécessité de la condition (2.5)

Soient t un générateur de B et $G \in A[T]$ un polynôme unitaire tel que $G(t) = 0$; on a donc un homomorphisme surjectif $A_1 = A[T]/(G) \longrightarrow B$.

Il existe un anneau absolument plat K et un homomorphisme $A \longrightarrow K$ tel que $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit une application bijective [3]. D'après (2.6), il existe un quotient K_2 de $K \otimes_A A_1$, localement libre sur K, et un homomorphisme surjectif $K_2 \longrightarrow K \otimes_A B$, dont le noyau est un nilidéal. Soit A" la fermeture intégrale de A dans K. D'après (2.3), il existe un polynôme localement unitaire $F \in A''[T]$ tel que K_2 soit K-isomorphe à $K[T]/(F)$. Soit A' la sous-A-algèbre finie de A" engendrée par les coefficients de F. L'élément $F(1 \otimes t) \in A' \otimes_A B$ a une image nulle dans $K \otimes_A B$; on déduit de (2.4) l'existence d'un entier n tel que $F(1 \otimes t)^n = 0$. Posons $A'_2 = A'[T]/(F)$ et $C' = A'[T]/(F^n)$, de sorte qu'on a un isomorphisme $K \otimes_A A'_2 \cong K_2$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[dd, hook] & C' \arrow[r] \arrow[d] & A' \otimes_A B \arrow[dd] \\
& A'_2 \arrow[d, hook] & \\
K \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K \otimes_A B
\end{tikzcd}$$

dont on déduit immédiatement que le noyau de l'homomorphisme surjectif $C' \longrightarrow A' \otimes_A B$ est un nilidéal. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> (2.8) Supposons que A n'ait qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (par exemple A intègre, ou noethérien), alors on peut faire la même démonstration en prenant pour K le produit des corps résiduels en ces idéaux premiers minimaux ; on n'a plus alors besoin de (2.6) puisque $K \otimes_A B$ est lui-même localement libre sur K, et l'homomorphisme fini $A \longrightarrow A'$ obtenu est tel que $A_{red} \longrightarrow A'$ soit <u>birationnel</u>.

3. Exemples

On ne peut guère améliorer (2.5) : les exemples qui suivent montrent que la condition n'est plus nécessaire, si on ne suppose pas B monogène et que, même si B est monogène, on ne peut en général pas trouver un homomorphisme fini et radiciel $A \longrightarrow A'$ qui fasse apparaître la factorisation cherchée. Ce n'est donc pas dans cette direction que l'on pourra trouver une caractérisation des morphismes finis universellement ouverts.

Lemme (3.1) Soient k un corps, B une k-algèbre de type fini intégralement close et $A = B^G$ l'anneau des invariants sous un groupe fini G de k-automorphismes de B, qui opère sans inertie* aux points de hauteur 1.

On suppose qu'il existe un homomorphisme fini injectif $A \longrightarrow A'$ et une factorisation $A' \longrightarrow C' \longrightarrow A' \otimes_A B$ où C' est fini localement libre sur A', et où $C' \longrightarrow A' \otimes_A B$ est surjectif à noyau nilpotent.
Alors $A \longrightarrow B$ est un revêtement étale galoisien de groupe G.

Pour avoir l'exemple cherché, il suffit de prendre un groupe qui opère avec inertie, mais uniquement en des points de hauteur deux ; le plus simple est donné par la symétrie par rapport à l'origine dans le plan : soient k un corps de car. $\neq 2$, et G le groupe engendré par le k-automorphisme de $k[X,Y]$ qui envoie X sur $-X$ et Y sur $-Y$; il opère avec inertie à l'origine et sans inertie ailleurs.

Pour démontrer (3.1), on peut supposer que A' est intègre et intégralement clos. Comme les points de hauteur 1 de A' ont pour image des points de hauteur 1 de A, G opère sans inertie au-dessus d'un ouvert U' de $\mathrm{Spec}(A')$ tel que $A' \longrightarrow \Gamma(U')$ soit un isomorphisme ; d'après le lemme qui suit, G opère sans inertie sur $A' \otimes_A B$; comme tout idéal premier de B se relève à $A' \otimes_A B$, G opère aussi sans inertie dans B ; d'où le résultat.

---

* Soient $\mathfrak{n}$ un idéal premier de B et $G_i(\mathfrak{n}) = \{g \in G$ tels que $g(x) - x \in \mathfrak{n}$, pour tout $x \in B\}$. On dit que G opère sans inertie en $\mathfrak{n}$ si $G_i(\mathfrak{n}) = \{id\}$. Pour que G opère sans inertie en tout point de $\mathrm{Spec}(B)$, il faut et il suffit

que l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \longrightarrow \prod_G B$ soit surjectif. On montre qu'alors c'est même un isomorphisme, et que $A \longrightarrow B$ est fini localement libre et non ramifié, i.e. c'est un revêtement étale.

Lemme (3.2) Soient A un anneau, U un ouvert quasi-compact de Spec(A) tel que $A \longrightarrow \Gamma(U)$ soit un isomorphisme, B une A-algèbre finie et V l'image réciproque de U dans Spec(B). On suppose que

i) Un groupe fini G opère sur la A-algèbre B et $V \longrightarrow U$ est un revêtement étale galoisien de groupe G,

ii) B s'écrit comme quotient d'une A-algèbre finie localement libre C par un idéal nilpotent.

Alors $B^G \longrightarrow B$ est un revêtement étale galoisien de groupe G, i.e. G opère sans inertie sur B.

Soit W l'image réciproque de U dans Spec(C) ; on a donc une immersion fermée $V \longrightarrow W$ définie par un idéal nilpotent. D'après la propriété de relèvement qui caractérise les morphismes étales, on déduit de i) l'existence d'un morphisme $s : W \longrightarrow V$ tel que le composé $V \longrightarrow W \xrightarrow{s} V$ soit le morphisme identique.

Passant aux anneaux de sections, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \Gamma(V) \arrow[r, "\Gamma(s)"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \Gamma(W) \arrow[r] & \Gamma(V) \end{tikzcd}$$

Comme C est localement libre sur A, $C \longrightarrow \Gamma(W)$ est un isomorphisme.

On en conclut

1) $E = \Gamma(V)$ est localement libre sur A.

2) L'homomorphisme de restriction $r : B \longrightarrow \Gamma(V)$ est surjectif.

On va d'abord déduire de 1) que $A \longrightarrow E$ est un revêtement étale galoisien de groupe G : l'image réciproque de U dans $\mathrm{Spec}(E)$ s'identifie à V ; de plus, comme E est localement libre sur A, on a un isomorphisme

$$E \otimes_A E \xrightarrow{\sim} \Gamma(V \times_U V)$$

Comme $V \longrightarrow U$ est par hypothèse un revêtement étale galoisien, le morphisme canonique $\coprod_G V \longrightarrow V \times_U V$ est un isomorphisme ; d'où finalement l'isomorphisme

$$E \otimes_A E \xrightarrow{\sim} \prod_G E$$

Quitte à faire le changement de base fini localement libre $A \longrightarrow E$, on peut même supposer que E est le revêtement trivial $\prod_G A$, où G opère par permutation des facteurs.

L'hypothèse faite sur U, montre que W contient les idéaux premier minimaux de C, donc V contient ceux de B ; comme le support du noyau I de l'homomorphisme surjectif $r : B \longrightarrow E$ ne rencontre pas V, I est un nilidéal ; par suite, on peut relever dans B les idempotents de E qui donnent la décomposition $E \cong \prod_G A$; on a donc une décomposition en un produit : $B = \prod_{g \in G} B_g$. Comme r est compatible aux actions de G sur B et sur E, on vérifie facilement que chaque automorphisme g induit un isomorphisme de B_g sur B_1, si bien que B est isomorphe au produit $\prod_G B_1$, où maintenant G opère par simple permutation des facteurs ; mais alors l'anneau des invariants B^G est isomorphe à B_1, et $B^G \longrightarrow B$ est un revêtement étale galoisien de groupe G.

C.Q.F.D.

(3.2) Soit A l'anneau local de l'origine de la courbe définie sur $\mathbb{Q}$ par l'équation $x^2 - y^2 + y^3$. Il existe une A-algèbre finie monogène $A \longrightarrow B$ telle que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit universellement ouvert, et telle que B ne puisse pas s'écrire comme le quotient d'une A-algèbre finie libre par un idéal nilpotent.

Soit A' la clôture intégrale de A ; on sait que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est égal au conducteur de $A \longrightarrow A'$ et que, en posant $k = A/\mathfrak{m}$ $(=\mathbb{Q})$, $A'/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $k \times k$. On en déduit que les seules A-algèbres finies contenues dans le corps des fractions de A sont A et A', et que $A \longrightarrow A'$ n'est pas radiciel. Il n'existe donc pas de A-algèbre finie A'' telle que $\mathrm{Spec}(A'') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit radiciel et surjectif, et telle que $A'' \longrightarrow A''\otimes_A B$ se factorise en $A'' \longrightarrow C'' \longrightarrow A''\otimes_A B$ où C'' est libre sur A'', et où le second homomorphisme est surjectif à noyau nilpotent.

En effet, si un tel A'' existait, on pourrait le supposer intègre, donc contenu dans le corps des fractions de A puisque ce dernier est de caractéristique nulle, donc égal à A d'après ce qui précède ; cela contredit l'assertion initiale.

Il reste à construire B.

La clôture intégrale A' de A s'identifie au localisé de $k[T]$ en les idéaux premiers (T) et $(T-1)$; le conducteur $\mathfrak{m}$ est égal à $T(T-1)A'$ et $\overline{A}' = A'/\mathfrak{m}$ s'identifie à $k[T]/(T(T-1)) \cong k \times k$; enfin, on a un carré cartésien qui peut servir de définition de A :

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ k \arrow[r] & k \times k \end{tikzcd}$$

Posons $B' = A'[X]/(P)$ où $P(X) = X^3 - (2-3T)X^2 - (T-1)X + T(T-1)$.

Le polynôme P est irréductible : faire $T = 2/3$ et se souvenir que $k = \mathbb{Q}$.

Explicitons $\overline{B}' = \overline{A}'\otimes_{A'} B' = B'/\mathfrak{m}B'$: l'homomorphisme $A' \longrightarrow \overline{A}' = k \times k$ s'obtient en faisant $T = 0$ et $T = 1$; le polynôme P est transformé en

$$P_0 = X(X-1)^2 \qquad \text{pour} \qquad T = 0$$

$$P_1 = X^2(X-1) \qquad \text{pour} \qquad T = 1$$

et $\overline{B}' = \overline{B}'_0 \times \overline{B}'_1$ où $\overline{B}'_i = k[X]/(P_i)$.

Posons $\overline{B} = k[X]/(X^2(X-1)^2)$; comme $(P_o) \cap (P_1) = (X^2(X-1)^2)$, on a une <u>injection</u> canonique $\overline{B} \longrightarrow \overline{B}'$. On définit enfin B comme étant le produit fibré de $\overline{B}$ et B' au-dessus de $\overline{B}'$, de sorte qu'on a le carré cartésien

(3.2.2)
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{B} & \longrightarrow & \overline{B}' \end{array}$$

Il y a un morphisme (en un sens évident) du carré (3.3.1) dans le carré (3.2.2), et B est fini sur A puisque tous les facteurs du produit fibré le sont, et que A est noethérien.

Le générateur x de B' par rapport à A' est contenu dans B ; comme $\mathfrak{m}A' = \mathfrak{m}$, on en déduit que $\mathfrak{m}B' = \mathfrak{m}B$, donc que $B/\mathfrak{m}B \longrightarrow \overline{B}$ est un isomorphisme. Comme $\overline{B}$ est une k-algèbre monogène, B est une A-algèbre monogène (Nakayama) ; on peut même préciser que B est engendré en tant que A-module par $1, x, x^2$ et x^3.

Montrons qu'il n'existe pas de polynôme unitaire $F \in A[X]$ tel que $F(x) = 0$ et tel que $A[X]/(F) \longrightarrow B$ ait un noyau nilpotent : soit K le corps des fractions de A ; comme P est irréductible et que P et F sont unitaires, on aurait dans $K[X]$ $F = P^n$ pour un entier n convenable ; donc P^n serait à coefficients dans A, donc son image dans $\overline{A}'[X]$ serait à coefficients dans $\overline{A}$; mais cela impliquerait que $P_o^n = P_1^n$, ce qui est absurde.

Il reste à prouver que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est universellement ouvert ; il suffit de montrer que $\mathrm{Spec}(A' \otimes_A B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')$ est universellement ouvert (cf. le début de la démonstration de (2.5)). Comme $A' \longrightarrow B'$ est libre, $\mathrm{Spec}(B') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A')$ est universellement ouvert ; il suffit donc de montrer que l'homomorphisme $A' \otimes_A B \longrightarrow B'$ est surjectif et a son noyau nilpotent.

Le premier point provient de ce que B contient le générateur x de B' sur A'.

Pour démontrer le second, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A'\otimes_A B & \xrightarrow{u} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{A}'\otimes_k \overline{B} & \xrightarrow{\overline{u}} & \overline{B}' \end{array}$$

où le ligne du bas est déduite de celle du haut par le changement de base $A' \longrightarrow \overline{A}'$. Comme u est surjectif et que B' est libre sur A', $\mathrm{Ker}(\overline{u})$ s'identifie à $A'\otimes_{A'}\mathrm{Ker}(u)$; comme $mA' \subset A$, $m(A'\otimes_A B)$ est contenu dans l'image de B dans $A'\otimes_A B$, laquelle est disjointe de Ker(u) puisque $B \longrightarrow B'$ est injectif ; donc $m\mathrm{Ker}(u) = 0$ et $\mathrm{Ker}(u) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\overline{u})$ est bijectif. Il suffit donc de voir que $\mathrm{Ker}(\overline{u})$ est un idéal nilpotent, ce qui est évident si on revient à la définition de $\overline{B}$ et de $\overline{B}'$.

- REFERENCES -

[1] BOURBAKI Algèbre commutative, chapitres 5 et 6.

[2] GROTHENDIECK et DIEUDONNE Eléments de Géométrie Algébrique. Chapitre I, nouvelle édition, Springer (Cité EGA I).

[3] OLIVIER Anneaux absolument plats universels, Séminaire P. SAMUEL, 1967/68.